



eudem  
libros de grado

# FISICA I

*Teoría, experiencias y 161 ejercicios resueltos*

**ROBERTO STIMLER**

# **FÍSICA I**

TEORÍA, EXPERIENCIAS,  
Y 161 EJERCICIOS RESUELTOS

Base del curso cuatrimestral de **Mecánica Clásica**  
de la **Facultad de Ingeniería** de la **U.N.M.d.P.**

**ROBERTO STIMLER**



Stimler, Roberto

Física I : teoría, experiencias y 161 ejercicios resueltos / Roberto Stimler. - 1a ed . - Mar del

Plata : EUDEM, 2020.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-4440-78-5

1. Física. 2. Educación Universitaria. I. Título.

CDD

Queda hecho el depósito que marca la Ley 11.723 de Propiedad Intelectual.

Prohibida su reproducción total o parcial por cualquier medio o método,  
sin autorización previa del autor.

**ISBN: 978-987-4440-78-5**

Este libro fue evaluado por Vicente Capuano

Fecha de edición: Mayo 2020

© 2020, EUDEM

Editorial de la Universidad Nacional de Mar del Plata

EUDEM / 3 de Febrero 2538

Mar del Plata / Argentina

© 2020, Roberto Stimler

Arte y Diagramación: Luciano Alem

Imagen de tapa: Laura Brarda, "Tao"



Libro  
Universitario  
Argentino

A Alicia, mi buena compañera de toda la vida.  
Y a todos los que realizan sus tareas pensando en que  
a alguien han de servir.

*Roberto Stimler*





**ECUACIONES**

**y**

**FÓRMULAS**



## CINEMÁTICA de la Partícula

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \vec{v}_m = \Delta \vec{r} / \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_A = d\vec{r}_A / dt \quad \vec{a}_m = \Delta \vec{v} / \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}_A = d\vec{v} / dt$$

MRU:  $x = \pm v \cdot t \pm x_0$       MRUV:  $x = \pm \frac{1}{2} a \cdot t^2 \pm v_0 \cdot t \pm x_0$        $v = \pm a \cdot t \pm v_0$

Tiro oblicuo:  $y = -\frac{1}{2} g \cdot [x/v_{ox}]^2 + x \cdot \text{tg } \theta$        $y_p \leq (v_0^2 / 2g) - g \cdot x_p^2 / 2v_0^2$

Velocidad y aceleración angular:  $\omega_m = \Delta \theta / \Delta t$  ;  $\omega = d\theta / dt$  ;  $\alpha_m = \Delta \omega / \Delta t$  ;  $\alpha = d^2 \theta / dt^2$

Movimiento circular:  $R \cdot \omega = v$        $a_c = v \cdot \omega$        $a_t = dv / dt$

MCU:  $f = N^\circ \text{ rev} / \Delta t$  ;  $T = \Delta t / N^\circ \text{ rev}$  ;  $f = 1/T$  ;  $\theta = \pm \omega \cdot t \pm \theta_0$  ;  $s = \pm v \cdot t \pm s_0$  ;  $a_c = v \cdot \omega$

MCUV:  $\omega = \pm \alpha \cdot t \pm \omega_0$  ;  $\theta = \pm \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \pm \omega_0 \cdot t \pm \theta_0$  ;  $v = \pm a_t \cdot t \pm v_0$  ;  $a_t = R \cdot \alpha$  ;  $a_c = v^2 / R$   
 $s = \pm \frac{1}{2} a_t \cdot t^2 \pm v_0 \cdot t \pm s_0$

Radio del círculo osculatriz:  $\rho = [ (1 + y'^2)^{3/2} ] / y''$

Movimientos relativos:  $\vec{v}_{MA} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{MB}$        $\vec{a}_{MA} = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{MB}$

## DINÁMICA de la Partícula

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad \sum \vec{f} = d\vec{p} / dt = m \cdot \vec{a} \quad f_{\text{máx}} = \mu_e \cdot N$$

MAS:  $x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)$  ;  $a = -\omega^2 \cdot x$  ;  $F = -k \cdot x$  ;  $v = \pm \omega \cdot (A^2 - x^2)^{1/2}$

MCAS:  $a_t = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)$        $a_c = v^2 / \rho = [\omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)]^2 / \rho$

Péndulo simple:  $T = 2\pi \cdot (l/g)^{1/2}$

Sistemas No Inerciales:  $\sum \vec{f}_{\text{reales}} + \vec{f}^* = m \cdot \vec{a}$        $\vec{f}^* = -m \cdot \vec{A}$

## TRABAJO y ENERGÍA de la Partícula

$$dW_{f_2} = \vec{f}_2 \cdot d\vec{r} \quad W_{f_2} = \sum dW_{f_2} = \int f_{2x} \cdot dx + \int f_{2y} \cdot dy + \int f_{2z} \cdot dz$$

$$W_p = \pm P \cdot H \quad W_{fr} = -\mu N \cdot l \quad W_{FR} = \frac{1}{2} k \cdot (x_2^2 - x_1^2)$$

Teorema Trabajo-Energía: S.I.:  $W_R = \Delta Ec$       S.N.I.:  $W_{\text{todas}} + W_{f^*} = \Delta Ec$  ;  $Ec = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

Fuerza conservativa:  $\delta F_y / \delta x = \delta F_x / \delta y$        $\delta F_z / \delta x = \delta F_x / \delta z$        $\delta F_z / \delta y = \delta F_y / \delta z$

$Ep_A = -W_{F_{\text{cons}}} (Ref \rightarrow A)$  ;  $Em = Ep + Ec = \text{cte.}$ , si solo ejecutan trabajo fuerzas conservativas ;  $Pot = dW/dt$

## SISTEMAS de PARTÍCULAS

$$\sum \vec{f}_{\text{ext}} = d(\vec{p}_{\text{sis}}) / dt \quad \vec{p}_{\text{sis}} = \sum m_i \cdot \vec{v}_i \quad \sum \vec{f}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}_{\text{CM}} \quad \vec{r}_{\text{CM}} = \sum m_i \cdot \vec{r}_i / m$$

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \int dm \cdot \vec{r} / \int dm \quad ; \quad \int \vec{R} \cdot dt = \vec{J}_R \quad ; \quad \vec{J}_e = \Delta \vec{p}_{\text{sis}} \quad ; \quad W_{f_e} + W_{f_i} = \Delta Ec_{\text{sis}} \quad ; \quad Ec_{\text{sis}} = \frac{1}{2} \sum m_i \cdot v_i^2$$

Colisiones:  $Ec_{\text{sis f}} = Ec_{\text{sis i}} + \Delta Q$        $r = -(v_2 - v_1) / (u_2 - u_1)$

$$v_1 = [ (m_1 - r \cdot m_2) / (m_1 + m_2) ] \cdot u_1 + [ m_2 \cdot (1 + r) / (m_1 + m_2) ] \cdot u_2$$

$$v_2 = [ m_1 \cdot (1 + r) / (m_1 + m_2) ] \cdot u_1 + [ m_2 - r \cdot m_1 / (m_1 + m_2) ] \cdot u_2$$

$$\Delta Ec_{\text{sis}} = \frac{1}{2} [ m_1 \cdot m_2 / (m_1 + m_2) ] \cdot (u_2 - u_1)^2 \cdot (r^2 - 1)$$

Masa variable:  $\vec{a} = (\sum \vec{f}_{\text{ext}} + \vec{f}_{\text{retro}}) / M$  ;  $\vec{f}_{\text{retro}} = q \cdot \vec{v}_r$  ;  $q = dm/dt$  ;  $M = M_0 - q \cdot t$

$$\vec{M}^0 = \vec{r}^0 \wedge \vec{f} \quad \vec{L}^0 = \vec{r}^0 \wedge \vec{p}$$

Partícula:  $\vec{M}_R^0 = d\vec{L}^0 / dt$       Sistemas de partículas:  $\vec{M}_{Fe}^0 = d\vec{L}^0 / dt$  ;  $\vec{L}_{\text{sis}}^0 = \sum \vec{L}_i^0$

## CUERPO RÍGIDO

$$\vec{L}^E = \vec{L}^{CM} + \vec{r}^{CM} \wedge m \cdot \vec{v}_{CM} ; L^o = \omega \cdot I^o ; I^o = \int dm \cdot r^{\circ 2} ; dm = d(vol) \cdot \delta ; \Sigma M^o = I^o \cdot \alpha$$

Steiner:  $I^E = I^{CM} + m \cdot d^2$  Teorema de la Figura Plana:  $I^z = I^y + I^x$   
 Péndulo físico:  $T = 2\pi \cdot (I^E / m \cdot g \cdot d)^{1/2}$  Centro de percusión:  $D = I^E / m \cdot d$   
 $\vec{v}_A = \vec{v}_{1A} + \vec{v}_{2A}$   $v_{2A} = r_A \cdot \omega$  Rodadura:  $v_{CM} = R \cdot \omega$   $a_{CM} = R \cdot \alpha$

$$Ec = 1/2 m \cdot v_{CM}^2 + 1/2 I^{CM} \cdot \omega^2 ; \Sigma W_{Fe} = \Delta Ec$$

$$W_f = W_{f_{tras.}} + W_{f_{rotac.}} = \pm f \cdot d \pm M_f^{CM} \cdot \Delta\theta ; W_{fr} = 0$$

$$\vec{G}_R^E = \int \vec{M}_R^E \cdot dt \quad \vec{G}_R^E = \Delta \vec{L}_R^E \quad \vec{G}_R^E = \vec{r}^E \wedge \vec{J}$$

Precesión:  $\Omega = mg \cdot D / I^o \cdot \omega$

Sistemas No Inerciales:  $\Sigma \vec{f} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}_{CM}$  ;  $\Sigma \vec{M}^o + \vec{M}_{fe}^o = d\vec{L}^o/dt$  ;  $\Sigma \vec{M}^o + \vec{M}_{fe}^o = I^o \cdot \alpha$

## FLUIDOS IDEALES

$$\rho = \vec{F} / \vec{s} ; dp = \delta_f \cdot g \cdot dy ; dp = \delta_f \cdot (a + g) \cdot dy ; dp_t = \delta_f \cdot g \cdot dy + \delta_f \cdot a \cdot dx$$

$$E = dm_f \cdot (a^2 + g^2)^{1/2} \quad tg \beta = - dy/dx = a/g \quad E = dm_f \cdot [(\omega^2 \cdot r)^2 + g^2]^{1/2}$$

$$\delta_{11} \cdot S_1 \cdot v_1 = \delta_{12} \cdot S_2 \cdot v_2 \quad p_1 + \delta_f \cdot g \cdot y_1 + 1/2 \delta_f \cdot v_1^2 = p_2 + \delta_f \cdot g \cdot y_2 + 1/2 \delta_f \cdot v_2^2 = cte.$$



## LIBROS RECOMENDADOS POR LA CÁTEDRA FÍSICA I

Muchos son los buenos textos que contienen los temas de *Física I*, recomendables para la consulta de un estudiante de ingeniería. Entre ellos destacamos a los que enumeramos a continuación, los que viene utilizando la cátedra por su claridad y adecuación a los primeros meses de carrera universitaria.

Física (I)	<i>Tipler</i>	<i>Paul A.</i>
Física (Parte I)	<i>Resnick</i> <i>Holliday</i>	<i>Robert</i> <i>David</i>
Fundamentos de Física	<i>Blatt</i>	<i>Frank J.</i>
Física, conceptos y aplicaciones	<i>Tippens</i>	<i>Paul E.</i>
Mecánica, Calor y Sonido	<i>Sears</i>	<i>Francis W.</i>
Física	<i>Physical Science Study Committee</i>	
Física, Mecánica y Termodinámica	<i>Alonso</i> <i>Rojo</i>	<i>Marcelo</i> <i>Onofre</i>
Física General	<i>Sears</i> <i>Zemansky</i>	<i>Francis W.</i> <i>Mark W.</i>
Introducción al estudio de la Mecánica, Materia y Ondas	<i>Ingard</i> <i>Kraushaar</i>	<i>Uno</i> <i>William L.</i>
Mecánica Elemental	<i>Roederer</i>	<i>Juan G.</i>
Física – Fundamentos y Aplicaciones	<i>Eisberg</i> <i>Lerner</i>	<i>Robert M.</i> <i>Lawrence S.</i>
Historia del tiempo	<i>Hawking</i>	<i>Stephen</i>



## ¿ Por qué el amor a la física ?

*Una experiencia personal*

A mí de niño me pasaban cosas. Como todos los niños, claro, yo imaginaba situaciones en base a los datos que mi cerebro iba adquiriendo, ingresados más por el lado de los sentimientos que por el de la razón. Y, seguramente como la mayoría de los adultos, guardo el recuerdo de alguna de esas situaciones imaginadas por lo que fueron de impactantes en el tierno ser que el niño albergaba.

Fui criado en una familia de cristianos, con sólidos conceptos del deber, de la verdad, de la solidaridad y de la egoísta idea de ser bueno para ganarse el cielo. Había que tener tal o cual comportamiento porque Dios así lo quería. Aquel, el creador de todo, lo de la Tierra y también lo del cielo, se ocupaba de mí, vigilando que no me descarrilara.

Pero un día (debe haber sido a los 6 ó 7 años) intenté imaginar el principio de la existencia: dice Dios “abracadabra” y comienzan a formarse las cosas. No importa el orden de las apariciones; pero era una orden de Dios ... Y sentí un estremecimiento en la columna vertebral, como un cosquilleo en la parte central de la espalda, bien debajo de la piel e incontrolable, cuando me animé a preguntarme: “pero Dios, ¿de dónde salió? ¿Quién lo creó? ¿Cómo fue realmente el principio? ... ¿Y cómo pudo aparecer de la *nada* ? ”

Atribuyo aquel estremecimiento, que se repitió muchas veces en mi niñez al abordar el *viaje* al infinitamente lejano e incomprensible “principio”, simplemente a un proceso que se generaba por la intensidad de la abstracción, por lo novedoso que le resultaba al sistema nervioso enfrentar un dilema. Nada más. No hubo “control externo” (digo, celestial) para que no me animara a meterme en asuntos relativos al génesis.

Desde la adolescencia soy agnóstico y mi vida de varias décadas (ya son muchas, lamentablemente) es una prueba de que se puede ser feliz prescindiendo absolutamente de las cuestiones religiosas. De manera que, libremente, sin prejuicios provenientes de formaciones culturales de este tipo, sigo pensando cada tanto en cómo fueron las cosas en los albores del Universo ... Al menos, de *éste* Universo, el que observamos dificultosamente desde esta casi inapreciable partícula del Cosmos a la que alguna vez bautizamos Tierra.

Recurro frecuentemente a la idea del Big Bang, del Universo constreñido en un punto, una “singularidad”, según las matemáticas y los científicos. Una fracción de segundo en la cual, hace unos 13 700 000 000 de años, se liberó toda la masa y la energía universal generando el espacio y el tiempo ... y las *leyes* que los rigen ... Y en ese estado de abstracción extraño aquel sentimiento medular que por alguna razón bioquímica nunca más apareció; pero disfruto del placer de compartir y apreciar el esfuerzo de miles de pensadores que, ladrillo por ladrillo, a lo largo de los últimos siglos, en base al descubrimiento y al dominio de estas leyes, construyeron y socializaron el conocimiento de *cómo* es la estructura de las galaxias y las estrellas que nos engendraron.

El estudio de estas leyes y su manifestación en la naturaleza o aplicación en la tecnología es el dominio de la física. Entonces, ¿cómo evitar el sentimiento de atracción y afecto hacia la materia prima de todas las ciencias, la argamasa de leyes de las ciencias naturales?

La física investiga, demuestra y dice: “esto es así”. El “*por qué*” las *leyes fundamentales* son así pertenece al territorio de la especulación o de la fe. En todo caso, aquel Big Bang puede que tenga parte de la respuesta ...

.....

Entre las leyes o Principios básicos hasta ahora descubiertos, este texto solo se ocupa de aquellos que tienen que ver con algo de lo que percibimos del mundo, lo que prácticamente responde a la intuición. El electromagnetismo, las omnipresentes ondas, la teoría cuántica, la termodinámica, la teoría general de la relatividad ... se tratarán en otros capítulos de la física, en otros cursos de ingeniería. El campo gravitatorio aquí considerado es insignificante, no estará generado por enormes estrellas o algún agujero negro, y por lo tanto no alcanzará a modificar sustancialmente el *espacio-tiempo*; tampoco será importante la velocidad de las partículas, a la que consideraremos despreciable frente a la de la luz para que las masas puedan ser supuestas constantes. Y no nos meteremos en lugares atómicos: las posiciones de nuestras partículas no sufrirán otras incertezas que las provenientes de los errores impuestos por el instrumento de medida y por el experimentador ... entre otras simplificaciones.

De manera que ... ¡a disfrutar de la posibilidad de predecir el destino de una esfera lanzada girando sobre una mesa, pero a prepararse bien, que luego viene lo mejor! ...

*Roberto Stimler*

# ÍNDICE





## ***CINEMÁTICA de la Partícula***

Concepto de partícula .....	23
Vector posición .....	24
Vector velocidad .....	25
Vector aceleración .....	30

### *Movimientos en la recta y en el plano:*

MRU .....	32
MRUV .....	35
Tiro vertical .....	36
Tiro oblicuo .....	39
Parábola de seguridad .....	45
Posición y desplazamiento angular .....	47
Velocidad angular .....	47
Aceleración angular .....	48
Movimiento circular .....	49
Velocidad tangencial .....	50
Aceleración centrípeta .....	50
MCU .....	51
MCUV .....	54
Circunferencia osculatriz .....	58
Movimientos vistos desde distintos sistemas de referencias .....	60

## ***DINÁMICA de la Partícula***

Masa .....	73
Ímpetu lineal .....	73
Fuerza .....	73
Leyes de Newton .....	73
Sistemas de Unidades de Medida .....	76

### *Aplicación de las Leyes de Newton:*

ejemplos de acción-reacción, peso, plano inclinado, ascensor, .... .... periodo de la Luna, fuerza centrípeta .....	77
Fuerza de roce .....	87
Movimiento rectilíneo armónico simple .....	91
Movimiento curvilíneo armónico simple .....	100
Péndulo ideal .....	101
Sistemas no inerciales - Fuerzas ficticias .....	103

## ***TRABAJO y ENERGÍA de la Partícula***

Trabajo .....	111
Trabajo de las fuerzas de roce, del peso .....	114
Trabajo de la fuerza del resorte .....	115
Fuerzas conservativas .....	116
Clasificación de las fuerzas .....	116
Teorema <i>Trabajo-Energía</i> - Energía cinética .....	117
Potencia .....	125
Energía potencial .....	127

Energía mecánica, conservación de la energía mecánica, ....	
.... casos gravitatorio y elástico .....	129

### **SISTEMAS de PARTÍCULAS**

Ímpetu lineal del sistema - Conservación del ímpetu lineal del sistema .....	141
Centro de masas - Su posición y velocidad .....	143
Aceleración del centro de masas .....	147
Centro de masas de cuerpos rígidos .....	150
Impulso de una fuerza .....	153
Impulso de fuerzas externas al sistema .....	154
Fuerzas impulsivas .....	157
Teorema <i>Trabajo-Energía</i> aplicado a un sistema de partículas .....	160
Colisiones .....	164
Coefficiente de restitución .....	165
Choques unidimensionales elásticos, plásticos, inelásticos .....	165
Caso explosivo .....	169
Choques en dos dimensiones .....	170
Sistemas de masa variable .....	173
Momento de una fuerza respecto de un punto .....	178
Ímpetu angular .....	178
Conservación del ímpetu angular en una partícula .....	179
Conservación del ímpetu angular en un sistema de partículas .....	180

### **CUERPO RÍGIDO**

Definición de CR .....	185
Traslación pura .....	185
Rotación alrededor de un eje fijo .....	186
Momento de inercia .....	186
Cálculos de momentos de inercia para distintos cuerpos .....	187
Teorema de la figura plana .....	191
Teorema de Steiner .....	193
Péndulo físico .....	195
Centro de percusión .....	197
Rototraslación .....	199
Velocidades y aceleraciones de puntos componentes del CR .....	202
Eje instantáneo .....	203
Rodadura .....	203
Energía cinética de un sistema de partículas y del CR en particular .....	213
Energía potencial del CR .....	214
Teorema <i>Trabajo-Energía</i> para el CR .....	214
Trabajo de fuerzas actuantes sobre un CR .....	216
Trabajo de la fuerza de roce .....	216
Rotación en el espacio .....	233
Movimiento de precesión - Giróscopo .....	234
Trompo .....	235
Centro de gravedad .....	237
Sistemas no inerciales .....	237
Fuerza de Coriolis .....	241

## **FLUIDOS IDEALES**

Caracterización de fluidos ideales .....	249
Presión .....	249
Estática de los fluidos - Teorema fundamental .....	250
Principio de Pascal .....	253
Principio de Arquímedes .....	257
Flotación .....	258
Cuerpos sumergidos en fluidos en reposo dentro de recipientes acelerados ...	261
Dinámica de los fluidos .....	264
Flujo estacionario .....	264
Ecuación de continuidad .....	265
Ecuación de Bernoulli .....	265
Aplicaciones .....	267

## **APÉNDICE**

Vectores .....	277
Suma y resta de vectores .....	277
Multiplicación de vectores .....	279
Producto escalar .....	280
Producto vectorial .....	280





# **CINEMÁTICA**

## de la Partícula



Lo que desarrollaremos a continuación no es el contenido de un texto para aprender física. Es sólo un complemento de lo que se puede encontrar en los muy buenos libros que desde la cátedra Física I recomendamos. Figuran en esta propuesta los lineamientos teóricos básicos, la resolución de problemas (con el enunciado de las leyes que han de aplicarse, repetido hasta el cansancio a lo largo del texto, y con el uso de uno o más sistemas de referencias – apropiados o no – a efectos de practicar con los mismos), y el comentario surgido de las dudas que los alumnos manifiestan periódicamente.

En el capítulo de *DINÁMICA de la Partícula* veremos cuestiones relativas a Sistemas de Unidades de Medida. Mientras tanto, y a menos que se aclare lo contrario, usaremos las unidades correspondientes al Sistema Internacional, único “legal” en la Argentina, a través del Si. Me. L. A. .

Seguiremos el orden con el que se dicta la materia porque, entre otras razones, está incorporado a nuestra metodología de enseñanza (nuestra costumbre), y porque parece más lógico comenzar a estudiar lo que le sucede a una partícula que lo que le sucede a muchas de ellas.

## CINEMÁTICA de la Partícula

A propósito, ¿qué es una

*PARTÍCULA* ?

¿Es algo necesariamente pequeño? ¿En qué circunstancias decimos que una persona caminando, o un vehículo, son una partícula? ...

Cuando un móvil (inanimado o no) es pequeño frente al camino que va desandando, y no nos interesa su forma, su color, o si va girando, decimos que es una partícula. El planeta Plutón, visto desde la Tierra y considerado un punto en su eclíptica, es una partícula; un auto, un animal, una piedra, ... , si se mueven y no consideramos sus vibraciones o rotaciones, son partículas.

Aclarado esto, veamos qué le puede suceder a una persona (partícula, por ahora): puede permanecer en un lugar, o moverse.

Para aseverar que sucede una u otra cosa, debemos “referirnos” a algo. Por ejemplo, puedo estar parado, quieto, al lado de una vidriera, mientras que un señor, desde la Luna, me ve en movimiento junto con la vidriera.

Surge entonces la necesidad de definir el lugar desde donde observamos.

*SISTEMA DE REFERENCIAS*

(o “punto de vista”)

Este es un lugar en el que fijaremos *tres ejes perpendiculares entre sí* unidos en un punto -

origen de coordenadas - para señalar, respecto de éste, si está quieta o no la partícula, o cómo se mueve dentro del espacio de tres dimensiones. Los ejes perpendiculares serán dos si nos referimos a partículas ubicadas en un plano, y uno solo si se trata de algo que sólo puede moverse en una dimensión (una recta), con la que haremos coincidir el eje de referencias.

Por ejemplo, si soy “una partícula” que se desplaza entre las calles de la ciudad, bastará con fijar un sistema de referencias “en el plano”, con dos ejes (pueden coincidir con las calles San Martín y La Rioja, por ejemplo), para ubicarme instante a instante. Si estoy en Rivadavia y San Luis, mi ubicación estará dada por el

### VECTOR POSICIÓN ( $\vec{r}$ )

que va de San Martín y La Rioja (origen) a Rivadavia y San Luis. En la práctica decimos que nos encontramos a 100 m de San Martín y a 300 m de La Rioja. Estas serían las “coordenadas”  $x$  e  $y$  del vector posición en cuestión, cuyo módulo (o intensidad) representaremos con  $r$  y mediremos en metros (m).

[ Véase el Apéndice: “Vectores: su adición y sus propiedades”. Y nótese la diferencia en concepto y escritura de *vector* ( $\vec{A}$ ), *vectores componentes* ( $\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z$ ) *componentes ortogonales o coordenadas* ( $A_x, A_y, A_z$ ), y *módulo* ( $A$ ). ]

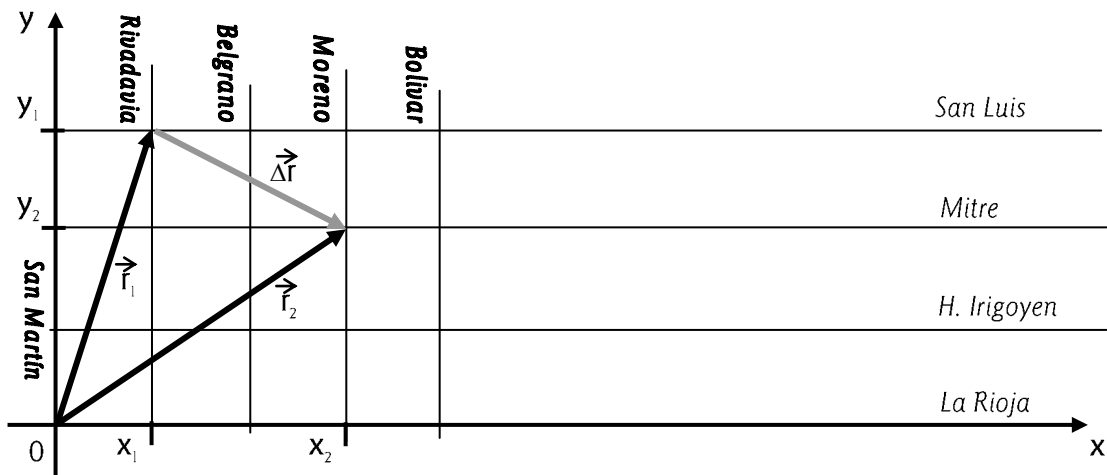
Ahora bien. Estaremos en la esquina mencionada en que nos encontramos, independientemente de que se nos ocurra fijar la posición respecto de San Martín y La Rioja, o respecto de Belgrano y la costa, por ejemplo. Pero si tomamos esta última referencia, el vector posición será otro; mi sistema de referencias será distinto. Podré contar el cuento de otra manera, pero lo real es que me encuentro en Rivadavia y San Luis. No obstante, para poder entender sin confusiones cómo es mi marcha, cómo es mi *trayectoria* (el camino *real* desandado) fijo cualquier sistema de referencias, pero luego lo respeto y no lo cambio. En el ejemplo, seguirá siendo el de las calles S. Martín y La Rioja.

Si unos segundos después me encuentran en Mitre y Moreno, mi posición estará dada por otro vector posición, que también arranca en San Martín y La Rioja. La resta entre este vector posición ( $\vec{r}_2$ ) y el que correspondía a mi ubicación anterior ( $\vec{r}_1$ ) es el

### DESPLAZAMIENTO ( $\Delta\vec{r}$ )

definido como:  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , que es también un vector.

Nótese la diferencia entre la definición de “desplazamiento” y la de “trayectoria” : solo en algunos casos coinciden el segmento del desplazamiento y la trayectoria. Mientras que el *desplazamiento* es un vector (véase el gráfico siguiente), la *trayectoria* es el camino recorrido (pude haber caminado por San Luis hasta Moreno y luego por ésta hasta Mitre, o haber logrado el mismo desplazamiento caminando por otras calles). Por otra parte, en lo sucesivo usaremos la letra  $\Delta$  para hablar de “variación” de la magnitud física representada por la letra que le sigue a “ $\Delta$ ”. En este caso hay una “variación de posición” dada por la resta entre el vector posición “posterior” ( $\vec{r}_2$ ) y el vector posición “anterior” ( $\vec{r}_1$ ).



$$\vec{r}_1(x_1, y_1) ; \vec{r}_2(x_2, y_2) ; \Delta\vec{r}(\Delta x, \Delta y)$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta x = x_2 - x_1 \quad ; \quad \Delta y = y_2 - y_1$$

Ahora, mi cambio de posición desde Rivadavia y San Luis a Moreno y Mitre, caminando o no en zigzag, pude haberlo realizado en unos segundos o en varios minutos, y hasta en horas. Esto obliga a definir otra magnitud física que llamamos

VELOCIDAD MEDIA

Por definición:

$$\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$$

es el cociente entre el desplazamiento  $\Delta\vec{r}$  y el tiempo  $\Delta t$  en el que aquel se produjo.

Así definida, la velocidad media es un vector, resultado del cociente entre un vector (el desplazamiento) y un escalar (el tiempo). De manera que nada tiene que ver con la “velocidad media o promedio” de la que hablamos al comentar carreras de autos, por ejemplo, que tiene en cuenta la trayectoria, el camino real de la partícula (que no es un vector). Piensa en cuál es el desplazamiento de un auto desde que arranca hasta que vuelve a pasar por el mismo lugar en la próxima vuelta, y luego remítete a la definición que hemos dado.

Pero, si en vez de preocuparnos por la velocidad media de la partícula correspondiente a un movimiento de 2 minutos, o a otro de 10 segundos, o a un tercero de una centésima de segundo, nos interesa la velocidad correspondiente exactamente al instante 9.38 hs., p. ej., en el que la partícula pasa por determinado punto (es decir, a un movimiento durante un “infinitesimalmente” pequeño intervalo de tiempo en torno a esa hora), debemos hacer tender  $\Delta t$  a *cero* en la definición de  $\vec{v}_m$ . Se obtiene entonces la

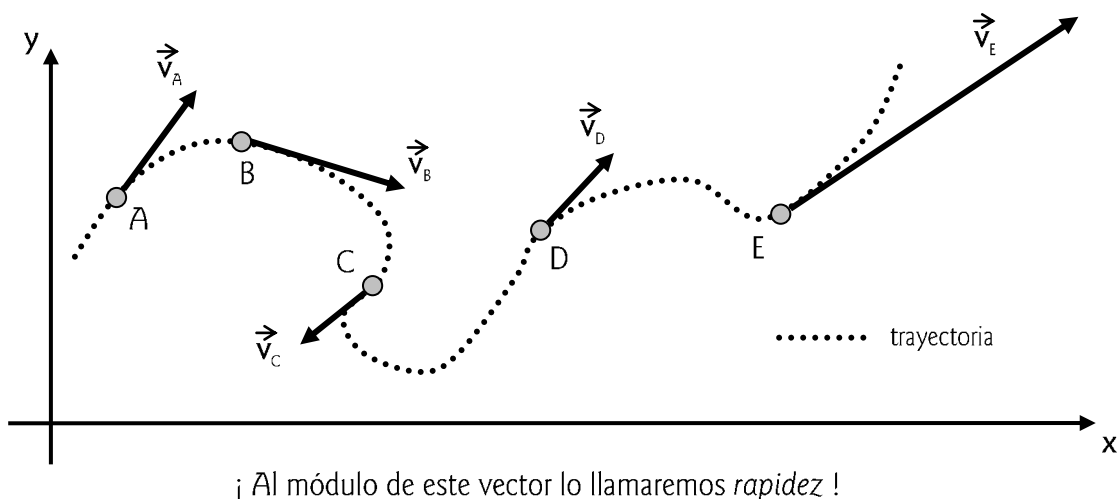
VELOCIDAD INSTANTÁNEA ( $\vec{v}$ )

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta\vec{r}/\Delta t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

que es un vector tangente a la trayectoria en el punto por el que pasa la partícula en el instante



considerado:



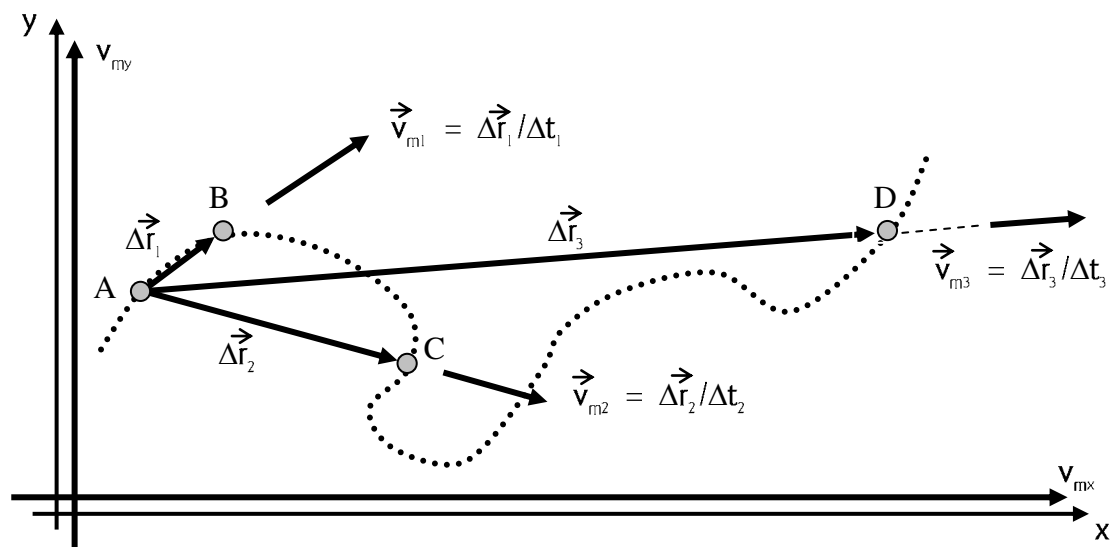
La unidad de medida de la rapidez (y del módulo de la velocidad media) se obtiene del cociente entre las unidades de medida del módulo del desplazamiento y del tiempo:

$$[v] = [\Delta r] / [t] = \text{m/s}$$

Y la *rapidez*, la que vulgarmente llamamos simplemente *velocidad*, puede tener valores pequeños hasta enormemente grandes dado que se obtiene de un cociente incremental: si bien el "incremento" de tiempo debe tender a "cero", durante ese intervalo el desplazamiento puede adquirir valores enormes. Piénsese que la luz tiene una rapidez de unos ¡ 300 000 km/s !

Demostración de que  $\vec{v}$  es tangente a la trayectoria:

Observa que, en general, el vector "desplazamiento" corta a la trayectoria en dos o más puntos. (Es decir, el vector "velocidad media" también la corta en esos dos o más puntos.). Y que a medida que nos interesamos por una velocidad media correspondiente a movimientos durante tiempos cada vez más cortos, el vector  $\vec{v}_m$ , por lo general secante a la curva "trayectoria", tiende a confundirse con la misma; pasa a ser *tangente* cuando se transforma en *velocidad instantánea* (cuando el  $\Delta t$  tiende a cero) :



En la figura podemos observar cómo la velocidad media correspondiente al intervalo A-B puede ser mayor que la velocidad media del intervalo A-D, independientemente de que  $\Delta t_1 < \Delta t_3$  o que  $|\Delta \vec{r}_3| > |\Delta \vec{r}_1|$ . Y cómo  $\Delta \vec{r}_1$  se transforma en  $d\vec{r}_1$  tangente a la trayectoria, cuando  $\Delta t \Rightarrow 0$ .

- $\Delta t_1$  es el tiempo que tardó la partícula para ir de A a B por la trayectoria indicada.
- $\Delta t_2$  es el tiempo que tardó la partícula para ir de A a C por la trayectoria indicada.
- $\Delta t_3$  es el tiempo que tardó la partícula para ir de A a D por la trayectoria indicada.

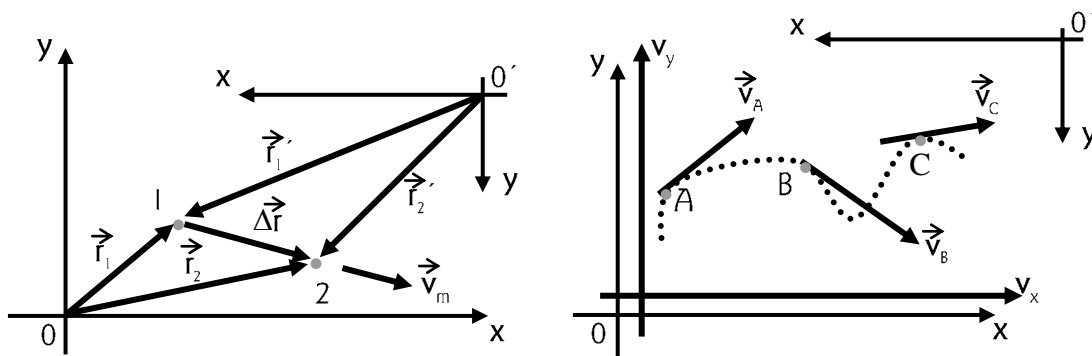
Si la trayectoria es una curva en el espacio, el vector velocidad será un vector en el espacio, con componentes  $v_x, v_y, v_z$ . Cada componente de  $\vec{v}$  es una derivada de la componente respectiva de la posición:

$$v_x = dx/dt \quad ; \quad v_y = dy/dt \quad ; \quad v_z = dz/dt$$

Por ejemplo, en la figura de la página anterior,  $\vec{v}_A$  representa la velocidad instantánea de la partícula cuando pasa por el punto A. Se calcula:  $\vec{v}_A = d\vec{r}/dt|_A$ . Y, si se trata de un movimiento en el plano, como indica la figura, esta velocidad tiene las componentes:

$$v_{Ax} = dx/dt|_A \quad \quad \quad v_{Ay} = dy/dt|_A$$

Por otra parte, nótese en los gráficos siguientes cómo la *posición* depende del sistema de referencias adoptado ( $y - x$  o  $y' - x'$ ), mientras que el *desplazamiento*, la *velocidad media* y la *velocidad instantánea* no son dependientes de éste. Analiza la cuestión y deduce a qué se debe ...



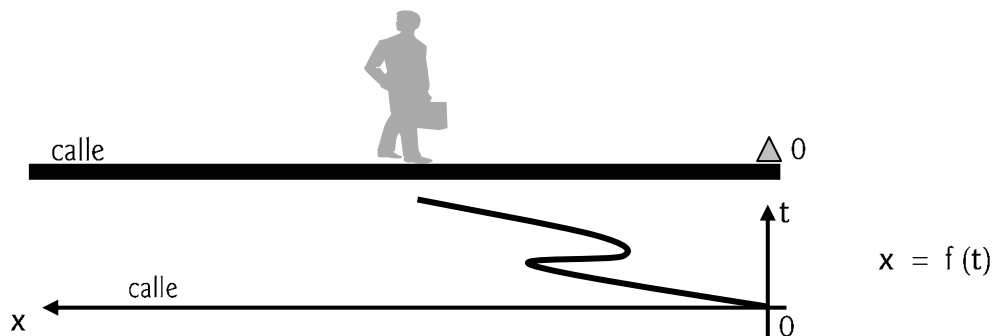
A medida que la partícula se mueve, va cambiando el vector posición y se obtienen distintas lecturas de su proyección sobre los ejes  $x, y, z$ . Es decir, varían las coordenadas  $x, y, z$  con el transcurrir del tiempo. Podemos escribir:

$$x = f(t) \quad , \quad y = f(t) \quad , \quad z = f(t)$$

A estas funciones las llamamos *ecuaciones horarias*, cuyas representaciones gráficas son los

### GRÁFICOS HORARIOS

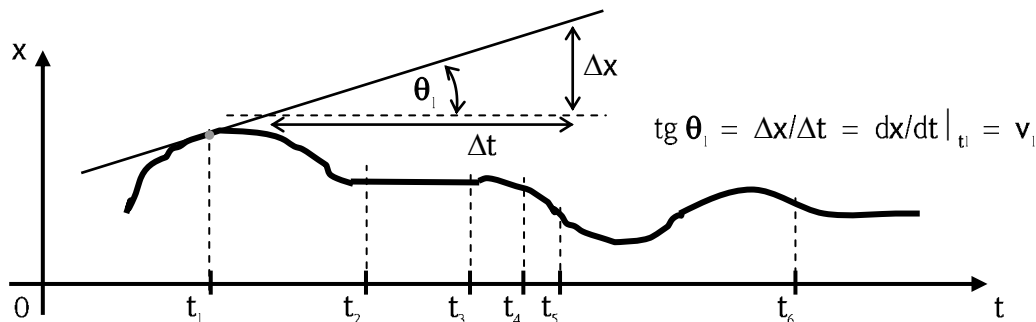
En general, la partícula puede moverse de infinitas maneras. Si camino por una calle mirando vidrieras, por ejemplo, puedo detenerme, volver para atrás, detenerme de nuevo y regresar con velocidades crecientes. Este movimiento sobre la recta (una calle) sería algo así:



Si camino serpenteando las calles, serán dos los gráficos horarios:

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = f(t)$$

Para simplificar, sigamos analizando el movimiento sobre una recta a la que, como decíamos, haremos coincidir el eje de referencias  $x$  (a veces  $y$  o  $z$ ). Si en un punto del gráfico horario trazamos una tangente, la *pendiente* de esa tangente determinará la velocidad de la partícula correspondiente a ese instante. En el ejemplo siguiente,  $v_1$  corresponde al instante  $t_1$ :



Observando el gráfico aseguramos que en el intervalo entre  $t_2$  y  $t_3$  la velocidad es CERO. (¿Podrías asegurarlo, también? ... ¿Por qué?). Y vemos que, para el sistema de referencias adoptado, en  $t_4$  y  $t_5$  las velocidades instantáneas son negativas. Por otra parte, ¿cómo es la  $v_m$  entre  $t_1$  y  $t_3$ ? ..... ¿Y entre  $t_5$  y  $t_6$ ?

### Ejemplo 1

Un móvil se mueve sobre una recta. Haciendo coincidir el eje  $x$  con la trayectoria, y fijando el **cero** de coordenadas, se comprueba que la posición del móvil para cada instante responde a la ecuación horaria:

$$x = t^2 - 3t + 3 \quad [ \text{Con } x \text{ en metros (m) y } t \text{ en segundos (s)} ]$$

[ ¡ *Cuidado* con esta expresión ! : no es que “metros” sea igual a “segundos” + 3 . Sería como decir que 2 litros + 3 metros equivalen a 5 semanas. ¡Un disparate! Lo que sucede es que aquí se entiende que los coeficientes de  $t$  (“1” y “- 3”) tienen una dimensión tal que, con la del tiempo, completan un término que se expresa en metros. ]

- Hallar la ecuación de  $v = f(t)$  .
- Calcular  $v$  para el instante  $t = 1 \text{ s}$  , y representar el vector  $\vec{v}$  sobre la trayectoria .
- Dibujar los gráficos horarios de  $v = f(t)$  y de  $x = f(t)$  .

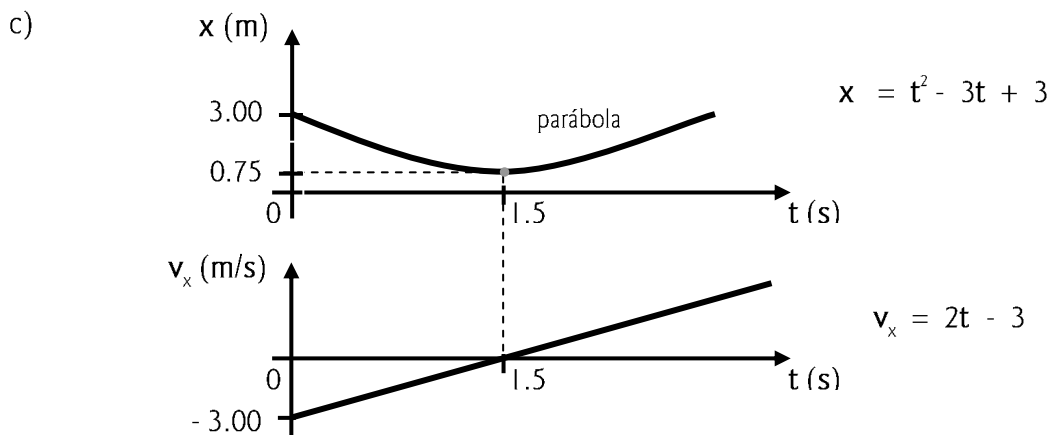
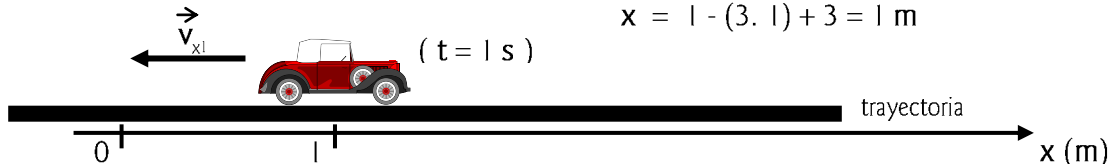
Solución:

a) Dado que  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ , y que, en este caso  $\vec{r} = \vec{x}$ , resulta:

$$\boxed{v = v_x = dx/dt = 2t - 3}$$

b) En  $t = 1 \text{ s}$   $\Rightarrow$   $\boxed{v_{x1} = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \text{ m/s}}$

$$x = 1 - (3 \cdot 1) + 3 = 1 \text{ m}$$



Volvamos al movimiento en dos dimensiones.

**Ejemplo 2**

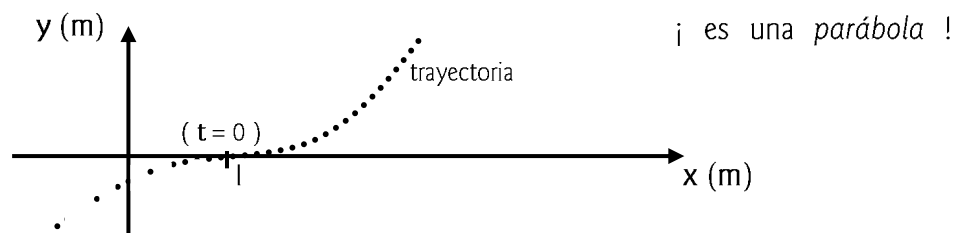
Una partícula se mueve en el plano según las ecuaciones horarias:

$$x = t + 1 ; y = t^3 \quad (\text{s, m})$$

- a) Hallar la ecuación de la trayectoria y representarla gráficamente.
- b) Calcular la posición y la velocidad para el instante  $t = 1 \text{ s}$ , y dibujar los respectivos vectores en el gráfico de la trayectoria.

Solución:

a) De  $x = f(t) \Rightarrow t = x - 1 \therefore \boxed{y = t^3 = (x - 1)^3}$



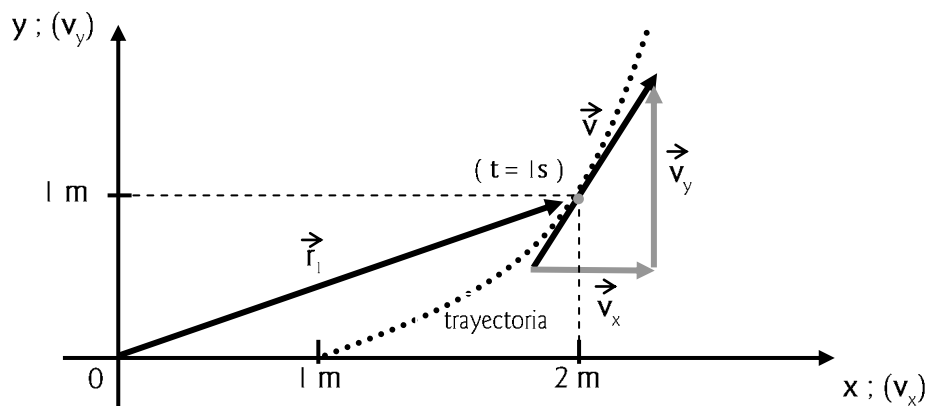
b) De los datos  $x = t + 1$  ;  $y = t^3$  , para  $t = 1$  s :

$$x = 1 + 1 = 2 \text{ m} \quad ; \quad v_x = dx/dt = 1$$

$$v_x = 1 \text{ m/s} \quad , \quad \text{¡ para cualquier instante !}$$

$$y = (1)^3 = 1 \text{ m} \quad ; \quad v_y = dy/dt = 3 t^2$$

$$v_y = 3 \text{ m/s} \quad , \quad \text{¡ sólo para } t = 1 \text{ s !}$$



Así como el “cambio de posición” engendró la definición de “desplazamiento”, y éste la de “velocidad media”, el pasaje de una velocidad instantánea a otra en un tiempo  $\Delta t$  impone la *definición* de otra magnitud física:

ACELERACIÓN MEDIA ( $\vec{a}_m$ )

$$\vec{a}_m = \Delta \vec{v} / \Delta t$$

en donde:  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$  es el *cambio de velocidad* de  $\vec{v}_1$  a  $\vec{v}_2$  .

Surge inmediatamente, por analogía al análisis realizado al estudiar “velocidad”, el concepto de

ACELERACIÓN INSTANTÁNEA ( $\vec{a}$ )

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{x}/dt^2$$

para referirnos a la aceleración que tiene la partícula precisamente en el instante en que pasa por determinado punto.

Aquí es importante resaltar que  $\vec{a}$  es una magnitud vectorial que se obtiene debido a la existencia de un “cambio de velocidad”, que es un vector. De manera que, si marchamos en un auto cuyo velocímetro está “clavado” en 80 km/h, por ejemplo, sobre una ruta curva de 50 m de radio, ¡estamos acelerados, aunque nuestro pie no se mueva del pedal del acelerador del vehículo! Nuestro velocímetro mide la “rapidez”  $v$  , no la velocidad  $\vec{v}$  .

De:  $\vec{a} = d\vec{v}/dt \Rightarrow a_x = dv_x/dt ; a_y = dv_y/dt ; a_z = dv_z/dt$

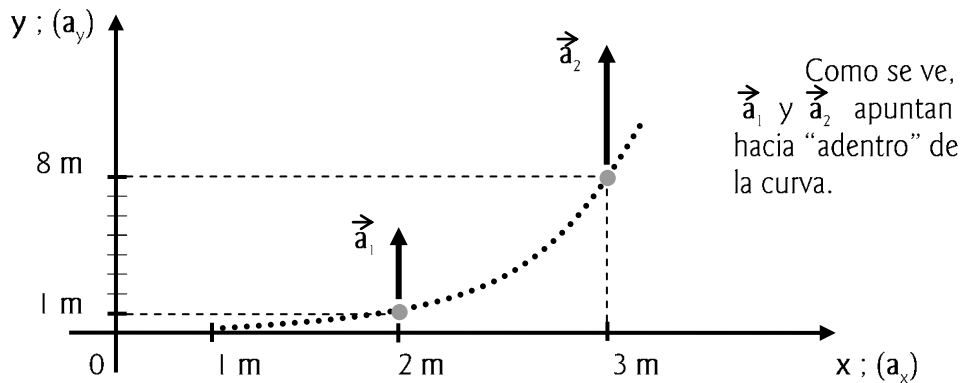
También es importante que verifiques, haciendo dibujitos sobre una trayectoria curva cualquiera, y considerando velocidades crecientes o decrecientes, que el vector aceleración siempre apunta hacia la parte cóncava de la curva (hacia su "interior"). Esto es consecuencia de la/s fuerza/s que actúa/n sobre la partícula, como veremos en *DINÁMICA de la Partícula*.

La unidad de medida de la aceleración se obtiene del cociente de las unidades de medida de velocidad y de tiempo:  $[a] = [v] / [t] = m/s / s = m/s^2$ .

**Ejemplo 3**

Calcular la aceleración que la partícula del *Ejemplo 2* tiene en los instantes  $t = 1 s$  y  $t = 2 s$ , y dibujar los respectivos vectores sobre la trayectoria.

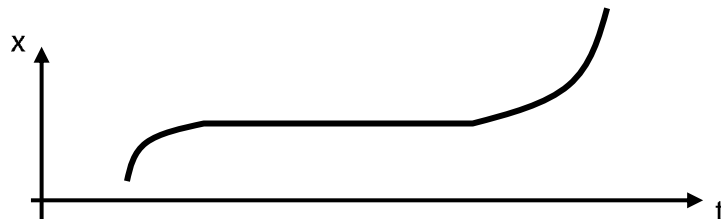
Solución:



$$\vec{a} = d\vec{v} / dt \Rightarrow \begin{aligned} a_x &= dv_x/dt = 0 \\ a_y &= dv_y/dt = 6t = a \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a_{y1} &= a_1 = 6 m/s^2 \\ a_{y2} &= a_2 = 12 m/s^2 \end{aligned}$$

**Ejemplo 4**

De la observación del siguiente gráfico  $x = f(t)$ :

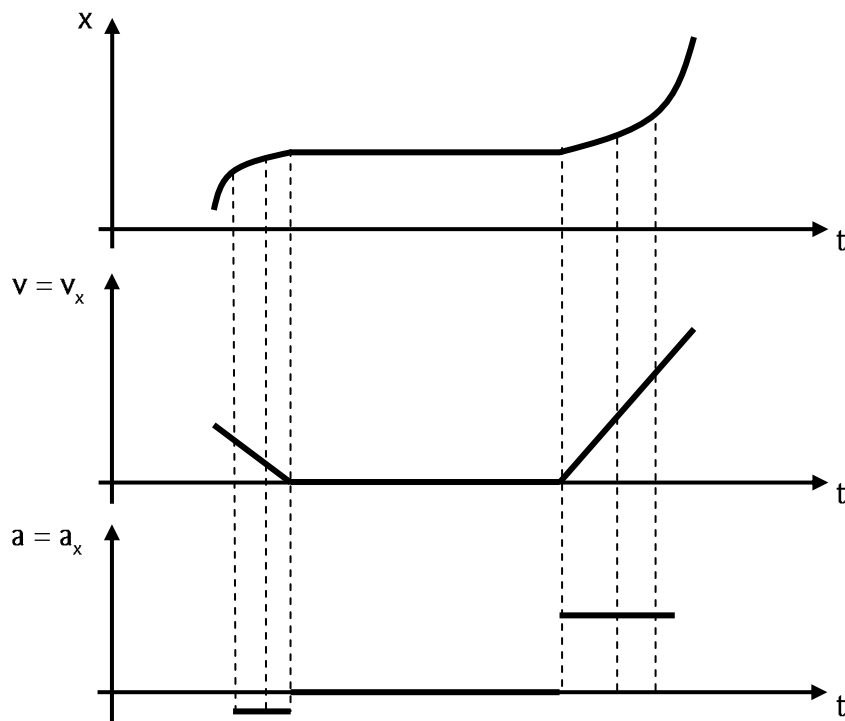


dibujar el correspondiente a:  $a = f(t)$ .

Solución:

A partir de  $x = f(t)$  conviene pasar por el gráfico  $v = f(t)$ . Recordando que  $v_x = dx/dt$

“trazamos” tangentes imaginarias en distintos puntos de la curva  $x = f(t)$ , las que nos dirán si la velocidad correspondiente a esos instantes es positiva o negativa, y si es mayor o menor que la del instante siguiente. Si la pendiente de la tangente es cero, por ejemplo, significa que la velocidad es cero en ese instante. Una vez obtenida la curva  $v = f(t)$ , repetimos los análisis a través de las tangentes, ya que  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ , como se recordará.



Los tramos en que la curva de  $v = f(t)$  es un segmento de recta oblicuo, corresponden a las curvas de  $x = f(t)$  que supusimos parábolas de 2º grado. Los escalones en el gráfico  $a = f(t)$  obedecen a los cambios de pendiente de la velocidad; ellos son posibles porque la aceleración está vinculada a fuerzas que pueden aparecer o desaparecer “instantáneamente”. (Cuidado con este concepto. Ver *DINÁMICA de la Partícula*). El gráfico  $v = f(t)$ , en cambio, no admite esas discontinuidades. (¿Por qué?).

.....

Si nos dan un solo gráfico (o una ecuación) de posición en función del tiempo [ por ejemplo:  $y = f(t)$  ], está claro que la partícula describe un movimiento rectilíneo. Si se desplazara por el plano, deberían darnos dos gráficos (ecuaciones):  $y = f(t)$  y  $x = f(t)$ . Y si el movimiento fuera en el espacio de tres dimensiones, sería necesario conocer la variación temporal de las coordenadas  $x$ ,  $y$ , y  $z$  del vector posición.

En lo que sigue, y al sólo efecto de simplificar los gráficos y reducir el número de ecuaciones, seguiremos estudiando movimientos sobre la recta y el plano. Así, un viaje a Bs. As. será un movimiento en dos dimensiones (plano), despreciando las “lomas” de la carretera. Estudiaremos casos particulares, comenzando por el más sencillo.

*MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU)*

Como su nombre lo indica, se trata del movimiento de una partícula que se mueve sobre una recta de manera “uniforme”. Su velocidad es constante.

Fijamos un sistema de referencias sobre la misma recta (eje  $x$ ), asignando el cero de coordenadas a cualquier punto, y el sentido de los números crecientes a cualquiera de los dos posibles. De esta manera los vectores *posición*, *velocidad* y *aceleración*, serán colineales con la recta. El vector posición coincidirá con su "proyección", por lo que seguiremos hablando de "componentes", para prescindir de la flechita que identifica a los vectores.

Si  $\vec{v} = \text{cte.}$  ( $v = v_0$ ), la aceleración es CERO. Y, siendo  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ , aquí escribiremos  $v = v_x = dx/dt = v_0$ .

Se deduce que  $x$  debe responder a la ecuación:  $x = v_0 \cdot t + \text{cte.}$ , ya que su derivada respecto del tiempo es  $v_0$  ( $v$ , en lo sucesivo). A la constante, medida también en metros, la llamaremos  $x_0$ ; es la posición que tiene la partícula cuando se pone en marcha el reloj para analizar el movimiento ( $t = t_0 = 0$ ).

Así, con  $x = \pm v \cdot t \pm x_0$  resolvemos cualquier problema de MRU.

Esta ecuación horaria dice que el gráfico horario es también una recta, a la que no debemos confundir con la trayectoria. Por otra parte, los signos "+" o "--" delante de cada término dependen del sistema de referencias adoptado.

### Ejemplo 5

Un móvil marcha sobre una recta con  $v = \text{cte.} = 15 \text{ m/s}$ . A partir de  $t_0 = 0$ , calcular su posición a los 10 s, para dos sistemas de referencia distintos, como se señala en las figuras de los incisos a) y b). Dibujar los respectivos gráficos horarios.

a) En  $t_0 = 0$ :



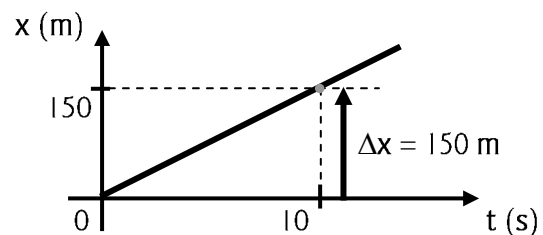
Solución:

Por ser MRU:  $x = \pm v \cdot t \pm x_0$

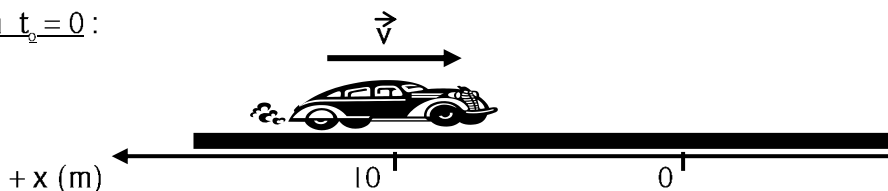
Para el sistema de referencias impuesto:

$$x = (+15 \text{ m/s}) \cdot 10 \text{ s} + 0 = 150 \text{ m}$$

$$\Delta x = x - x_0 = +150 - 0 = +150 \text{ m}$$



b) En  $t_0 = 0$ :



Solución:

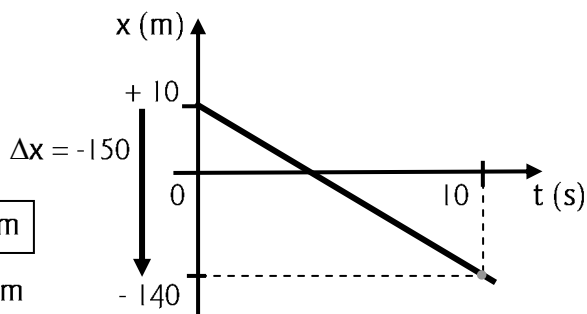
Por ser MRU:  $x = \pm v \cdot t \pm x_0$



Para el sistema de referencias impuesto:

$$\boxed{x = (-15 \text{ m/s}) \cdot 10 \text{ s} + 10 \text{ m} = -140 \text{ m}}$$

$$\Delta x = x - x_0 = -140 - (+10) = -150 \text{ m}$$

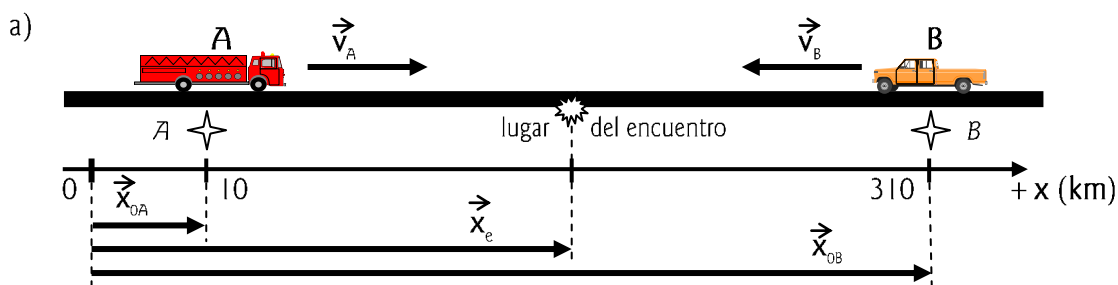


Observa que las posiciones para cada sistema de referencias son distintas; son distintos los “nombres” que se asignan a cada lugar. Pero el módulo del desplazamiento, el *hecho real*, es el mismo: 150 m .

### Ejemplo 6

Dos móviles se desplazan con  $\vec{v} = \text{cte.}$  sobre una misma recta, en sentidos contrarios. El móvil B , a 80 km/h , pasa por el punto B 30 minutos después que el móvil A pasa por A marchando a 90 km/h . Entre A y B existe una distancia de 300 km .

Hallar la posición y el instante en que se produce el encuentro de los móviles, dibujando los gráficos horarios respectivos, usando dos sistemas de referencias distintos: a) y b) .

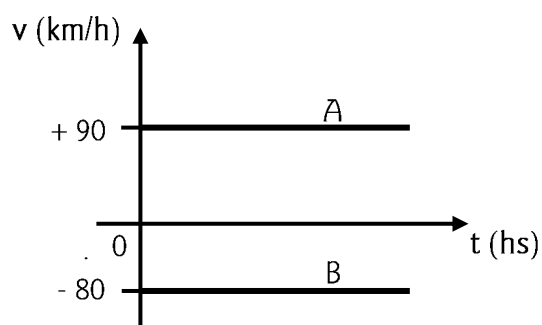
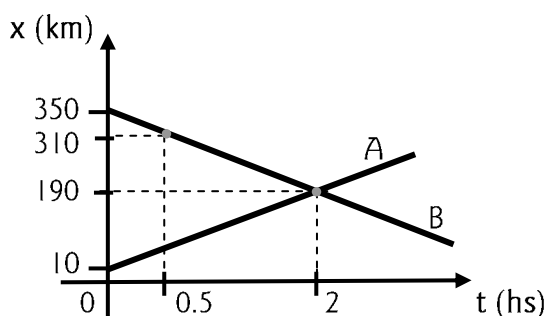


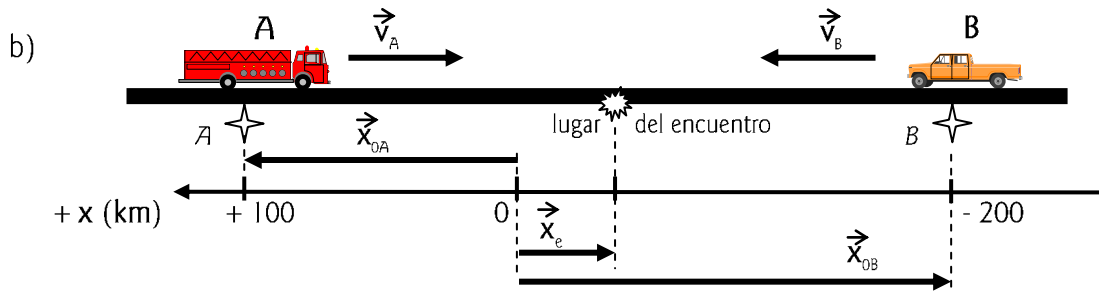
Solución:

Móvil A :  $x_A = \pm v_A \cdot t \pm x_{0A} \iff x_A = (+90 \text{ km/h}) \cdot t + 10 \text{ km}$

Móvil B :  $x_B = \pm v_B \cdot t \pm x_{0B} \iff x_B = (-80 \text{ km/h}) \cdot (t - 0.5 \text{ h}) + 310 \text{ km}$

En el instante del encuentro, los móviles tienen la misma posición:  $x_e$  . Luego, igualando las ecuaciones, resulta:  $t = 2 \text{ hs.}$ , con lo que la posición del encuentro, *para el sistema de referencias adoptado*, es :  $x_e = 190 \text{ km}$  .





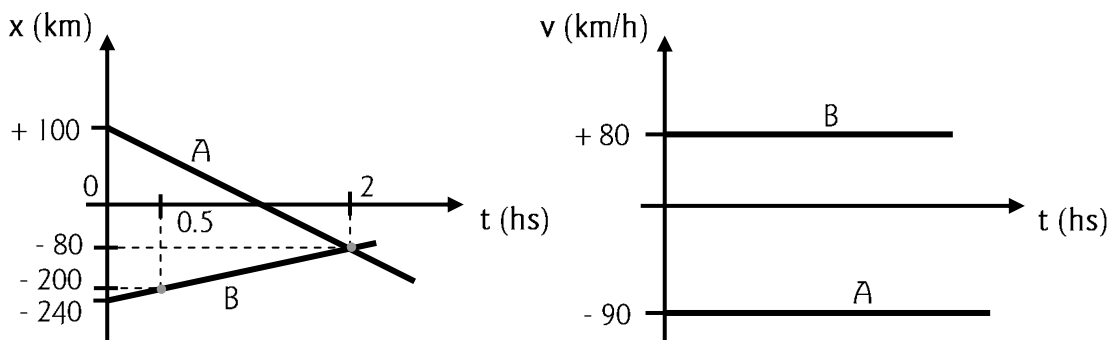
Solución:

Móvil A :  $x_A = \pm v_A \cdot t \pm x_{oA} \Rightarrow x_A = (-90 \text{ km/h}) \cdot t + 100 \text{ km}$

Móvil B :  $x_B = \pm v_B \cdot t \pm x_{oB} \Rightarrow x_B = (+80 \text{ km/h}) \cdot (t - 0.5 \text{ h}) - 200 \text{ km}$

En el instante del encuentro, los móviles tienen la misma posición:  $x_e$ . Luego, igualando las ecuaciones, resulta:  $t = 2 \text{ hs.}$ , con lo que la posición del encuentro, *para el sistema de referencias adoptado*, es:  $x_e = -80 \text{ km}$ .

*¡ Comparar los gráficos horarios !*



Obsérvese que los móviles se encuentran en el mismo lugar del camino, señalado con en las figuras. Pero ese lugar natural, físico, tiene distintas “denominaciones” (o posiciones  $x_e$ ) para los distintos sistemas de referencias.

.....

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (MRUV)

Aquí la velocidad varía con el tiempo, pero de una manera “uniforme”: la aceleración es constante ( $\vec{a} = \text{cte.}$ ).

Si  $\vec{a} = \text{cte.}$  ( $a = a_o$ ), teniendo en cuenta que  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ , se deduce que  $v$  debe responder a la ecuación  $v = a \cdot t + k$ , ya que su derivada respecto del tiempo es  $a_o$  ( $a$ , en lo sucesivo). A la constante  $k$ , medida también en  $\text{m/s}$ , la llamaremos  $v_o$ ; es la rapidez que tiene la partícula cuando se pone en marcha el reloj para analizar el movimiento ( $t = t_o = 0$ ).

Partiendo ahora de  $v = a \cdot t + v_o$ , se deduce que la posición  $x$  en el MRU debe responder a la ecuación:

$$x = + \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v \cdot t + k_1$$

ya que  $v = dx/dt$ . La constante  $k_1$  será llamada  $x_0$ , y es la posición que tiene la partícula en el instante  $t = t_0 = 0$ .

Recordando la expresión  $x = f(t)$  del MRUV, podemos resolver todos los casos de este movimiento y del MRU, si tenemos en cuenta que el movimiento rectilíneo uniforme es aquel en el que  $v = \text{cte.}$ , lo que implica  $a = 0$ .

Es oportuno mencionar aquí algunos errores que suelen cometerse al memorizar las ecuaciones. Por ejemplo, a veces se omite el exponente “2” del factor tiempo y se avanza en los cálculos sin considerar las dimensiones de cada término. Es evidente que  $a \cdot t$  ( $\text{m/s}^2 \cdot \text{s}$ ) no es lo mismo que  $a \cdot t^2$  [ $(\text{m/s}^2) \cdot \text{s}^2 = \text{m}$ ]. Es bueno aprehender la técnica de supervisar las dimensiones de los términos que se suman o restan en cualquier ecuación, para tener la certeza de que se está operando con unidades de medida coherentes.

Por otra parte, las ecuaciones no son “fórmulas”, entendiendo por éstas a las expresiones que se aplican taxativamente. Cada ecuación de las vistas hasta ahora tiene la “elasticidad” proveniente del hecho de que sus términos tienen el signo que se desprende de la aplicación de los sistemas de referencias, como vimos en el MRU. En realidad, deberíamos escribir:

$$x = \pm x_0 \pm v \cdot t \pm \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$v = \pm v_0 \pm a \cdot t$$

Es por ello que, si marchamos “apurándonos”, si nuestra rapidez es creciente, el signo de la aceleración puede ser positivo o negativo. También, si nos “frenamos”, si marchamos disminuyendo la velocidad (rapidez), el signo de la aceleración (la que suele llamarse “desaceleración” en estos casos) también puede ser positivo o negativo, de acuerdo al sistema de referencias adoptado. Al movimiento en el que el módulo de la velocidad disminuye ( $v \downarrow$ ), se lo llama a veces “retardado”.

$$\text{El signo de } \vec{a} \text{ es el signo de } d\vec{v}$$

Si la partícula se mueve sobre la recta y la rapidez aumenta,  $d\vec{v}$  tendrá el signo de la velocidad ( $d\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ ); si el móvil avanza en el sentido de las posiciones crecientes, será:  $v > 0$ ;  $dv > 0$ ;  $a > 0$ . Pero si la rapidez aumenta y la partícula marcha en el sentido de las posiciones decrecientes, (en “contramano”), entonces la aceleración será negativa. Verificalo con “flechitas” que representen a velocidades crecientes o decrecientes en distintos lugares sobre la recta (semirrecta de números positivos o semirrecta de números negativos).

Por razones que justificaremos en *DINÁMICA* ..., un tiro vertical bajo determinadas condiciones es un MRUV, con  $\vec{a} = \vec{g}$ . Es decir, si en ausencia de aire y relativamente a baja altura respecto de la superficie de la Tierra lanzamos cualquier cuerpo hacia arriba o hacia abajo sobre la vertical, su aceleración será siempre la misma y valdrá  $\vec{g}$ . Esta es la aceleración de la gravedad, debida a la atracción mutua entre el planeta Tierra y el cuerpo en cuestión; varía en función de la distancia entre ambos, como se verá más adelante, aunque en este capítulo se supondrá constante, de módulo  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ . (En ocasiones, para simplificar los cálculos, diremos que  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

### Ejemplo 7

Desde una plataforma ubicada a 200 m del suelo, se lanza verticalmente hacia arriba una partícula a una rapidez de 10 m/s. Demostrar que, independientemente de los sistemas de

referencias adoptados, “fijos” a tierra en este caso, la partícula tendrá velocidad  $v = 0$  al cabo de 1 s de vuelo cuando se encuentre a 5 m por arriba de la plataforma, y una rapidez de 50 m/s a los 6 s de vuelo, cuando se encuentre a 80 m del suelo. Dibujar en cada caso los respectivos gráficos de  $y = f(t)$  y  $v = f(t)$ .

Solución:

Por ser MRUV:

$$y = \pm y_0 \pm v_0 \cdot t \pm \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$v = \pm v_0 \pm a \cdot t$$

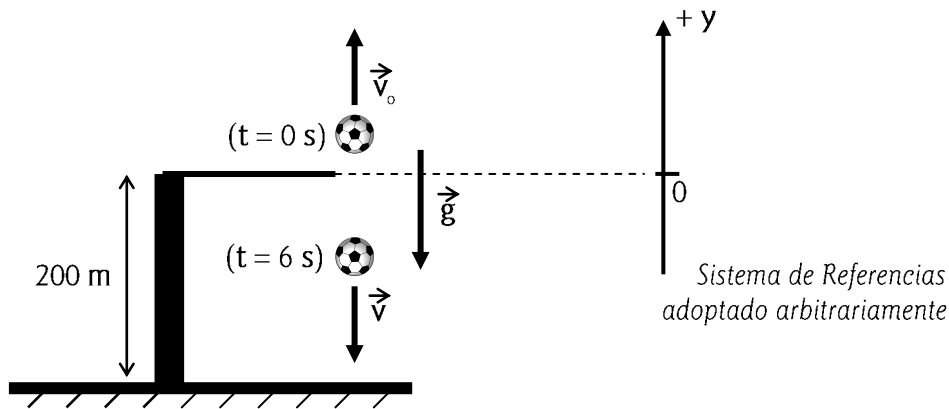
En el caso particular de lanzamiento vertical, siendo  $\vec{a} = \vec{g}$ , quedan las ecuaciones:

$$y = \pm y_0 \pm v_0 \cdot t \pm \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$v = \pm v_0 \pm g \cdot t$$

en las que consideramos a  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

a)



De acuerdo a este sistema de referencias adoptado:  $g < 0$  ;  $v_0 > 0$  ;  $y_0 = 0$ . Queda:

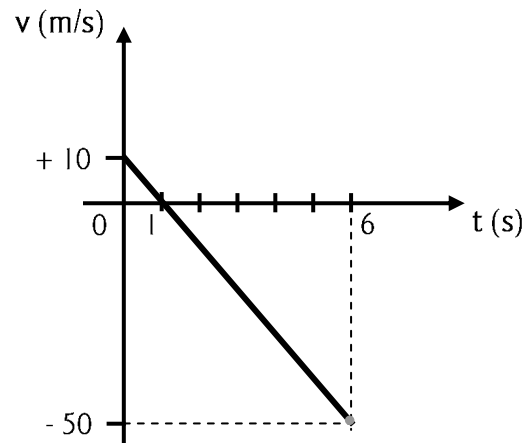
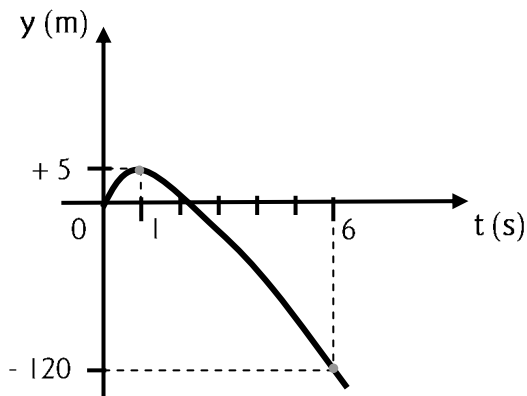
$$y = 0 + 10 \cdot t + \frac{1}{2} (-10) \cdot t^2 \quad (\text{m, m/s, s, m/s}^2) \quad ; \quad v = + 10 - 10 \cdot t \quad (\text{m/s, m/s}^2, \text{s})$$

Para  $t = 1 \text{ s}$ :

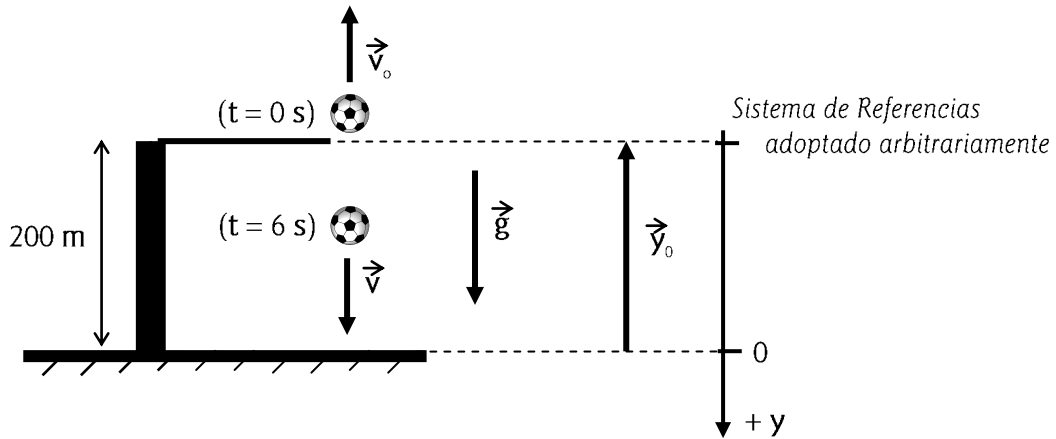
$$y_1 = + 10 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = + 5 \text{ m} \quad ; \quad \boxed{v_1 = + 10 - 10 \cdot 1 = 0 \text{ m/s}}$$

Para  $t = 6 \text{ s}$ :

$$y_6 = + 10 \cdot 6 - 5 \cdot 6^2 = - 120 \text{ m} \quad ; \quad \boxed{v_6 = + 10 - 10 \cdot 6 = - 50 \text{ m/s}}$$



b)



De acuerdo a este sistema de referencias adoptado:  $g > 0$  ;  $v_0 < 0$  ;  $y_0 = -200 \text{ m}$  . Queda:

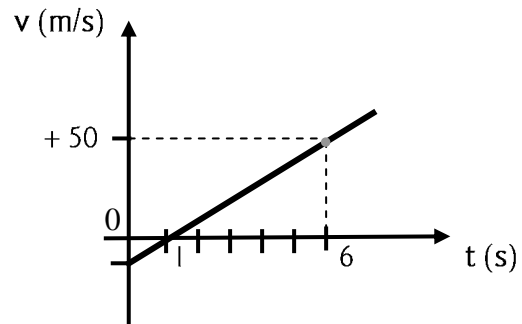
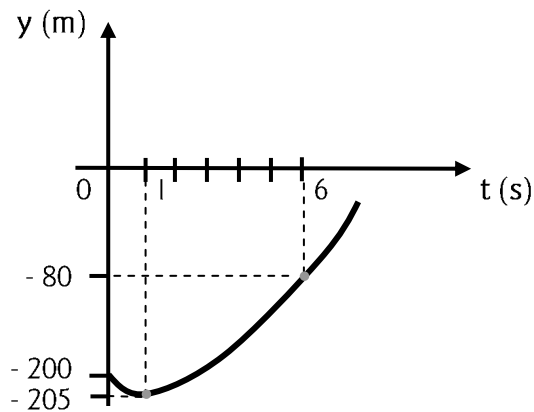
$$y = -200 - 10 \cdot t + 5 \cdot t^2 \quad ; \quad v = -10 + 10 \cdot t$$

Para  $t = 1 \text{ s}$  :  $y_1 = -200 - 10 \cdot 1 + 5 \cdot 1^2 = -205 \text{ m}$

$$\boxed{v_1 = -10 + 10 \cdot 1 = 0 \text{ m/s}}$$

Para  $t = 6 \text{ s}$  :  $y_6 = -200 - 10 \cdot 6 + 5 \cdot 6^2 = -80 \text{ m}$

$$\boxed{v_6 = -10 + 10 \cdot 6 = +50 \text{ m/s}}$$



### Ejemplo 8

Demostrar que la altura máxima a la que puede ascender una partícula lanzada verticalmente hacia arriba es función del cuadrado de su velocidad inicial, y que el tiempo de vuelo depende linealmente de ésta.

Solución:

La altura máxima ( $h_{\text{máx}}$ ) es la que corresponde al instante en el que el cuerpo se detiene, para

luego comenzar a descender. Si suponemos que el eje de referencia es positivo hacia arriba, y que el “cero” de este sistema está en la base de lanzamiento, se puede escribir:

$$y = 0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad v = v_0 - g \cdot t$$

En la posición en que  $y = h_{\text{máx}} \quad \Longleftrightarrow \quad v = 0 \quad \therefore \quad \boxed{t_s = v_0 / g}$

$t_s$  es el tiempo que la partícula tarda en subir, en llegar “arriba del todo”. Introduciendo esta expresión en la de  $y = f(t)$ , se obtiene:

$$\boxed{h_{\text{máx}} = v_0^2 / 2g}$$

.....

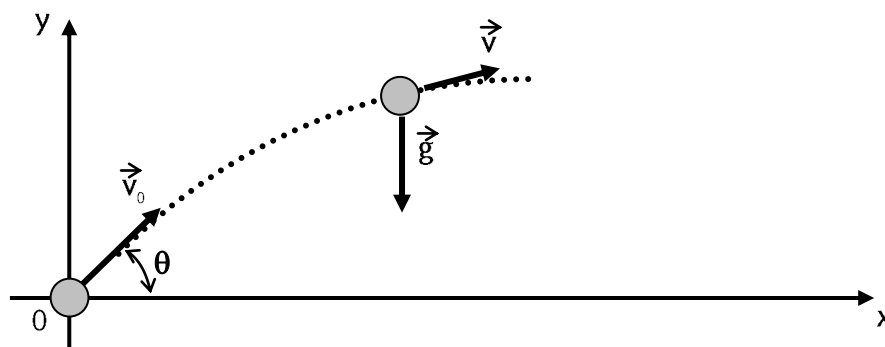
Otro movimiento “natural” de aceleración aproximadamente constante es el que corresponde a un cuerpo que se desliza por un plano inclinado sin roce, o con roce, en determinadas circunstancias. Veremos en *DINÁMICA* ... cómo se calcula la aceleración en estos casos.

También es frecuente encontrarse con cuerpos que, luego de su lanzamiento al aire, describen curvas. Analizaremos a continuación cómo es el movimiento de una partícula lanzada en forma de

*TIRO OBLICUO*

Supondremos que la Tierra es plana, que el lanzamiento (tiro) se realiza en un ambiente sin aire, en el vacío, y que la partícula no se eleva demasiado alto. En estas condiciones, cualquier cuerpo lanzado libremente está sometido tan solo a la acción de la atracción gravitatoria de la Tierra, la que le imprime a la partícula la aceleración constante  $\vec{g}$ , de dirección vertical y sentido hacia abajo. Quiere decir que, si tomamos un sistema de referencias fijo a tierra, con el eje  $y$  vertical y los ejes  $x$  y  $z$  en el plano horizontal, el vector  $\vec{g}$  tendrá por componente ortogonal a  $\vec{g}_y$  solamente, ya que  $\vec{g}_x = 0$  y  $\vec{g}_z = 0$ .

Por lo tanto, si hacemos coincidir a uno de los ejes ( p. ej.  $x$  ) con el plano formado por el eje  $y$  y el vector  $\vec{v}_0$  (velocidad inicial, o velocidad que tiene la partícula en el instante en que fue lanzada y liberada), la partícula seguirá en este plano, en el que describirá una curva que pasaremos a analizar a partir de la figura siguiente:



La dirección de  $\vec{g}$  anuncia que no habrá modificaciones en la componente horizontal ( en  $x$  ) de la velocidad  $\vec{v}$ , y que será igual a la componente horizontal de  $\vec{v}_0$  a lo largo de toda la

trayectoria: 
$$v_x = v_{ox} = v \cdot \cos \theta$$

En cambio  $\vec{g}$  afecta a la componente vertical  $v_y$ , como si se tratase de un tiro vertical ya analizado:

$$v_y = v_{oy} - g \cdot t = v_o \cdot \sin \theta - g \cdot t$$

Las componentes ortogonales de la posición en función del tiempo se calculan, pues, con las ecuaciones de MRU y MRUV:

$$x = v_{ox} \cdot t + x_o^0 \quad ; \quad y = \frac{1}{2} (-g) \cdot t^2 + v_{oy} \cdot t + y_o^0$$

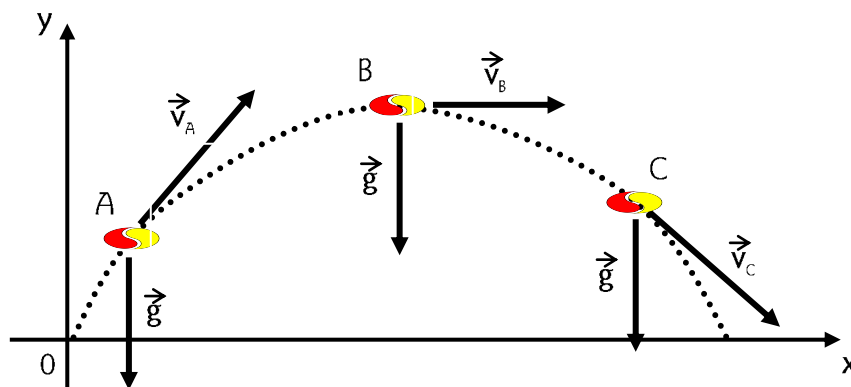
[  $x_o$  e  $y_o$  valen cero en este caso, para este sistema de referencias adoptado ]

Combinando ambas se obtiene la ecuación de la trayectoria:

$$y = \frac{1}{2} (-g) \cdot [x / v_{ox}]^2 + v_{oy} \cdot [x / v_{ox}] = -\frac{1}{2} g \cdot [x / v_{ox}]^2 + x \cdot \operatorname{tg} \theta$$

La que nos dice que, en las *condiciones ideales* planteadas, una partícula describe una parábola de segundo grado al ser lanzada oblicuamente. No obstante, un cuerpo real, de forma esférica y no muy liviano, lanzado oblicuamente a baja velocidad, también describe prácticamente una parábola, como quedará demostrado en *DINÁMICA* ...

Así, a lo largo de la trayectoria, los vectores *velocidad* y *aceleración* serán como los indicados en la figura:



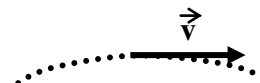
Teniendo en cuenta estos conceptos y las ecuaciones precedentes, podemos resolver cualquier problema de *tiro oblicuo*.

### Ejemplo 9

Desde el nivel del suelo, se lanza una piedra con una rapidez  $v_o$  y una dirección que forma un ángulo  $\theta$  con el plano horizontal. Calcular: a) el tiempo que tarda la piedra en llegar al vértice de la parábola de su trayectoria; b) las coordenadas de este vértice; c) el tiempo que tarda en llegar al suelo; d) la distancia entre el punto de lanzamiento y el del impacto con el suelo, en el mismo plano horizontal del lanzamiento.

Solución:

- a) En el vértice de la parábola el vector velocidad es horizontal, por lo cual su componente vertical es *cero* :  $v_y = 0$ .



Adoptando el sistema de referencias de la introducción teórica del tema:

$$v_y = v_{oy} - g \cdot t \quad \Rightarrow \quad 0 = v_{oy} - g \cdot t_s \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_s = v_{oy} / g}$$

[ Naturalmente, igual resultado se obtendría a partir de otro sistema de referencias ]

b) De:  $x = v_{ox} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_v = v_{ox} \cdot t_s = v_{ox} \cdot v_{oy} / g = \frac{v_o^2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{g}}$

De:  $y = \frac{1}{2} (-g) \cdot t^2 + v_{oy} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_v = -\frac{1}{2} g \cdot t_s^2 + v_{oy} \cdot t_s = \frac{1}{2} \frac{v_{oy}^2}{g}}$

c) Como la parábola es simétrica, el tiempo en volver al suelo es el doble al de llegar al vértice. Luego,  $t_t = 2 \cdot t_s = 2 \cdot v_{oy} / g$ .

Visto de otra manera, al llegar al suelo la coordenada  $y$  vuelve a ser 0 para el sistema de referencias que se está utilizando; de donde se puede deducir el tiempo de “vuelo” :

De:  $y = \frac{1}{2} (-g) \cdot t^2 + v_{oy} \cdot t \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2} (-g) \cdot t_t^2 + v_{oy} \cdot t_t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_t = 2 \cdot v_{oy} / g}$

d) Lo que se pide en este inciso es lo que se llama “alcance máximo”. Se lo puede calcular con:

$$\boxed{x_{m\acute{a}x} = Alc. m\acute{a}x. = v_{ox} \cdot t_t = v_o \cdot \cos \theta \cdot 2 \cdot v_{oy} / g = 2 x_v = \frac{v_o^2 \cdot \sin 2\theta}{g}}$$

.....

La función senoidal indica que el máximo alcance se logra haciendo  $2\theta = \pi/2 = 90^\circ$ , es decir, cuando  $\theta = \pi/4 = 45^\circ$ . Para cualquier ángulo mayor o menor que  $\pi/4$  el alcance horizontal es menor, con curiosidades como la que podemos observar en el

**Ejemplo 10**

Demostrar que cuando un proyectil abandona el arma formando un ángulo de  $(45^\circ + \beta)$  con la horizontal, su alcance es el mismo (*medido sobre la horizontal que pasa por la boca del arma*) que cuando el ángulo es de  $(45^\circ - \beta)$ , siendo  $\beta$  un valor cualquiera comprendido entre  $0^\circ$  y  $45^\circ$ . Es de destacar que este resultado fue obtenido por Galileo Galilei, muchos años antes del desarrollo de la mecánica newtoniana.

Solución:

Siendo el *alcance máximo* igual a  $v_o^2 \cdot \sin 2\theta / g$ , para el ángulo  $\theta = 45^\circ + \beta$  resulta:

$$\begin{aligned} x_{m\acute{a}x} &= v_o^2 \cdot \sin 2(45^\circ + \beta) / g = v_o^2 \cdot \sin (90^\circ + 2\beta) / g = \\ &= v_o^2 \cdot (\sin 90^\circ \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 90^\circ) / g = v_o^2 \cdot \cos 2\beta / g \end{aligned}$$

Y para el ángulo  $\theta = 45^\circ - \beta$ :

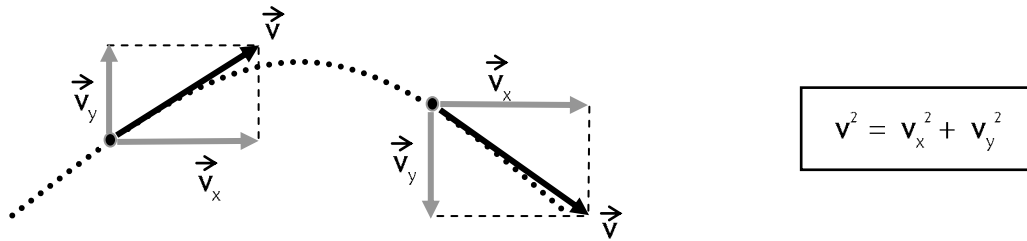
$$x_{m\acute{a}x} = v_o^2 \cdot (\sin 90^\circ \cdot \cos 2\beta - \sin 2\beta \cdot \cos 90^\circ) / g = v_o^2 \cdot \cos 2\beta / g$$

¡ Vemos que se obtiene el mismo alcance en ambos casos !

.....



En cuanto a la *velocidad* de la partícula, ésta puede calcularse a través de sus componentes, ya que en cualquier punto de la trayectoria sucede:



Entonces:

$$\begin{aligned}
 v^2 &= v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 \cdot \cos^2 \theta + (v_0 \cdot \sin \theta - g \cdot t)^2 = \\
 &= v_0^2 \cdot \cos^2 \theta + v_0^2 \cdot \sin^2 \theta - 2 \cdot v_0 \cdot \sin \theta \cdot g \cdot t + g^2 \cdot t^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot y \\
 &\text{¡ Resulta: } v^2 + 2 \cdot g \cdot y = v_0^2 = \text{cte. !}
 \end{aligned}$$

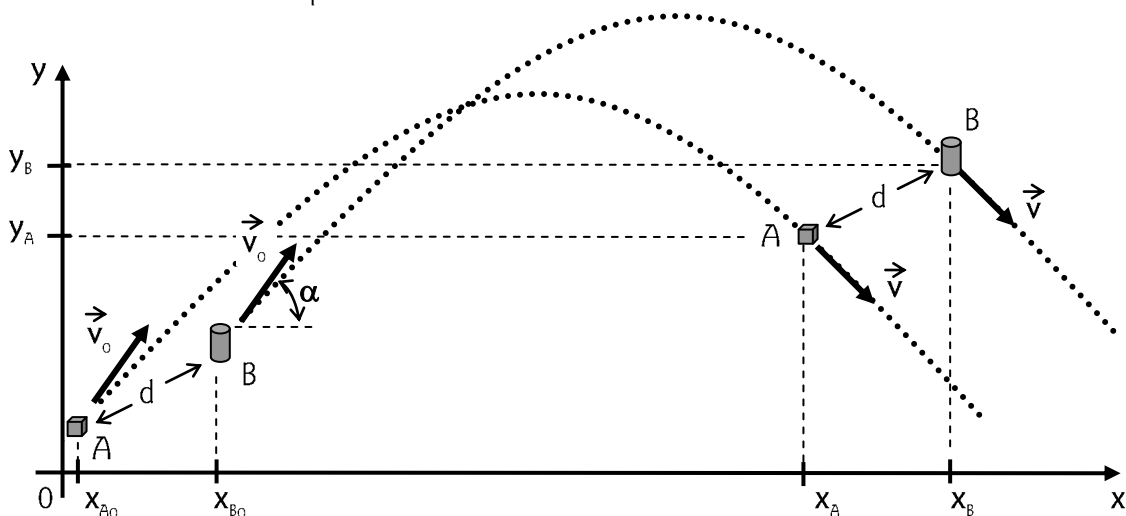
Se mantiene invariable la suma  $v^2 + 2 \cdot g \cdot y$ . En *DINÁMICA de la Partícula* veremos que estos términos, multiplicados por otra constante ( $m/2$ ), definen la *Energía Mecánica*.

### Ejemplo 11

Desde dos puntos distintos del espacio se lanzan dos objetos con la misma velocidad (igual rapidez, sentido y dirección). Demostrar que la *distancia*  $d$  que los separa inicialmente se mantiene constante a lo largo de sus trayectorias. (Naturalmente, los vuelos se realizan en el vacío).

Solución:

En primer lugar, hacemos coincidir las velocidades iniciales de los objetos con el plano  $x, y$  de nuestro sistema de referencias. Así nos aseguramos que en cualquier instante estos objetos se encontrarán en dicho plano:



$$\begin{aligned}
 x_B &= x_{B0} + v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \\
 - x_A &= x_{A0} + v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \\
 \hline
 x_B - x_A &= x_{B0} - x_{A0} = \text{cte.}
 \end{aligned}$$

Y lo mismo se puede demostrar para las coordenadas del eje  $y$  !!

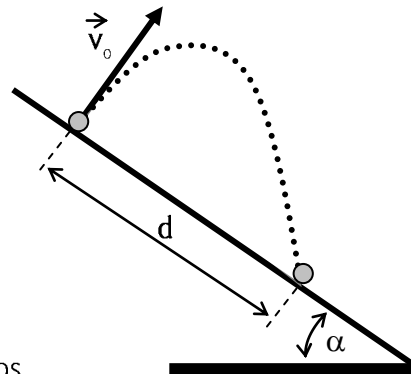
$$\therefore \underline{d = \text{cte.}}, \text{ ya que: } d = [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]^{1/2}$$

.....

**Ejemplo 12**

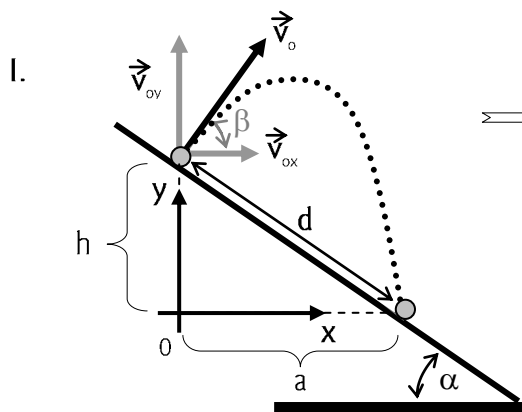
Desde un plano inclinado un ángulo  $\alpha$ , se lanza una piedra con rapidez inicial  $v_0$ , perpendicularmente al plano, como indica la figura. Calcular:

- a) A qué distancia  $d$  del punto de lanzamiento cae la piedra sobre el plano.
- b) Qué velocidad tiene en ese momento.



Solución:

Resolveremos el problema utilizando sucesivamente dos sistemas de referencias distintos.



$$\boxed{\text{sen } \beta = \text{cos } \alpha \quad ; \quad \text{cos } \beta = \text{sen } \alpha}$$

$$0 = + h + v_0 \cdot \text{sen } \beta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 =$$

$$= + h + v_0 \cdot \text{cos } \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$x = a = v_{ox} \cdot t = v_0 \cdot \text{cos } \beta \cdot t = v_0 \cdot \text{sen } \alpha \cdot t$$

Por otro lado, observando la figura, se ve que  $\text{tg } \alpha = h/a$ . Luego, si tomamos  $g = 10 \text{ m/s}^2$  y combinamos estas ecuaciones, se llega a:

$$h/a = \text{sen } \alpha / \text{cos } \alpha = (5t^2 - v_0 \cdot \text{cos } \alpha \cdot t) / v_0 \cdot \text{sen } \alpha \cdot t = (5t - v_0 \cdot \text{cos } \alpha) / v_0 \cdot \text{sen } \alpha$$

$$t = v_0 / 5 \text{ cos } \alpha \quad ; \quad x = a = v_0^2 \cdot \text{tg } \alpha / 5 \quad ; \quad h = v_0^2 / 5 \text{ cos}^2 \alpha - v_0^2 / 5$$

[ Recordar el comentario sobre unidades de medida. Ver Ejemplo 1 ]

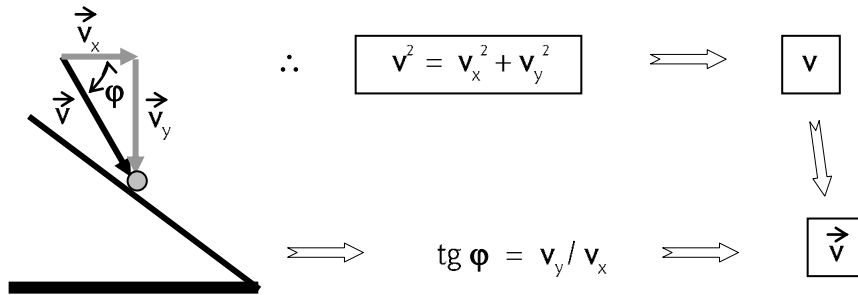
Ahora es fácil responder al inciso a) haciendo:  $d^2 = a^2 + h^2$ .

En cuanto a la velocidad en el instante del impacto, ésta se calcula a través de sus componentes  $v_x$  y  $v_y$ :

$$v_x \text{ es prácticamente un dato, ya que: } v_{ox} = v_0 \cdot \text{cos } \beta = v_0 \cdot \text{sen } \alpha$$

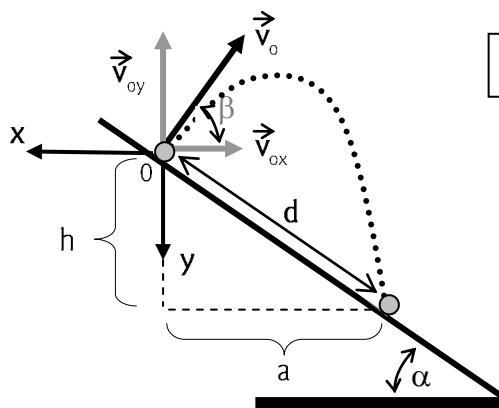
$$v_y = v_{oy} - g \cdot t = v_0 \cdot \cos \alpha - g \cdot v_0 / 5 \cos \alpha$$

componente que, a simple vista del sistema de referencias adoptado, deberá ser negativa .



El vector  $\vec{v}$ , como en todos los casos, es tangente a la trayectoria.

II.



$$\boxed{\text{sen } \beta = \text{cos } \alpha \ ; \ \text{cos } \beta = \text{sen } \alpha}$$

$$h = 0 - v_0 \cdot \text{sen } \beta \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 =$$

$$= - v_0 \cdot \text{cos } \alpha \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$a = - v_0 \cdot \text{cos } \beta \cdot t = - v_0 \cdot \text{sen } \alpha \cdot t$$

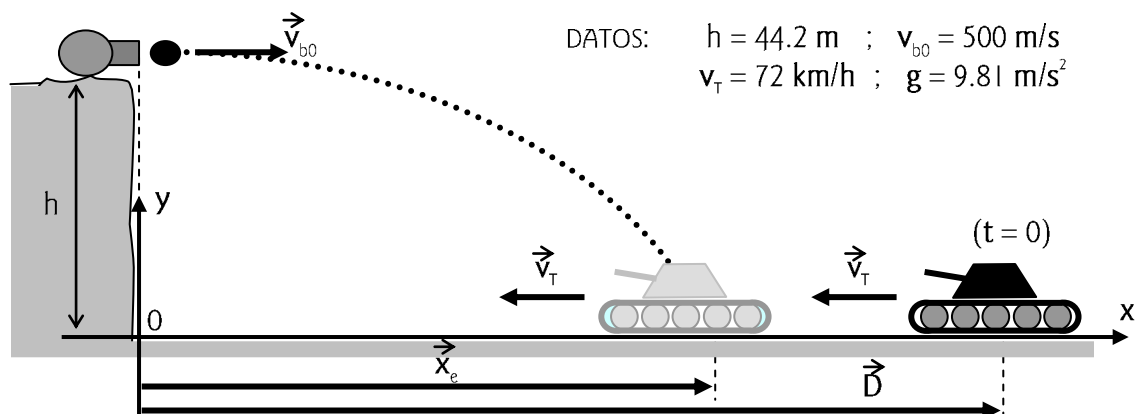
$$tg \alpha = h / (-a)$$

¡ Ecuaciones con las que se obtienen los mismos resultados que en I. !

### Ejemplo 13

Un tanque marcha en un plano horizontal a 72 km/h hacia una colina de 44.2 m de altura en la que se encuentra un cañón. Calcular a qué distancia  $D$  de la vertical que pasa por la boca del cañón debe encontrarse el tanque en el instante en que sale a su encuentro una bala lanzada horizontalmente a 500 m/s , para que ésta logre su objetivo de impactarlo.

Solución:



Resolveremos el problema eligiendo el sistema de referencias de la figura.

Tiempo de vuelo de la bala:  $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = (2h/g)^{1/2} = 3 \text{ s}}$

Durante ese tiempo el tanque adquirió la posición:  $x_{eT} = D - v_T \cdot t$ , mientras que la bala avanzó en el sentido horizontal:  $x_{eb} = v_{b0} \cdot t$ . Si el tanque y la bala han de encontrarse, esas posiciones deben ser las mismas:

$$x_{eT} = x_{eb} \quad \Rightarrow \quad D - v_T \cdot t = v_{b0} \cdot t$$

Resulta:  $D = v_{b0} \cdot t + v_T \cdot t = (v_{b0} + v_T) \cdot t = (520 \text{ m/s}) \cdot 3 \text{ s}$

$$\therefore \quad \boxed{D = 1560 \text{ m}}$$

.....

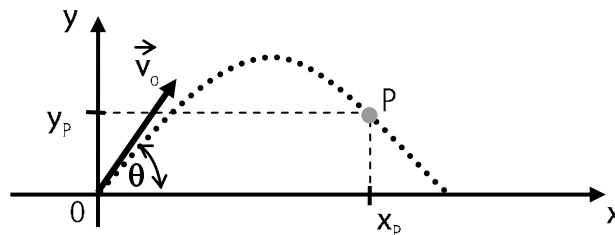
El tiro oblicuo ideal nos permite arribar a otra curiosidad:

*LA PARÁBOLA DE SEGURIDAD*

Se trata de la envolvente de los picos de las respectivas parábolas que forman los tiros oblicuos para velocidades iniciales de igual rapidez  $v_0$ , pero distintas direcciones (ángulos  $\theta$ ). El conocer esta parábola de seguridad o su ecuación correspondiente nos permite saber si, para una coordenada  $x$  determinada, la partícula lanzada oblicuamente llegaría a una altura preestablecida variando el ángulo de disparo.

Vimos que  $y = -\frac{1}{2} g \cdot [x / v_{0x}]^2 + x \cdot \text{tg } \theta$

Luego, si queremos hacer blanco en un punto del espacio como  $P(x_p, y_p)$ :



la ecuación de posición en  $y$ , queda:

$$y_p = -\frac{1}{2} g \cdot [x_p / v_{0x}]^2 + x_p \cdot \text{tg } \theta$$

Podemos pararnos debajo de  $P$  en la coordenada  $x_p$  y ver pasar por encima nuestro a proyectiles lanzados desde  $0$ ; lo que no sabemos es, dada  $v_0$  como dato, si para algún  $\theta$  existirá la posibilidad de que un proyectil llegue a la altura de  $P$ . Para averiguarlo tengamos en cuenta que:

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}^2 \theta / \text{cos}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta / \text{cos}^2 \theta = 1 / \text{cos}^2 \theta$$

O sea:  $1 + \text{tg}^2 \theta = 1 / \text{cos}^2 \theta$

Por otra parte,  $v_{ox} = v_o \cdot \cos \theta$  ; de donde:  $v_{ox}^2 = v_o^2 \cdot \cos^2 \theta$

Entonces,  $y_p$  en función de  $\theta$  resulta:  $y_p = -\frac{1}{2} g \cdot x_p^2 \cdot (1 + \text{tg}^2 \theta) / v_o^2 + x_p \cdot \text{tg} \theta$

Llamando  $u$  a  $\text{tg} \theta$ , aparece la ecuación de segundo grado:

$$u^2 \cdot (g \cdot x_p^2 / 2v_o^2) - u \cdot (x_p) + (y_p + x_p^2 \cdot g / 2v_o^2) = 0$$

cuyas raíces son:

$$u_{1-2} = [ x_p \pm \sqrt{x_p^2 - (2g \cdot x_p^2 / v_o^2) \cdot (y_p + (x_p^2 \cdot g) / 2v_o^2)} ] \cdot 2v_o^2 / 2g \cdot x_p^2 =$$

$$= v_o^2 / g \cdot x_p \pm \sqrt{v_o^4 / g \cdot x_p^2 - (2v_o^2 y_p / g \cdot x_p^2) - 1}$$

Para que las raíces sean reales, es decir, para que el problema tenga solución, debe cumplirse con que:

$$[v_o^4 / (g^2 \cdot x_p^2)] - (2v_o^2 \cdot y_p / g \cdot x_p^2) - 1 \geq 0$$

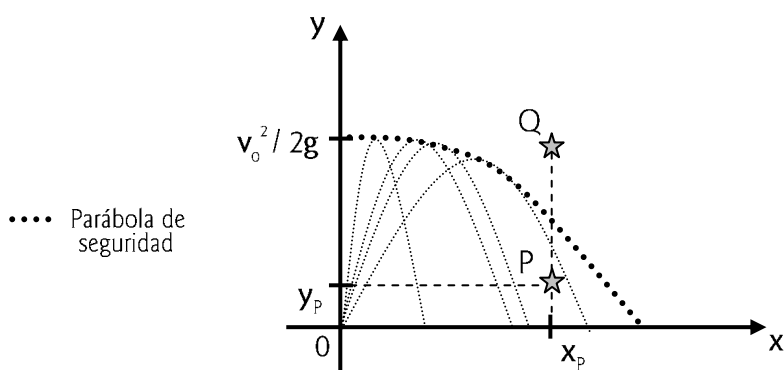
⇕

$$y_p \leq (v_o^4 / g^2 \cdot x_p^2 - 1) \cdot g \cdot x_p^2 / 2v_o^2$$

⇐

$$y_p \leq (v_o^2 / 2g) - g \cdot x_p^2 / 2v_o^2$$

Esta desigualdad es la que limita la zona accesible. La ecuación  $y_p = f(x_p)$  corresponde a la "curva envolvente" de la que hablamos al principio:



En el caso de la figura, para  $x_p$  como dato, seguro que algún proyectil pasaría por el punto P, pero ninguno podría llegar a Q.

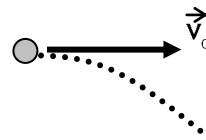
Si el tiro es vertical, puede considerarse "oblicuo" con  $\theta = \pi/2$  y con  $x_p = 0$ . Se deduce de la ecuación de la "parábola de seguridad" que, para la abscisa  $x_p = 0$ , la ordenada vale:  $y_p = v_o^2 / 2g$ , como habíamos visto en MRUV (tiro vertical).

Por otra parte, si se lanza un objeto en forma horizontal con una rapidez  $v_o$  desde una altura  $v_o^2 / 2g$ , describe una trayectoria parabólica idéntica a la "parábola de seguridad", como puede observarse en el siguiente

### Ejemplo 14

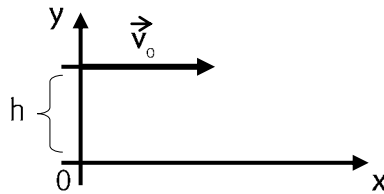
Hallar la ecuación  $y = f(x)$  correspondiente al caso de una partícula lanzada horizontalmente

con  $\vec{v}_0$ , como indica la figura:



Solución:

Para el sistema de referencias:



resulta:  $y = y_0 - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = h - \frac{1}{2} g \cdot t^2$        $x = v \cdot t$

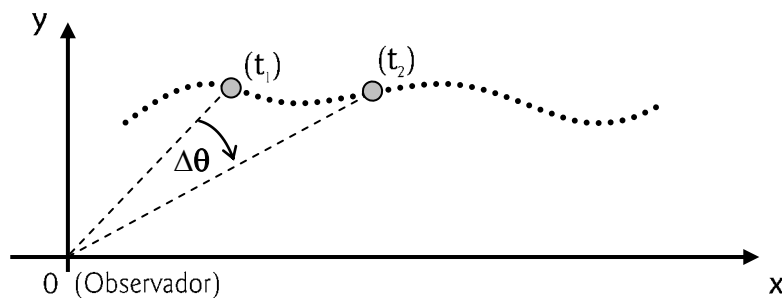
En el caso en que la altura  $h$  del lanzamiento vale  $v_0^2/2g$  metros, la ecuación de la trayectoria es:

$$y = (v_0^2/2g) - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = (v_0^2/2g) - g \cdot x^2/2v_0^2$$

El *tiro oblicuo* estudiado es, por cierto, un movimiento muy particular en el plano. Es ideal, ya que hemos despreciado algunas cosas para su análisis. Si bien, como decíamos que se verá en *DINÁMICA de la Partícula*, el tiro de algunos proyectiles a baja altura y baja velocidad, en el aire, se parece mucho a éste.

Pero en general cualquier movimiento en el plano es más complejo. Basta con imaginarnos las curvas raras que podemos trazar con la punta del lápiz sobre la tabla de una mesa; o la trayectoria de una gota de agua de lluvia sobre el vidrio de una ventana, en un día de viento.

Suele ser conveniente estudiar a estos movimientos curvilíneos planos ubicando a un observador en el centro de un sistema de coordenadas. Si el observador "mira" a una partícula que describe una trayectoria curva, la línea imaginaria que une sus ojos con la partícula también se mueve. Si en el instante  $t_1$  la partícula estaba en el lugar señalado en la figura, y en el instante  $t_2$  se encuentra en otro lugar, esa línea imaginaria genera un desplazamiento angular que llamaremos  $\Delta\theta$ :



Se define como

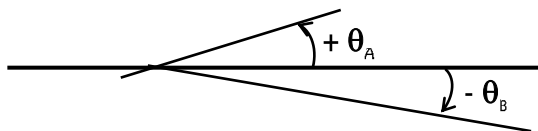
VELOCIDAD ANGULAR MEDIA ( $\omega_m$ )

al cociente  $\Delta\theta/\Delta t$ , en el que  $\Delta t$  es el tiempo durante el cual se produjo el desplazamiento angular  $\Delta\theta$ :

$$\omega_m = \Delta\theta/\Delta t$$

Este desplazamiento, como el que hemos definido al iniciar el estudio de *CINEMÁTICA de la Partícula*, es también la diferencia entre dos posiciones: la posición angular “posterior” y la posición angular “anterior”. Por lo que se debe elegir un sistema de referencias para ubicar a las mismas y obtener sus respectivos signos.

Por ejemplo, puede tomarse como posición angular “cero” a la horizontal, y como ángulos positivos los que se generan en sentido antihorario:



( Si fuera éste el sistema de referencias, piensa qué signo tendría  $\Delta\theta$  en el caso de la figura de la página anterior ).

La unidad de medida de la velocidad angular se obtiene de:  $[\omega] = [\theta] / [t] = \text{rad/s} = 1/\text{s}$

[ Damos por conocido el *radián*, y su relación con los grados sexagesimales ]

Ahora, dado que la velocidad angular media tiene poco sentido físico (al igual que la velocidad “lineal” media analizada inicialmente), pasamos a trabajar con la

#### VELOCIDAD ANGULAR INSTANTÁNEA ( $\omega$ )

$$\omega = \lim_{\Delta t \Rightarrow 0} (\Delta\theta/\Delta t) = d\theta/dt$$

Es la velocidad angular que la partícula posee en un instante determinado; si pasa por el punto B en ese instante, la velocidad angular se representa con el subíndice B:  $\omega_B$ .

Más adelante veremos que se puede asignar calidad de “seudovector” a  $d\theta$  y por lo tanto también a  $\omega$ . Pero por ahora es conveniente hablar sólo de sus módulos y de sus componentes, por lo cual la escritura de ambas magnitudes físicas ( $\theta$  y  $\omega$ ) será la señalada.

Está claro que si uno “barre” con la vista un objeto en movimiento, el “barrido” no tiene por qué ser “parejo”, “uniforme”. En algún momento podemos mover los ojos con mayor rapidez, pasando de una velocidad angular  $\omega$  a otra. Con lo que aparece la necesidad de definir otra magnitud física.

#### ACELERACIÓN ANGULAR MEDIA ( $\alpha_m$ )

al cociente entre la variación de velocidad angular  $\Delta\omega (= (\omega_2 - \omega_1))$  y el tiempo  $\Delta t$  durante el cual se produjo la misma:

$$\alpha_m = \Delta\omega/\Delta t$$

Surge entonces, por inmediata analogía con lo tratado previamente, la deducción de una aceleración más particular.

ACELERACIÓN ANGULAR INSTANTÁNEA ( $\alpha$ )

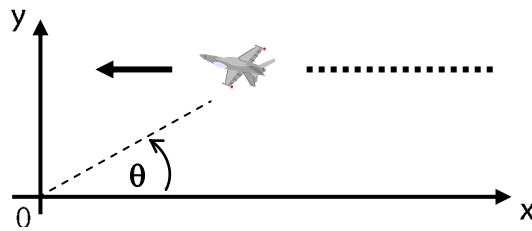
$$\alpha = \lim_{\Delta t \Rightarrow 0} (\Delta\omega/\Delta t) = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$$

cuya unidad de medida es:  $[\alpha] = [\omega] / [t] = 1/s / s = 1/s^2$

Como en el caso de la velocidad angular, suele representarse con un subíndice para señalar exactamente el lugar en el que se considera la aceleración en un instante determinado.

Ejemplo 15

Un avión se mueve en una trayectoria recta, como muestra la figura:



Un observador mide la posición angular en el sistema de referencias señalado, y obtiene:

$$\theta(t) = \pi/4 + (\pi/2) \cdot t \quad (\text{con } t \text{ en s y } \theta \text{ en rad})$$

Hallar la ecuación horaria de su velocidad angular y la de su aceleración angular.

Solución:

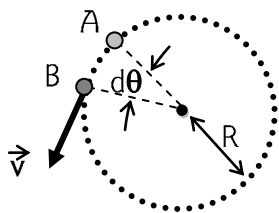
$$\omega = d\theta/dt = \pi/2 \text{ 1/s (Es constante. No varía con el tiempo)} \Rightarrow \alpha = d\omega/dt = 0$$

.....

Un caso de movimiento curvilíneo en el plano, muy particular, es el del

MOVIMIENTO CIRCULAR

Si una partícula marcha describiendo una circunferencia, en cualquier punto de la trayectoria su velocidad es tangente a la misma, como sucede para cualquier forma de camino. Pero veamos cuál es la relación entre los módulos de su velocidad tangencial (o lineal)  $\vec{v}$  y la velocidad angular  $\vec{\omega}$  para una trayectoria circular de radio  $R$ .



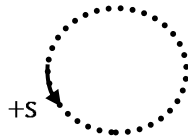
Por definición de *radian*, si el ángulo  $d\theta$  se expresa en radianes:

$$R \cdot d\theta = \text{arco } \widehat{AB}$$

Si tomamos como sistema de referencias  $s$  a una línea superpuesta a la circunferencia de



radio  $R$ , resulta:



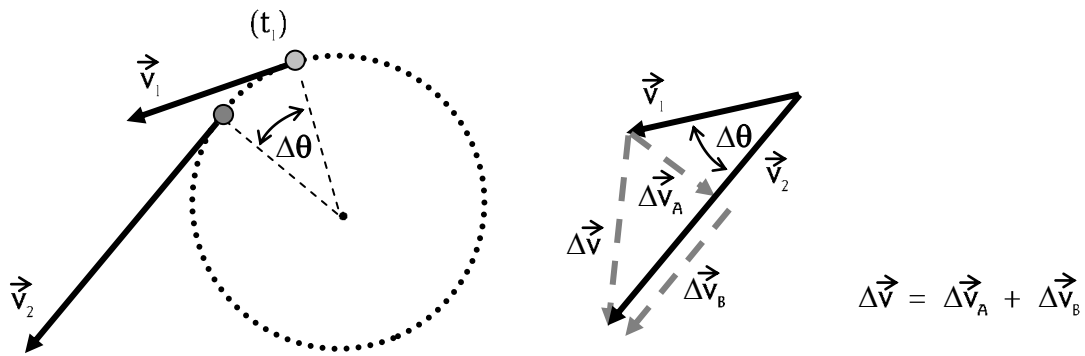
$$\text{arco } \widehat{AB} = ds \quad \therefore \quad R \cdot d\theta = ds$$

Ahora, dividiendo ambos miembros por  $dt$ , queda:  $R \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{dt}$

$R \cdot \omega = v$

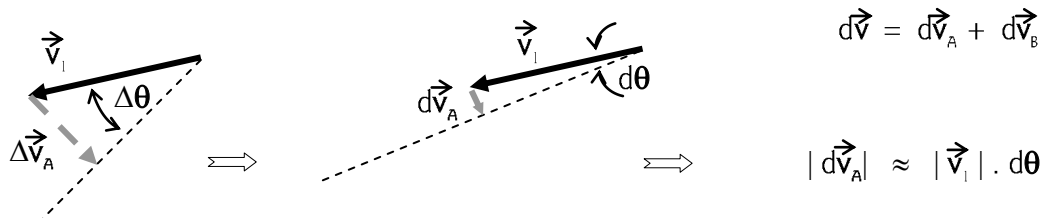
¡ Válido para cualquier tipo de movimiento sobre la circunferencia !

Si el movimiento es tal que  $v$  no se mantiene constante, y es  $v_1$  la rapidez para el instante  $t_1$  y  $v_2$  para cuando la partícula se desplazó  $\Delta\theta$  a partir de  $t_1$ ,



Hay un cambio de velocidad  $\Delta\vec{v}$  cuando la partícula describe un  $\Delta\theta$ . Por lo tanto existe aceleración, de acuerdo a la definición de ésta.

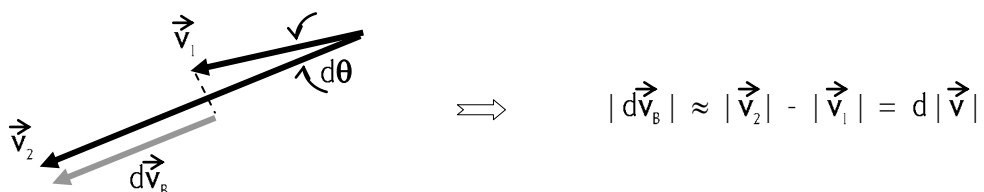
Pero si consideramos un desplazamiento angular muy pequeño ( $\Delta\theta \Rightarrow d\theta$ ), resulta:



¡  $|d\vec{v}_A|$  prácticamente coincide con el arco que genera la punta del vector  $\vec{v}_1$  cuando su dirección gira un  $d\theta$  !

El vector  $d\vec{v}_A$  tiende a hacerse perpendicular a  $\vec{v}_1$  cuando el desplazamiento angular es el infinitésimo  $d\theta$ . Se lo suele llamar  $d\vec{v}_\perp$  o  $d\vec{v}_c$ , ya que apunta al centro de la circunferencia.

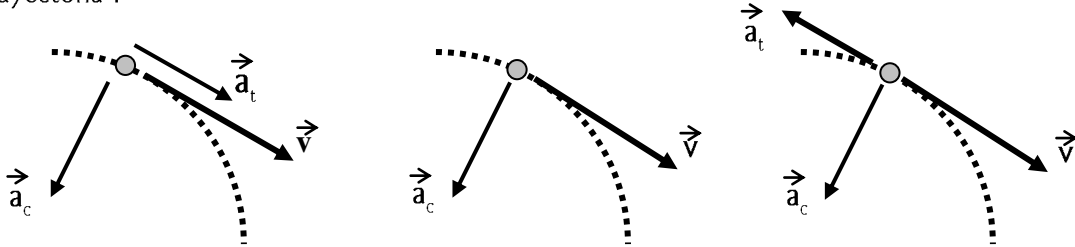
Por otra parte, para este desplazamiento  $d\theta$  el vector  $d\vec{v}_B$  tiende a hacerse paralelo a  $\vec{v}_1$ . Por lo cual se lo llama  $d\vec{v}_{||}$  o  $d\vec{v}_t$ , por ser tangente a la circunferencia.



Entonces:

$$\boxed{\vec{a}} = d\vec{v}/dt = d\vec{v}_A/dt + d\vec{v}_B/dt = d\vec{v}_c/dt + d\vec{v}_t/dt = \boxed{\vec{a}_c + \vec{a}_t}$$

¡ En el movimiento circular y, como veremos más adelante, en cualquier movimiento curvilíneo, la aceleración puede tener dos componentes: una centrípeta y otra tangente a la trayectoria !



El módulo de estas componentes resulta:

$$[ a_c = dv_c/dt = v \cdot d\theta/dt = v \cdot \omega ] \quad [ a_t = dv_t/dt = dv/dt ]$$

Teniendo en cuenta que  $R \cdot \omega = v$ , la componente centrípeta de la aceleración puede escribirse:

$$a_{\perp} = v \cdot \omega = R \cdot \omega \cdot \omega = R \cdot \omega^2 = v^2/R$$

De manera que, para un movimiento circular de cualquier tipo, valen las expresiones instantáneas:

$$\boxed{R \cdot \omega = v} \quad \boxed{a_c = v \cdot \omega} \quad \text{y} \quad \boxed{a_t = dv/dt} \quad (\text{si la hubiere})$$

### MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU)

Corresponde al caso en que la velocidad angular se mantiene constante ( $\omega = \text{cte}$ ) y por consiguiente la rapidez de la partícula también ( $v = \text{cte} = k$ ), dado que  $R \cdot \omega = v$ .

Se deduce que  $a_t = dv/dt = 0$  [ porque  $dk/dt = 0$  ], y que el módulo de la aceleración centrípeta también se mantiene constante, con valor:  $a_c = v \cdot \omega$ .

En cuanto a la posición sobre la circunferencia, la ecuación a aplicar es similar a la usada en el MRU, en el que tampoco variaba la rapidez. Si  $v = ds/dt$  (habíamos llamado  $ds$  al arquiteo diferencial), resulta  $s = v \cdot t + s_0$ , en donde  $s_0$  es la posición inicial ( $t_0 = 0$ ) respecto de un sistema de referencias adoptado arbitrariamente.

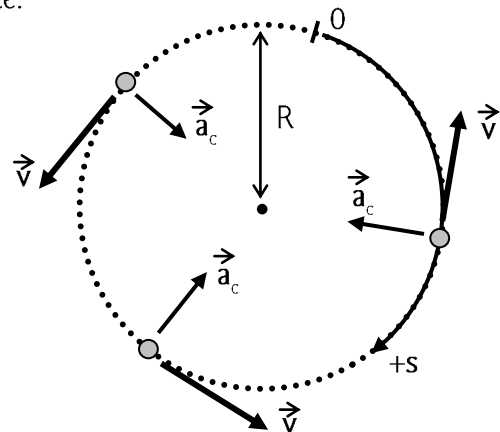
De otra manera:

$$\omega = d\theta/dt \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0 + \omega \cdot t$$

$$\text{Pero: } \theta \cdot R = s \quad \Rightarrow \quad \theta_0 \cdot R = s_0$$

$$\therefore (\theta_0 + \omega \cdot t) \cdot R = s$$

$$\text{Y como } \omega \cdot R = v, \quad s_0 + v \cdot t = s$$



Se define a la *frecuencia* ( $f$ ) como el número de revoluciones (vueltas) que ejecuta una rueda o una partícula sobre una circunferencia, por unidad de tiempo:

$$f = N^{\circ} \text{ rev} / \Delta t \quad [f] = 1 / [t] = 1/s$$

y al periodo ( $T$ ) como el tiempo que tarda en dar una revolución:

$$T = \Delta t / N^{\circ} \text{ rev} \quad [T] = [t] = s$$

Por lo que resulta:

$$f = 1/T$$

Por otra parte, como por definición la velocidad angular es:  $\omega = d\theta/dt$ , en el MCU podría escribirse  $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ ; es decir, el cociente entre un ángulo barrido y el tiempo en que se tardó en barrerlo. Para el caso particular en que el ángulo es de una revolución, el tiempo es de un periodo  $T$ . Luego,

$$\omega = \Delta\theta/\Delta t = 1 \text{ rev} / T = 2\pi \text{ rad} / T = 2\pi f$$

### Ejemplo 16

Un disco, de 1m de radio, gira en sentido horario con MCU a razón de 50 rpm (revoluciones "por" minuto). Hallar:

- Su velocidad angular y su aceleración angular.
- Su periodo.
- La velocidad y la aceleración de uno de los puntos del borde del disco.
- La posición de ese punto al cabo de 1 s de comenzado a contabilizar el movimiento (desde  $t_0 = 0$ ), para dos sistemas de referencias distintos.

Además, dibujar todos los vectores de las magnitudes mencionadas contenidos en el plano del círculo.

Solución:

- a) El dato 50 rpm es *frecuencia*, ya que  $50 \text{ rpm} = 50 \text{ rev} / \text{min}$

$$\therefore \omega = 2\pi \cdot 50 / [\text{min}] = 2\pi \cdot 50 / [60 \text{ s}] = 5/3 \pi \text{ 1/s}$$

En cuanto a la aceleración angular,  $\alpha = d\omega / dt = d(\text{cte.}) / dt = 0$

- b) Si  $f = 50 \text{ rev/min} = 5/6 \text{ 1/s}$ , resulta:  $T = 1/f = 6/5 \text{ s}$

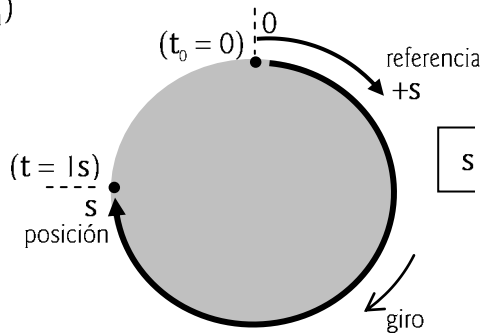
c)  $v = \omega \cdot R = 5/3 \pi \text{ 1/s} \cdot 1 \text{ m} = 5/3 \pi \text{ m/s (cte.)}$

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

Pero:  $a_t = 0$ , ya que  $a_t = dv/dt = d(\text{cte.})/dt = 0$   $\therefore \vec{a} = \vec{a}_c$

$$\boxed{a_c = v \cdot \omega = 5/3 \pi \text{ m/s} \cdot 5/3 \pi \text{ 1/s} = 25/9 \cdot \pi^2 \text{ m/s}^2}$$

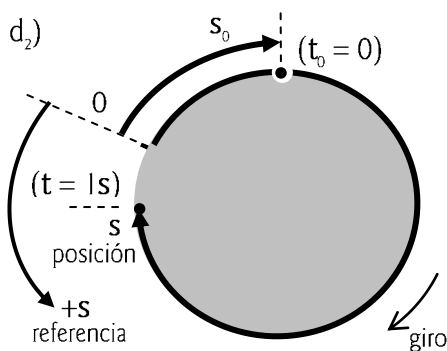
d<sub>1</sub>)



$$\boxed{s = + v \cdot t + 0 = 5/3 \pi \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s} \approx +5.24 \text{ m}}$$

Estos 5.24 m se miden sobre la circunferencia, a partir del "0" establecido.

d<sub>2</sub>)

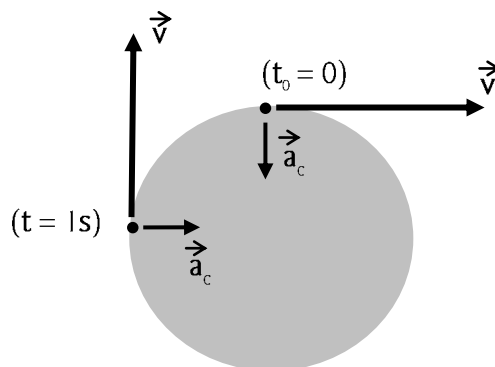


$$|s_0| = 1.5 \text{ m (tomado arbitrariamente)}$$

$$\boxed{s = v \cdot t + s_0 = - 5/3 \pi \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s} - 1.5 \text{ m} \approx - 5.24 \text{ m} - 1.5 \text{ m} \approx - 6.74 \text{ m}}$$

Las posiciones y las referencias se toman sobre la circunferencia, (trayectoria). Se han dibujado separadas para mejorar la interpretación de la

En cuanto a los vectores solicitados:



Observar que los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{a}_c$  no son constantes en el MCU ; pero son constantes sus módulos.

¡ Son los únicos vectores que se pueden dibujar en el plano de la circunferencia !

Los vectores (o pseudovectores) *velocidad angular* y *aceleración angular* son *perpendiculares* al plano de la circunferencia, como veremos a partir de que definamos el producto vectorial, en el capítulo de *SISTEMAS de PARTÍCULAS* .

### Ejemplo 17

Muchos satélites artificiales, y entre ellos la plataforma o laboratorio estable espacial, giran alrededor de nuestro planeta en una órbita aproximadamente circular; su movimiento es un MCU ya que sólo actúa sobre cada uno de ellos una aceleración perpendicular a su trayectoria.

Si un satélite está en órbita ecuatorial circular a 300 km de la superficie terrestre, en la que la aceleración de la gravedad es de unos 8.95 m/s<sup>2</sup>, calcular su velocidad tangencial y su periodo. (Considérese el radio de la Tierra de 6378 km en el ecuador).

Solución:

$g = v^2 / (R_T + h)$   
 $v^2 = g \cdot (R_T + h)$

$v \approx 27831 \text{ km/h}$

De:  $v / (R_T + h) = \omega = 2\pi/T \quad \Rightarrow \quad T \approx 1.51 \text{ hs.} \approx 1 \text{ h } 30 \text{ min}$

### MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO (MCUV)

Es un movimiento en el que la rapidez de la partícula que se mueve sobre una circunferencia varía uniformemente, con aceleración angular ( $\alpha = \alpha_0$ ) constante.

Entonces, partiendo de la definición de aceleración angular, ( $\alpha = d\omega/dt$ ), se deduce que en este movimiento la velocidad angular vale:

$$\omega = \alpha \cdot t + \omega_0$$

y, dado que  $\omega = d\theta/dt$ , integrando esta expresión se obtiene la ecuación que da la posición en función del tiempo:

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \theta_0$$

Como para cualquier tipo de movimiento circular valen:

$$v = \omega \cdot R \quad a_t = dv/dt \quad a_c = v \cdot \omega \quad v = ds/dt \quad s = R \cdot \theta$$

se obtiene:  $v = (\alpha \cdot t + \omega_0) \cdot R \quad a_t = d(\omega R)/dt = R \cdot d\omega/dt = R \cdot \alpha$

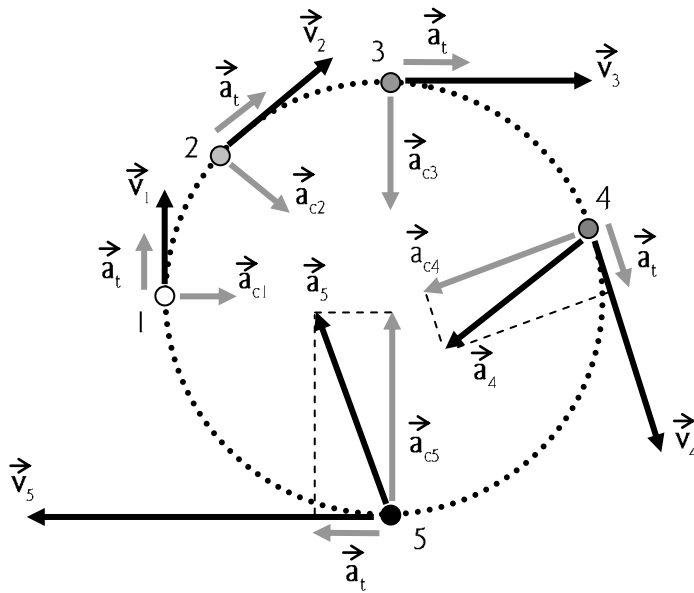
y también:  $s = \frac{1}{2} \alpha \cdot R \cdot t^2 + \omega_0 \cdot R \cdot t + s_0 = \frac{1}{2} a_t \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$

⤴ Pero, como quedó dicho al estudiar los movimientos rectilíneos, cada uno de los términos de las ecuaciones planteadas en los movimientos circulares puede ser positivo o negativo, dependiendo ello del sistema de referencias adoptado. ⤴

Si se tratara de un MCVU de sentido horario, con rapidez creciente, los vectores de velocidad

y aceleración serían:

Obsérvese que el módulo de  $\vec{a}_t$  se mantiene constante, mientras que crece el de  $\vec{a}_c$ .

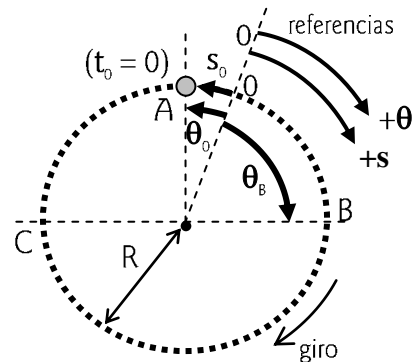


Como vemos en el punto 4, por ejemplo, la aceleración de la partícula (siempre entrante a la curva) es  $\vec{a}_4$ , con componentes  $\vec{a}_{c4}$  y  $\vec{a}_t$ .

**Ejemplo 18**

Una partícula gira en sentido horario con MCUV y pasa por el punto A con una rapidez de 180 km/h. Tarda 1.07 s en llegar a B.

- a) ¿ Cuánto tiempo más demora en llegar a C ?
- b) ¿Cuál es su posición al cabo de 1.5 s después de pasar por B, teniendo en cuenta el sistema de referencias dado en la figura ?



DATOS:

$$|s_0| = 5 \text{ m} ; R = 50 \text{ m}$$

$$\therefore |\theta_0| = |s_0| / R = 0.1 \text{ rad}$$

Solución:

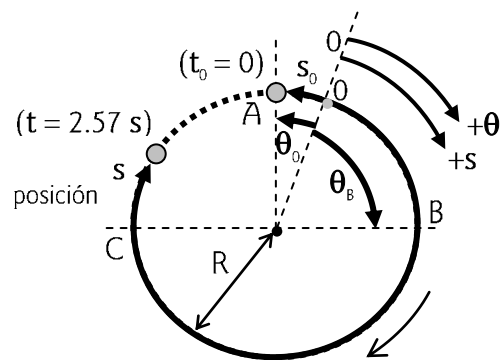
a)

$$\begin{aligned} v_A &= 180 \text{ km/h} = 180 \text{ [km] / (h)} = \\ &= 180 \text{ [1000 m] / (3600 s)} = \\ &= 50 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\omega_A = v_A / R = 1 \text{ rad/s} = 1/s$$

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \theta_0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = \theta_B - \theta_0 = \frac{1}{2} \alpha \cdot t_{AB}^2 + \omega_A \cdot t_{AB}$$

$$\therefore \pi/2 = \frac{1}{2} \alpha \cdot (1.07)^2 + 1.07 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 0.875 \text{ 1/s}^2$$



$$\theta_C - \theta_0 = \frac{1}{2} \alpha \cdot t_{AC}^2 + \omega_A \cdot t_{AC} \quad \Rightarrow \quad 3/2 \pi \approx 0.875 \cdot t_{AC}^2 / 2 + 1 \cdot t_{AC}$$

De esta ecuación surgen dos valores de  $t_{AC}$ :  $t_{AC1} \approx 2.33 \text{ s}$  y  $t_{AC2} \approx -4.61 \text{ s}$

Obviamente, el único que tiene sentido físico es el valor positivo. Por lo que la respuesta es:

$$t_{BC} = t_{AC1} - t_{AB} = 2.33 \text{ s} - 1.07 \text{ s} = 1.26 \text{ s}$$

b)  $s = \frac{1}{2} \alpha \cdot R \cdot t_x^2 + \omega_0 \cdot R \cdot t_x + s_0 \quad t_x = t_{AB} + 1.5 \text{ s} = (1.07 + 1.5) \text{ s} = 2.57 \text{ s}$

$$\therefore s = \frac{1}{2} \cdot 0.875 \cdot 50 \cdot 2.57^2 + 1 \cdot 50 \cdot 2.57 - 5 \approx 268 \text{ m}$$

.....

Para terminar el estudio de los movimientos *circulares uniformes* y *uniformemente variados*, observemos cómo las correspondientes ecuaciones generales se parecen a las utilizadas en los *movimientos rectilíneos uniformes* y *uniformemente variados*, respectivamente. Al igual que en aquellos, se pasa a una ecuación del MCU haciendo CERO la aceleración en la del MCUV:

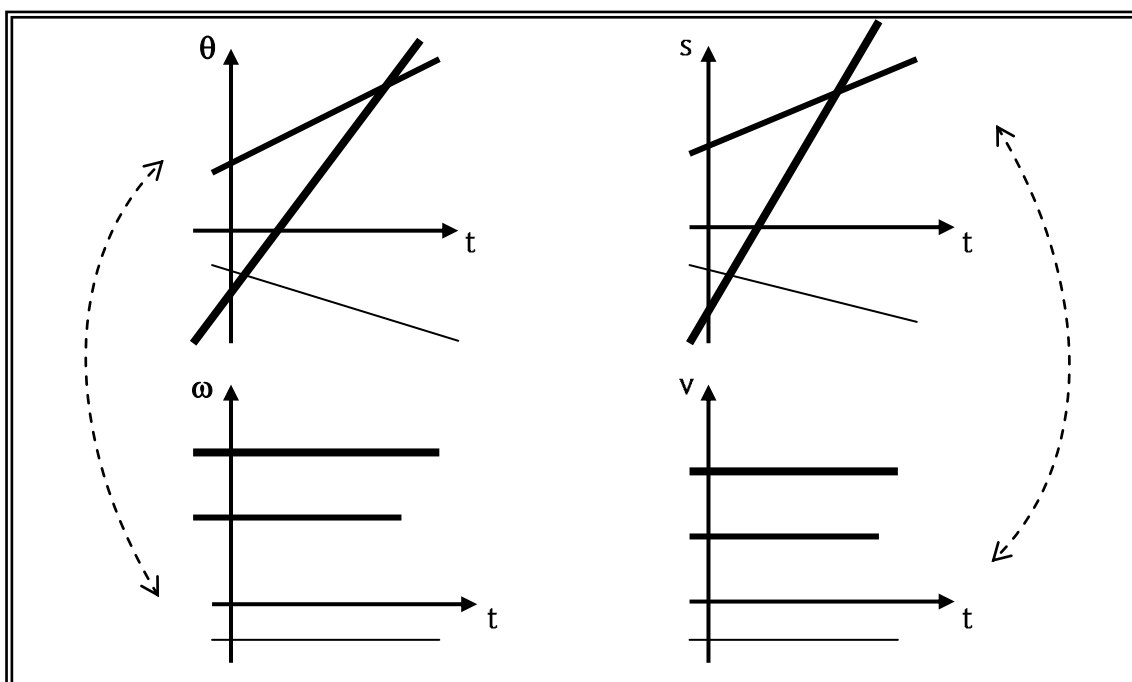
MCUV:  $s = \frac{1}{2} \alpha \cdot R \cdot t^2 + \omega_0 \cdot R \cdot t + s_0 = \frac{1}{2} a_t \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$

$$\Downarrow \quad \alpha = 0 \quad (a_t = 0)$$

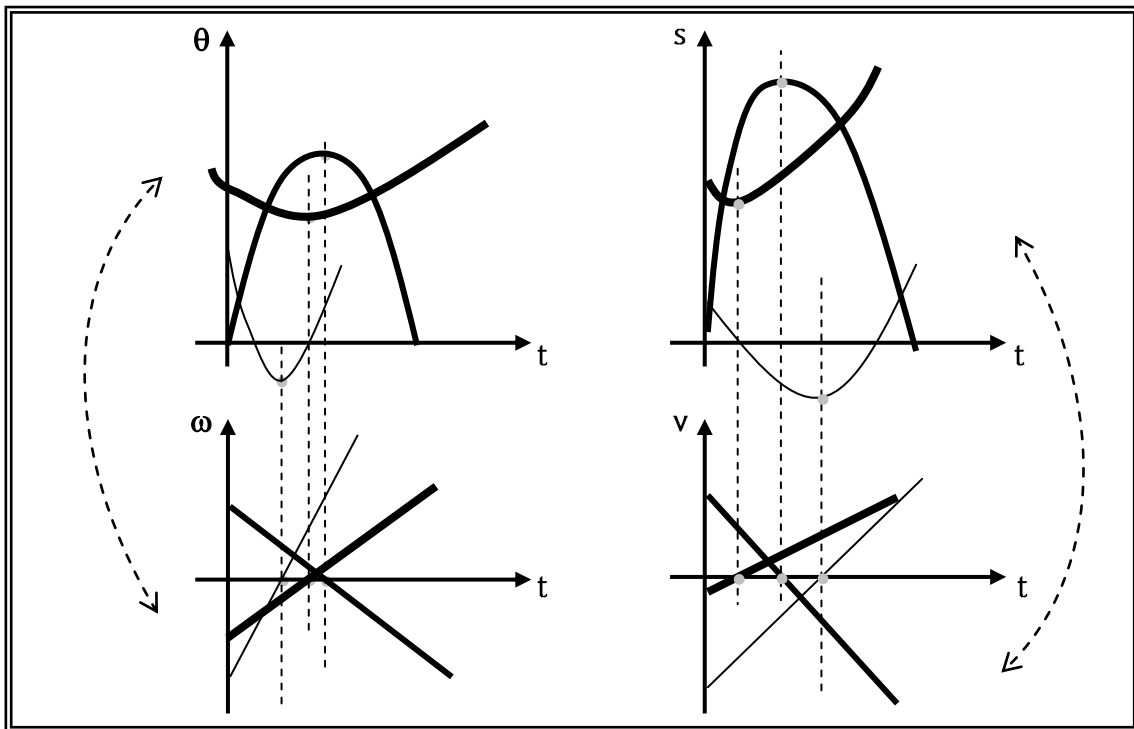
MCU:  $s = \omega_0 \cdot R \cdot t + s_0 = + v_0 \cdot t + s_0$

Las ecuaciones horarias de los movimientos circulares pueden representarse a través de gráficos horarios, como los ilustrados a continuación:

MCU:



MCUV :



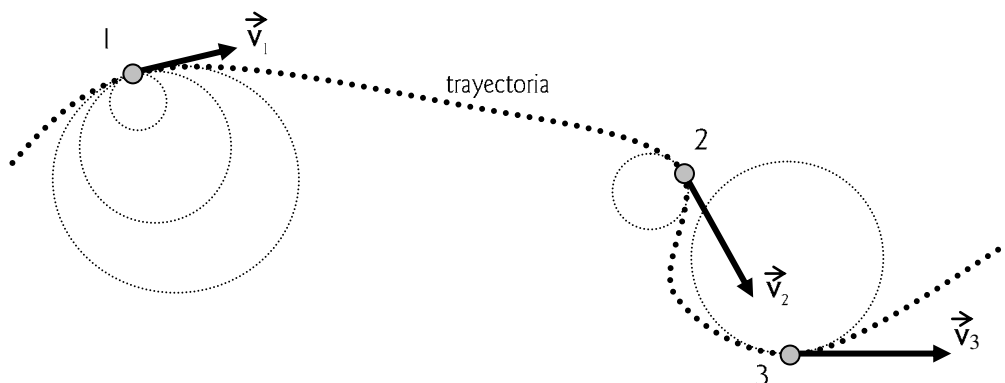
A partir de la observación de las curvas  $\theta = f(t)$  y  $s = f(t)$  se obtienen cualitativamente las de  $\omega = f(t)$  y  $v = f(t)$ . Se relacionan entre sí las del mismo espesor de trazo, como puede deducirse al tener en cuenta que  $\omega = d\theta/dt$  y  $v = ds/dt$ .

Hemos dicho que en cualquier tipo de movimiento circular se cumple:

$$v = \omega \cdot R \qquad a_t = dv/dt \qquad a_c = v \cdot \omega \qquad v = ds/dt$$

La componente centrípeta de la aceleración,  $\vec{a}_c$ , se debe al cambio de dirección de la velocidad lineal, como habíamos demostrado. De lo que se deduce que si la partícula se mueve sobre una curva distinta a la circunferencia, esa componente existe y está relacionada a "alguna circunferencia". Es decir, cualquier movimiento sobre una curva puede aproximarse a un movimiento circular, en un breve tiempo  $dt$ .

Si la partícula describe la trayectoria señalada en la figura siguiente, al pasar por los puntos 1, 2, 3, ... , la dirección de su velocidad es tangente a esa curva y a algunas circunferencias que toquen a la misma en dichos puntos:





Cuando estas circunferencias cumplen con la condición de tener:

- la misma derivada primera que la trayectoria en los puntos en que la tocan (igual tangente);
- la misma derivada segunda que la trayectoria en los puntos en que la tocan (igual curvatura),

pasan a llamarse:

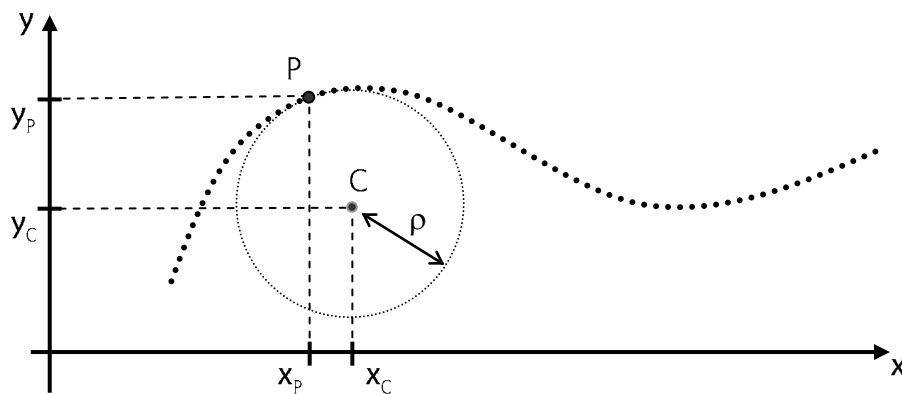
### CIRCUNFERENCIA OSCULATRIZ

Es la circunferencia que “besa” (le da un ósculo) a la curva en un punto de manera que, en ese punto, da lo mismo considerar que la partícula se mueve por la trayectoria real o que lo hace por esa circunferencia. (La velocidad en ese punto es la misma recorriendo uno u otro camino; y lo mismo sucede con la aceleración). Por lo tanto, si se puede hallar el radio  $\rho$  de dicha circunferencia (que es el radio de curvatura de la trayectoria), aparece el elemento que hace falta para calcular la componente centrípeta de la aceleración:

$$a_c = v^2/\rho$$

A simple vista podemos ver que a trayectorias con “curvas cerradas” corresponden circunferencias con  $\rho$  pequeño, y que a medida que se “abren” las curvas, el  $\rho$  aumenta. Luego, para el caso en que la curva se transforma en *recta*, el  $\rho$  se hace infinito y la *aceleración centrípeta cero*.

El radio  $\rho$  de la circunferencia osculatriz se calcula partiendo de la ecuación de la circunferencia y de la igualdad de derivadas primera y segunda, como señaláramos en párrafos anteriores.



$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = \rho^2$$

$$dy/dx = y' = - (x - x_c) / (y - y_c)$$

$$d^2y/dx^2 = y'' = - \rho^2 / (y - y_c)^3$$

En el punto P resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^2 = (x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2 \\ y'_{(P)} = - (x_p - x_c) / (y_p - y_c) \\ y''_{(P)} = - \rho^2 / (y_p - y_c)^3 \end{array} \right.$$

Combinando estas últimas ecuaciones se llega a :

$$\rho = [ ( 1 + y'_{(P)}{}^2 )^3 ]^{1/2} / y''_{(P)}$$

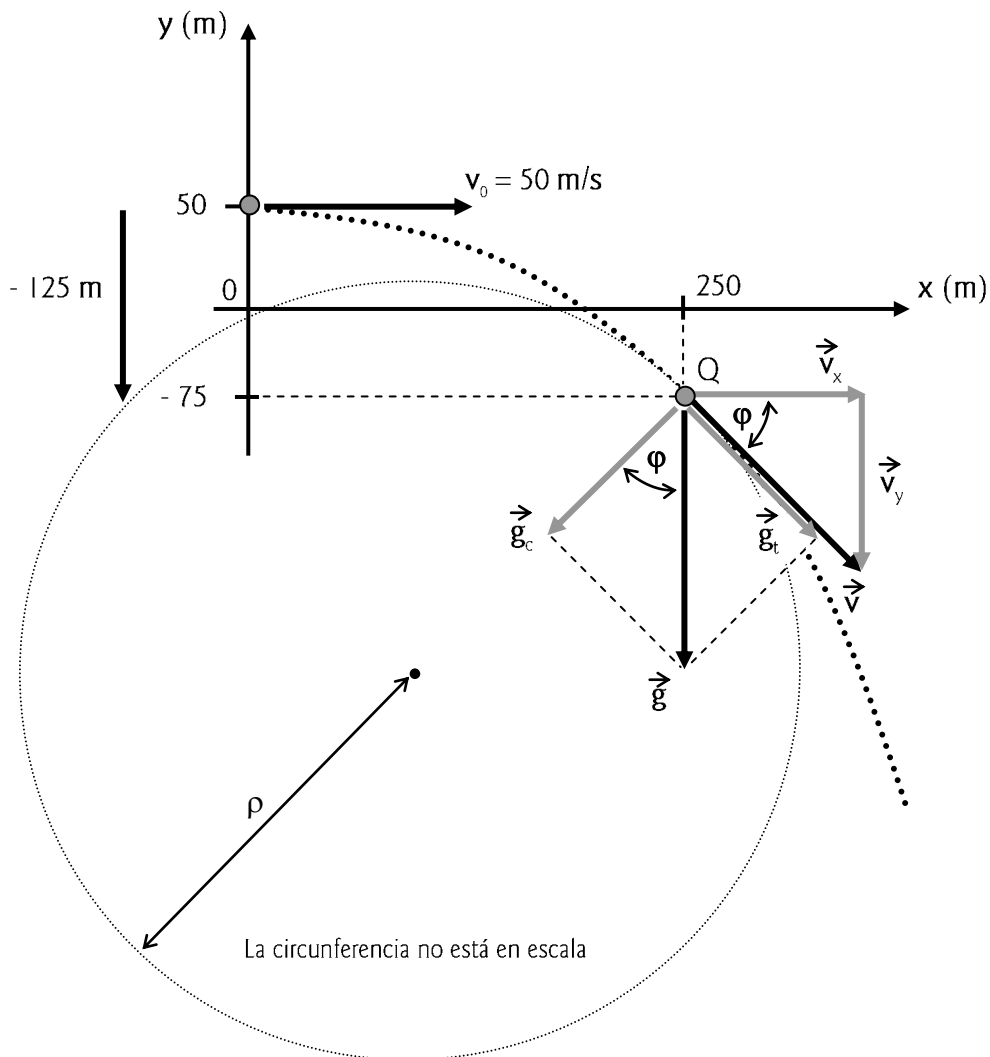
Verificaremos que esto es cierto en un punto cualquiera de la trayectoria parabólica correspondiente a un tiro horizontal.

**Ejemplo 19**

Desde 50 m de altura se lanza horizontalmente una piedra a 50 m/s . Calcular, considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$  , el radio  $\rho$  de la circunferencia osculatriz a 250 m del lanzamiento (medidos sobre la horizontal) aplicando: a) la aceleración centrípeta como componente de la aceleración de la gravedad; b) la fórmula de  $\rho$  .

Solución:

a)



En el punto Q , como en todos los de esta trayectoria, la aceleración es la de la gravedad, la que puede descomponerse en las componentes: *tangencial* ( $\vec{g}_t$  , paralela al vector  $\vec{v}$  ) y

centrípeta ( $\mathbf{g}_c$ , apunta al centro de la circunferencia osculatriz).

Luego:  $\mathbf{g}_c = \mathbf{v}^2 / \rho \iff \rho = \mathbf{v}^2 / \mathbf{g}_c$

con:  $\mathbf{g}_c = \mathbf{g} \cdot \cos \varphi$  y  $\varphi = \arctg \mathbf{v}_y / \mathbf{v}_x = \arctg [-\mathbf{g} \cdot t] / \mathbf{v}_0 = \arctg [-\mathbf{g} \cdot (\mathbf{x} / \mathbf{v}_0)] / \mathbf{v}_0$

Para  $\mathbf{x} = 250 \text{ m}$  resulta:  $\varphi = -45^\circ$  y  $\mathbf{g}_c = 7.071 \text{ m/s}^2$

con lo que:

$$\rho = (50^2 + 50^2) / 7.07 = 707.1 \text{ m}$$

b) Para el sistema de referencias adoptado en a),

$$y = y_0 - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot t^2 = y_0 - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}^2 / \mathbf{v}_0^2 = 50 - \mathbf{x}^2 / 500$$

de donde:

$$y' = -2 \cdot \mathbf{x} / 500 = -\mathbf{x} / 250 \iff y'_{(M)} = -250 / 250 = -1$$

$$y'' = -1 / 250 \iff y''_{(M)} = -1 / 250$$

$$\rho = [(1 + y'^2_{(M)})^3]^{1/2} / y''_{(M)} = [(1 + (-1)^2)^3]^{1/2} / 1 / 250 = [8]^{1/2} \cdot 250 = 707.1 \text{ m}$$

*¡ Igual que en el inciso a) !*

.....

### MOVIMIENTOS RELATIVOS

En los primeros párrafos de este capítulo de *CINEMÁTICA* ... hablamos de Sistemas de Referencias y dimos a entender que siempre nos referimos a “algo” que consideramos fijo, al hablar de una partícula quieta o que va cambiando de lugar. Es decir, los movimientos son siempre relativos y hasta aquí lo fueron preferentemente respecto de Tierra. Veamos ahora cómo deducir ecuaciones que nos permitan “ver” las partículas desde distintos Sistemas en movimiento entre sí.

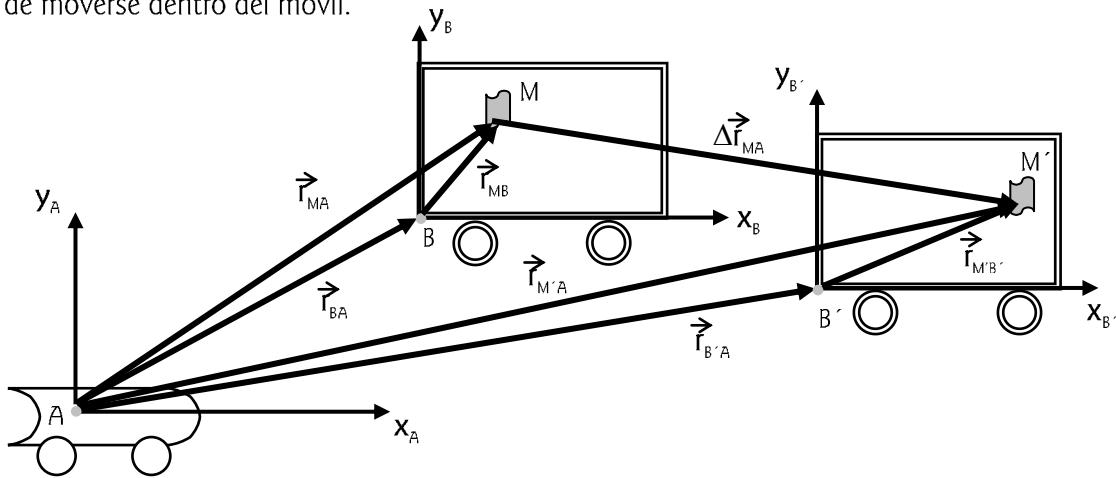
Si marchando en auto sobre una ruta nos encontramos con algún amigo que avanza en su vehículo en el mismo sentido, podemos apurar nuestra marcha hasta alcanzarlo y poner a la par ambos vehículos para dialogar a través de las ventanillas. Cuando esto sucede, cada auto se mueve a la misma velocidad respecto del suelo, pero a velocidad nula uno respecto del otro; si los movimientos son uniformes, y se hicieran transparentes todos los demás objetos del planeta excepto nosotros y nuestros vehículos, ni nos daríamos cuenta de la existencia de algún tipo de movimiento.

Pero si nos cruzamos con un carro que avanza sobre la misma ruta viniendo de frente, en sentido contrario, “sentimos” que la velocidad relativa de nuestro auto respecto del carro depende de nuestras respectivas velocidades en relación a tierra. Si avanzamos a 80 km/h, por ej., y el carro lo hace a 40 km/h, “se nota” que la rapidez entre auto y carro es superior a 80 km/h.

Los dos ejemplos mencionados nos dicen, intuitivamente, que es válido pensar que  $\vec{v}_{12} = \vec{v}_{1T} - \vec{v}_{2T}$ , al menos sobre una recta. (Los subíndices 1, 2 y T significan auto, carro y

Tierra, respectivamente.)

Pero veamos qué nos dice una situación completamente general, en la que dos móviles (A y B) se desplazan en un plano, y uno de ellos (B) transporta un objeto (M) que también es libre de moverse dentro del móvil.



De la figura, y haciendo una simple operación matemática, se obtiene:

$$\begin{array}{r}
 \vec{r}_{M'A} = \vec{r}_{B'A} + \vec{r}_{M'B'} \\
 - \vec{r}_{MA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{MB} \\
 \hline
 \Delta \vec{r}_{MA} = \Delta \vec{r}_{BA} + \Delta \vec{r}_{MB}
 \end{array}$$

que, para infinitésimas variaciones de posición, resulta:

$$\boxed{d\vec{r}_{MA} = d\vec{r}_{BA} + d\vec{r}_{MB}}$$

Dividiendo esta ecuación por dt inmediatamente surge:

$$\boxed{\vec{v}_{MA} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{MB}} \quad *$$

que equivale a :

$$\vec{v}_{MB} = \vec{v}_{MA} - \vec{v}_{BA}$$

y es lo mismo que entendíamos intuitivamente:  $(\vec{v}_{12} = \vec{v}_{1T} - \vec{v}_{2T})$

Derivando la \*, se obtiene:

$$\boxed{\vec{a}_{MA} = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_M}$$

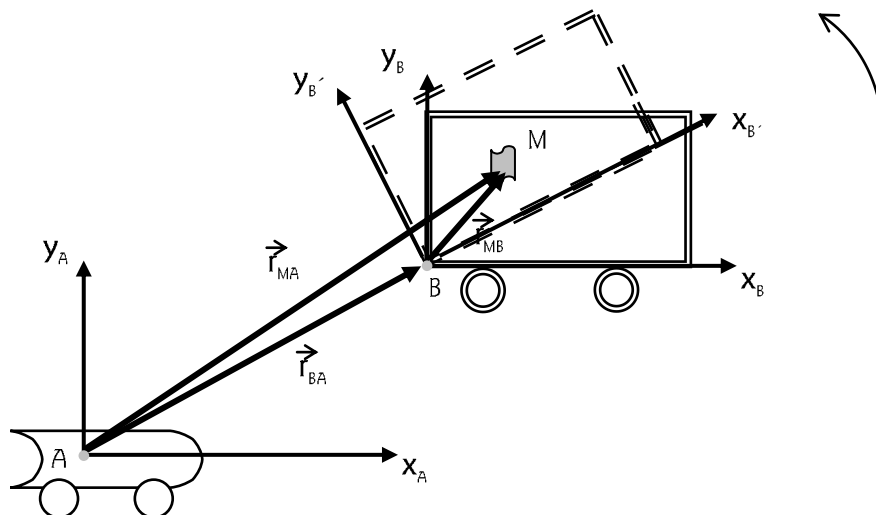
Es interesante destacar que si la velocidad de B respecto de A es constante, la aceleración del móvil M en uno de los Sistemas de Referencias (ubicado en A) es la misma en el otro Sistema de Referencias (ubicado en B):

$$\boxed{\text{Si } \vec{v}_{BA} = \text{cte.}, \Rightarrow \vec{a}_{BA} = 0 \therefore \vec{a}_{MA} = \vec{a}_{MB}}$$

¡ La aceleración de una partícula respecto de un Sistema de Referencias es la misma respecto de otro Sistema de Referencias, si ambos se mueven a velocidad constante !

[ Ten presente esto en el capítulo de *DINÁMICA de la Partícula* ]

Obsérvese que si B gira de la manera que se indica,



mantiéndose invariable la posición de M respecto del origen de coordenadas de A, y la posición del origen de B respecto de A, resultan nulas las velocidades  $\vec{v}_{MA}$  y  $\vec{v}_{BA}$ , por lo cual aparecería una contradicción en la ecuación de adición de velocidades:

$$\vec{v}_{MA}^0 = \vec{v}_{BA}^0 + \vec{v}_{MB}$$

dado que al girar B con su Sistema de Referencias,  $\vec{v}_{MB} \neq 0$ .

Lo que sucede es que la *ley de adición de velocidades* vista es válida sólo para el caso en que no hay rotación. Si bien en cualquier caso es cierto que  $\vec{r}_{MA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{MB}$ , la derivada de esta ecuación respecto del tiempo NO es una suma de velocidades. Puede demostrarse que la derivada respecto del tiempo de un vector en un sistema que gira es igual a la derivada respecto del tiempo de ese vector en un sistema fijo menos el producto vectorial de la velocidad angular por el vector en cuestión. Pero esto no es objeto de estudio en este capítulo de *CINEMÁTICA de la Partícula*.

Además,  $\mathbf{v}_{MA} = \mathbf{v}_{BA} + \mathbf{v}_{MB}$  es válida en casos en que nos referimos a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz. Si bien nuestros movimientos cotidianos cumplen con esa condición, es bueno tener en cuenta que la ley de adición de velocidades vista corresponde al caso particular en que  $\mathbf{v}_{BA}$  y  $\mathbf{v}_{MB}$  son mucho menores que  $c$  (velocidad de la luz  $\approx 300\,000$  km/s), como puede apreciarse en la expresión siguiente:

$$\mathbf{v}_{MA} = \frac{\mathbf{v}_{BA} + \mathbf{v}_{MB}}{1 + (\mathbf{v}_{BA} \cdot \mathbf{v}_{MB} / c^2)}$$

Por otra parte, también el espacio y el tiempo tienen otra dimensión en sistemas que se mueven a velocidades cercanas a la de la luz. Pero este es un tema de Relatividad Especial que excede a los capítulos de Mecánica Clásica que aquí tratamos. Sin embargo es oportuno señalar una vez más que el Universo es mucho más amplio y maravilloso que lo que nuestra intuición percibe; suceden cosas que no podemos “comprender” con los sentidos por la sencilla razón de que estamos adaptados al medio ambiente que nos engendró. No parece que necesitemos entender qué pasa a enormes velocidades cuando vivimos cotidianamente

“casi parados” respecto a la luz.

La teoría de la Relatividad Especial (y también la de la Relatividad General) ha sido verificada experimentalmente. Las personas que han estado en órbita alrededor de la Tierra viajaron a velocidades cercanas a 30 000 km/h. ¡Todavía pequeñísimas frente a la rapidez de la luz! Y sin embargo, en sus sensibles relojes atómicos, se pudo detectar que descendieron siendo millonésimas de segundo más jóvenes que quienes nos quedamos en el planeta.

Esto, que es incomprensible para nuestras “lentas” experiencias de vida, sin embargo se calcula sencillamente aplicando la ecuación

$$t = t_0 / [1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$$

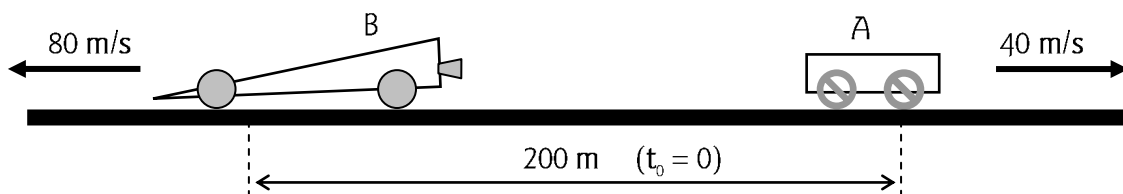
en la que  $t$  y  $t_0$  son tiempos medidos en sistemas de referencia distintos:  $t$  es el tiempo que mide quien está en “reposo”, y  $t_0$  el que registra en la nave que se desplaza con la rapidez  $v$ ;  $c$  es la velocidad de la luz.

Se deduce fácilmente que cuando  $v \ll c$  ambos tiempos son prácticamente coincidentes; ¡podemos cronometrar nuestros relojes con los de tierra aunque hayamos realizado un viaje en jet a 1000 km/h !

Es imposible superar la velocidad de la luz. Pero si pudiésemos viajar ida y vuelta al grupo de estrellas Centauro, a más de 4,3 años-luz de distancia, a una rapidez del orden del 90% de  $c$ , demoraríamos 9.55 años para quienes nos esperan en la Tierra; en cambio para los viajeros habrían transcurrido 4.16 años.

### Ejemplo 20

Los móviles A y B de la figura se encuentran a 200 m en el instante  $t_0 = 0$ , marchando en sentidos opuestos con rapidez constante a 40 m/s y a 80 m/s respectivamente.



Calcular:

- La velocidad de A respecto de B.
- La velocidad de B respecto de A.
- El instante en que A y B estuvieron en el mismo lugar.
- La distancia a la que se encontraban un segundo antes de  $t_0 = 0$ .

Trazar:

Los gráficos horarios  $x = f(t)$  respecto de Tierra para cada vehículo, con distintos sistemas de referencia, y el gráfico horario  $x_{AB} = f(t)$ .

Solución:

I. Tomando el Sistema de Referencias:  $\longrightarrow +$ , de  $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$ , dado que

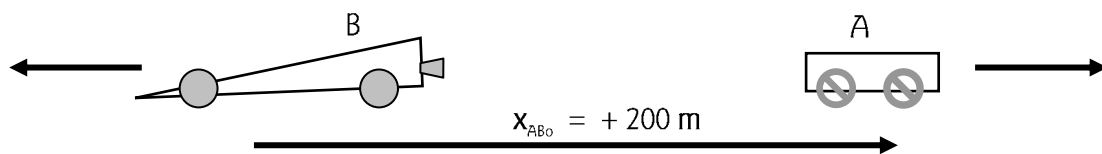
las componentes de los vectores coinciden con éstos (que se encuentran sobre la misma recta), resulta:

a)  $\boxed{v_{AB}} = v_A - v_B = 40 \text{ m/s} - (-80 \text{ m/s}) = \boxed{+120 \text{ m/s}}$

b)  $\boxed{v_{BA}} = v_B - v_A = -80 \text{ m/s} - (+40 \text{ m/s}) = \boxed{-120 \text{ m/s}}$

Obsérvese que  $\vec{v}_{AB}$  es la velocidad de A respecto de B. Es como si B estuviera detenido y A se moviera alejándose de B hacia la derecha (en el sentido del Sistema de Referencias, en este caso); por eso  $v_{AB} > 0$ . Y con el mismo criterio  $v_{BA} < 0$ .

c) Si consideramos a B detenido y a A moviéndose con velocidad constante  $\vec{v}_{AB}$ , vale la ecuación general usada en MRU:  $x_{AB} = x_{AB0} + v_{AB} \cdot t$ . Para el caso:

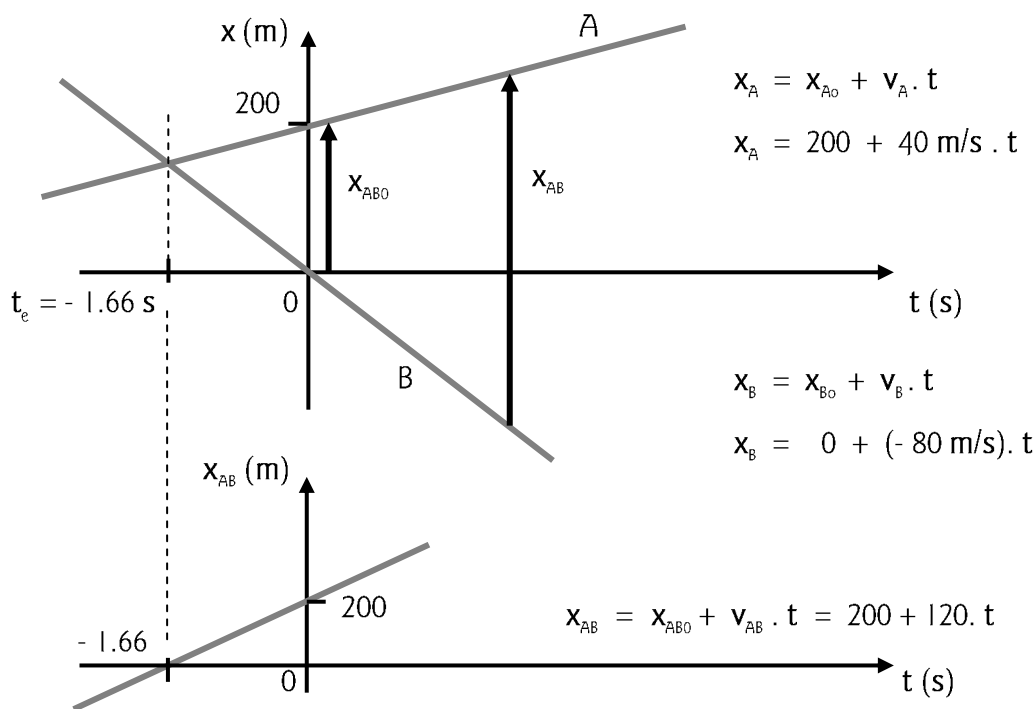


$0 = 200 \text{ m} + 120 \text{ m/s} \cdot t_e \quad \therefore \quad \boxed{t_e = -1.66 \text{ s}}$

[ Se interpreta al signo “-” como que el hecho sucedió 1.66 s antes de  $t_0 = 0$ . ]

d)  $\boxed{x_{AB}} = x_{AB0} + v_{AB} \cdot t = 200 \text{ m} + 120 \text{ m/s} (-1 \text{ s}) = \boxed{+80 \text{ m}}$

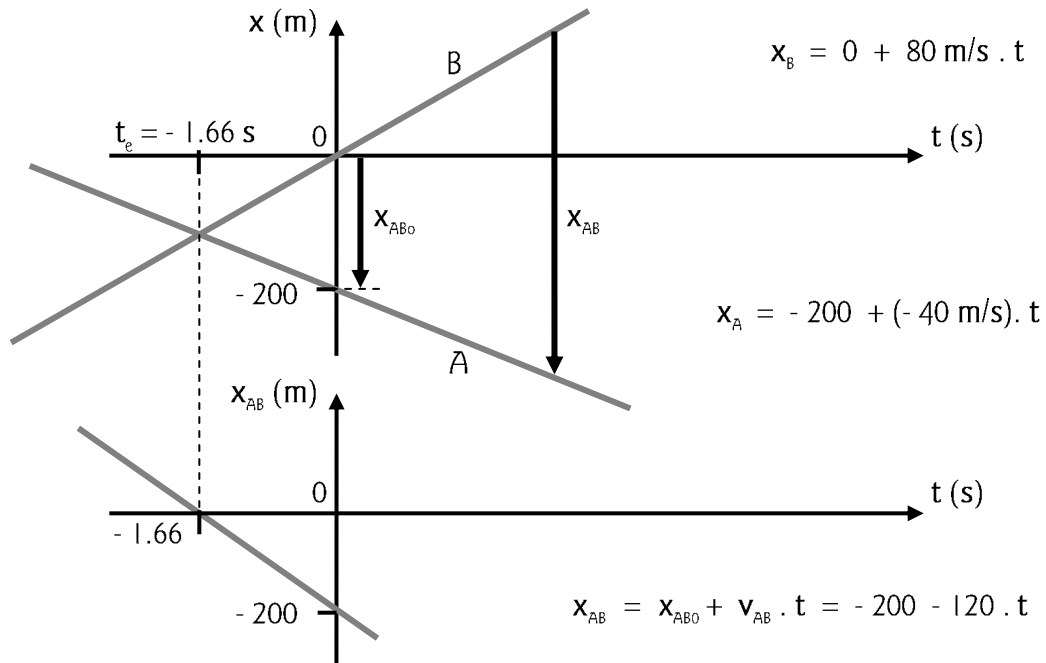
En cuanto a los gráficos horarios  $x = f(t)$  respecto de Tierra, si consideramos al CERO del Sistema de Referencias elegido como ubicado en el lugar en que estaba B en  $t_0 = 0$ , resulta:



II. Tomando el Sistema de Referencias:  $\leftarrow$ , resulta:

a)  $v_{AB} = -120 \text{ m/s}$     b)  $v_{BA} = +120 \text{ m/s}$     c)  $t_e = -1.66 \text{ s}$     d)  $x_{AB} = -80 \text{ m}$

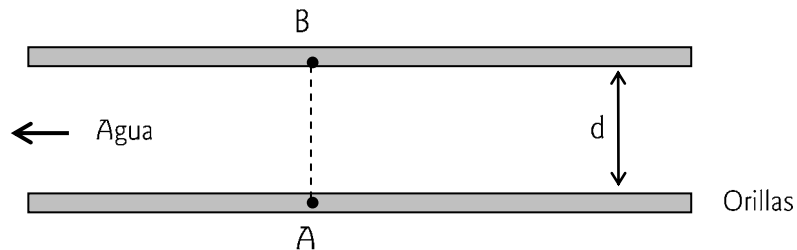
En cuanto a los gráficos horarios  $x = f(t)$  respecto de Tierra, si consideramos al CERO del Sistema de Referencias elegido como ubicado en el lugar en que estaba B en  $t_0 = 0$ , resulta:



**Ejemplo 21**

Un nadador cruza un canal de orillas paralelas nadando a  $8 \text{ m/s}$  respecto del agua, que a su vez avanza a  $6 \text{ m/s}$  respecto de tierra.

Determinar en cuál de los casos llega primero a la orilla de enfrente: a) nadando siempre en forma perpendicular a las orillas; b) nadando de manera que llegue justamente al punto opuesto (B) al de la largada (A), como indica la figura.



Solución:

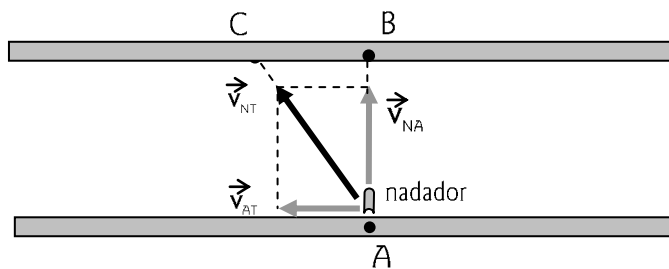
Nadar a cierta velocidad respecto del agua de un río es como caminar a cierta velocidad sobre una cinta transportadora en movimiento. La velocidad respecto a tierra firme resulta:

$$\vec{v}_{NT} = \vec{v}_{NA} + \vec{v}_{AT}$$

en donde los subíndices significan: N : nadador ; T : tierra ; A : agua

a) Nadando siempre en forma perpendicular a las orillas y a la corriente de agua:



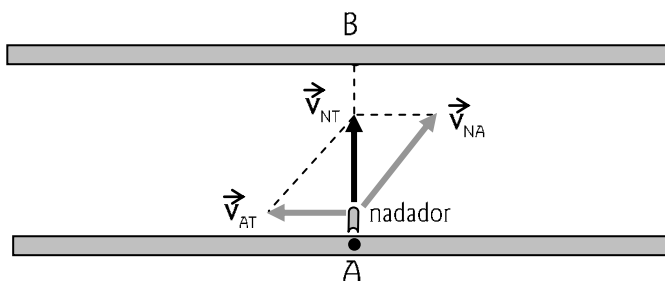


el nadador aparece en el punto C de la orilla opuesta, porque lo arrastra la corriente. El tiempo que tarda en llegar se puede calcular con:

$$t = \overline{AC} / v_{NT} \quad \text{o con} \quad t = d/v_{NA}$$

como puede deducirse fácilmente.

b) Nadando de manera de llegar al punto B :



se observa que para el mismo módulo de  $\vec{v}_{NA}$  y la misma velocidad del agua, el tiempo para llegar al punto B es mayor que para llegar al C del caso anterior, ya que  $v_{NT}$  es menor que  $v_{NA}$  en esta situación:

$$t = d/v_{NT}$$

### Ejemplo 22

Un proyectil es lanzado hacia adelante con una velocidad  $\vec{v}_{pa}$ , desde un cañón montado en un avión que vuela horizontalmente con una velocidad  $\vec{v}_{aT}$ . Hallar: a) La ecuación de la trayectoria del proyectil relativa a tierra. b) La ecuación de la trayectoria del proyectil respecto del avión. c) La ecuación de la trayectoria del avión relativa al proyectil.

Solución:

a)

$$\vec{v}_{pT} = \vec{v}_{pa} + \vec{v}_{aT}$$

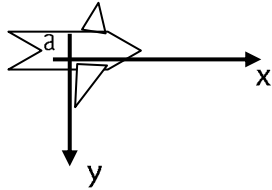
$$v_{pT} = v_{pa} + v_{aT}$$

$$y_{pT} = H - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$x_{pT} = x_0 + v_{pT} \cdot t$$

$$y_{pT} = H - \frac{1}{2} g \cdot \left[ \frac{(x_{pT} - x_0)}{(v_{pa} + v_{aT})} \right]^2$$

b)

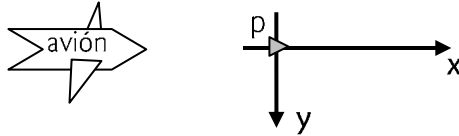


$$y_{pa} = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$x_{pa} = v_{pa} \cdot t$$

$$y_{pa} = \frac{1}{2} g \cdot \left( \frac{x_{pa}}{v_{pa}} \right)^2$$

c)



$$\vec{v}_{ap} = -\vec{v}_{pa}$$

$$v_{ap} = -v_{pa}$$

$$y_{ap} = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad x_{ap} = v_{ap} \cdot t = -v_{pa} \cdot t$$

$$y_{ap} = -\frac{1}{2} g \cdot \left[ \frac{x_{ap}}{-v_{pa}} \right]^2 = -\frac{1}{2} g \cdot \left( \frac{x_{ap}}{v_{pa}} \right)^2$$

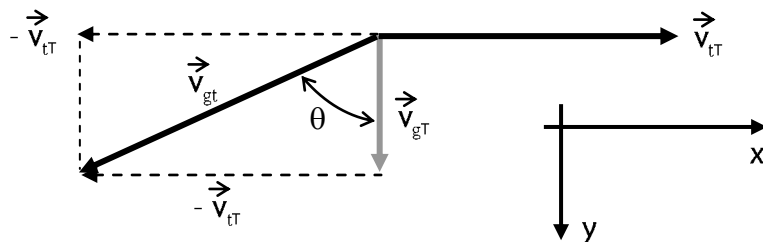
### Ejemplo 23

En los días en que llueve y no hay viento, las gotas de agua caen verticalmente. Si atravesamos la lluvia con un auto o un tren, vemos que las gotas trazan líneas oblicuas en los vidrios, como consecuencia de los movimientos relativos. En el caso en que nos desplazemos a 108 km/h sobre una vía o un camino horizontal, y las gotas caen verticalmente con una rapidez de 15 km/h, calcular el ángulo que forman sobre los vidrios aproximadamente verticales del vehículo que ocupamos.

Solución:

Si usamos los siguientes símbolos: T : Tierra ; t : tren ; g : gota se puede escribir la siguiente ecuación de las velocidades relativas:

$$\vec{v}_{gt} = \vec{v}_{gT} - \vec{v}_{tT}$$



de la que se desprende:

$$v_{gtx} = v_{gTx} - v_{tTx}$$

$$v_{gty} = v_{gTy} - v_{tTy}$$

Pero si la gota cae verticalmente y el vehículo marcha horizontalmente,

$$v_{gTx} = 0 \quad y \quad v_{tTy} = 0 \quad \therefore \quad v_{gtx} = -v_{tTx} \quad y \quad v_{gty} = v_{gTy}$$

$$v_{gt} = (v_{gtx}^2 + v_{gty}^2)^{1/2} = [(-v_{tTx})^2 + (v_{gTy})^2]^{1/2}$$

$$\text{tg } \theta = -v_{tTx} / v_{gTy}$$

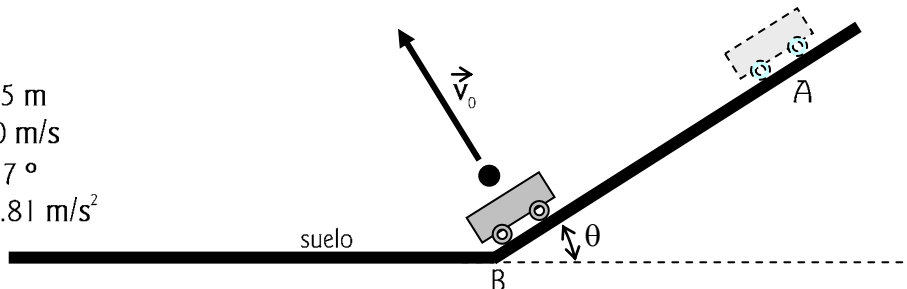
### Ejemplo 24

Un carrito se encuentra en reposo sobre un plano inclinado, en el punto A. En un instante determinado ( $t_0 = 0$ ) se lo suelta y comienza a deslizarse libremente, sin roce, por dicho plano.

Al llegar a B, justito casi tocando el plano horizontal del suelo, desde el carrito se lanza una partícula con  $\vec{v}_0$  respecto del carrito, en dirección perpendicular al plano inclinado. Calcular en qué punto del suelo la partícula hace impacto.

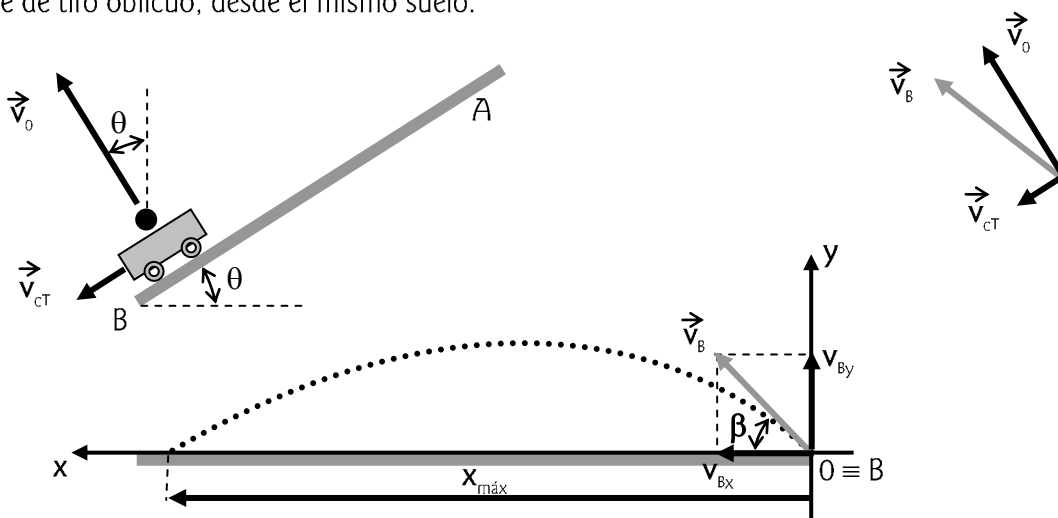
DATOS:

- $\overline{AB} = 8.5 \text{ m}$
- $v_0 = 30 \text{ m/s}$
- $\theta = 37^\circ$
- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$



Solución:

Este es un caso de movimiento relativo. Es conveniente calcular cuál es la velocidad de la partícula respecto del suelo, cuando el carrito llega a B, y transformar el problema en uno simple de tiro oblicuo, desde el mismo suelo:



$$v_{cT} = (\overline{AB} \cdot 2 \cdot g \cdot \text{sen } \theta)^{1/2} = (8.5 \text{ m} \cdot 2 \cdot 9.81 \cdot \text{m/s}^2 \cdot 0.6)^{1/2} = 10 \text{ m/s}$$

$$v_{cTx} = v_{cT} \cdot \cos \theta = 10 \text{ m/s} \cdot 0.8 = 8 \text{ m/s}$$

$$v_{cTy} = -(v_{cT} \cdot \text{sen } \theta) = -(10 \text{ m/s} \cdot 0.6) = -6 \text{ m/s}$$

$$v_{0x} = v_0 \cdot \text{sen } \theta = 30 \text{ m/s} \cdot 0.6 = 18 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \cos \theta = 30 \text{ m/s} \cdot 0.8 = 24 \text{ m/s}$$

$$v_{Bx} = v_{0x} + v_{cTx} = 18 \text{ m/s} + 8 \text{ m/s} = 26 \text{ m/s}$$

$$v_{By} = v_{0y} + v_{cTy} = 24 \text{ m/s} - 6 \text{ m/s} = 18 \text{ m/s}$$

$$\therefore \boxed{v_B = (v_{Bx}^2 + v_{By}^2)^{1/2} = 31.62 \text{ m/s}} \quad \text{tg } \beta = v_{By} / v_{Bx} = 0.692 \quad \boxed{\beta = 34.7^\circ}$$

Con estos datos del tiro oblicuo es fácil hallar el alcance máximo sobre la superficie horizontal:

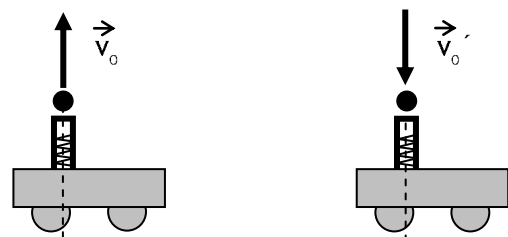
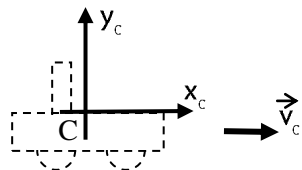
$$\boxed{x_{\text{máx}} = v_B^2 \cdot \text{sen } 2\beta / g = 1000 \text{ m}^2 \cdot 0.936 / 9.81 \text{ m/s}^2 = 95.4 \text{ m}}$$

**Experiencias sencillas**

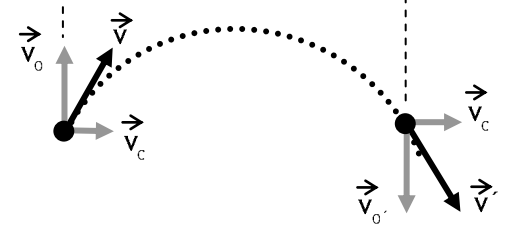
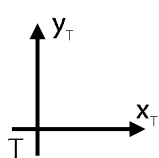
\* Si lanzas con la mano una pelotita de golf verticalmente hacia arriba, verás que asciende más alto cuando sale despedida de tu mano a mayor velocidad ( recuerda:  $h_{\text{máx}} = v_0^2 / 2g$  ). Pero si con el mismo movimiento de tu mano (aproximadamente igual velocidad inicial) lanzas una pelotita de ping pong o un globo, observarás que éstos no alcanzan la altura de la pelotita de golf. Esto se debe a que para deducir la expresión anterior no tuvimos en cuenta la presencia del aire, lo que comprenderás mejor luego de estudiar el capítulo de *DINÁMICA de la Partícula* .

\* Si viajas en auto, tren o avión a velocidad constante, puedes lanzar verticalmente hacia arriba cualquier objeto y recibirlo en tu mano en su caída. Y si de un tren se trata, por ejemplo, podrás apreciar a través de su ventanilla que durante el tiempo de vuelo del objeto el paisaje se movió. Luego, desde el punto del vista de algún observador externo al tren, ¿hubo un lanzamiento vertical u oblicuo?... Obviamente, para un sistema de referencias anclado en Tierra, la velocidad de salida del objeto es  $\vec{v}$  (oblicua), con componentes horizontal ( $\vec{v}_t$ , velocidad del tren) y vertical ( $\vec{v}_o$ , la que vos veías en el vagón). Se puede simular esta experiencia con un carrito de juguete y un cañoncito a resorte montado en él:

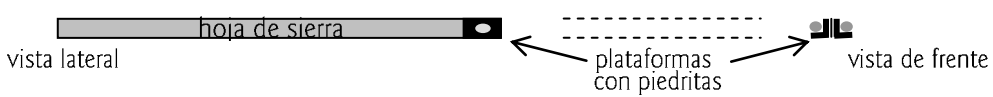
Desde el carrito:



Desde la Tierra:



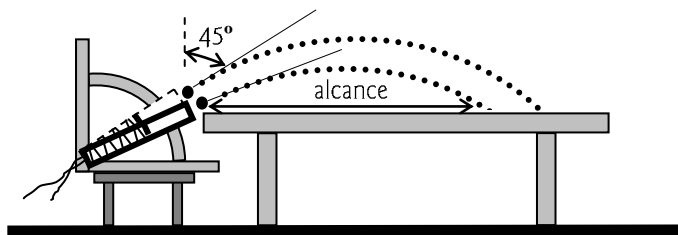
\* Toma una lámina metálica flexible (por ejemplo una hoja de sierra) y pega en uno de sus extremos un par de plataformas de cartón en forma de “ele”, para depositar sobre ellas sendas cuerpitos como pedazos de tiza o piedritas, como indica la figura:



Ahora flexiona la hoja de sierra y suelta el extremo de las plataformas, de manera que una piedrita salga horizontalmente y la otra comience a caer en forma vertical, desde velocidad inicial CERO ( se le quitó el piso ). Verás que, cualquiera sea la altura desde la que hayas hecho la experiencia, ambas piedritas llegarán al suelo simultáneamente.

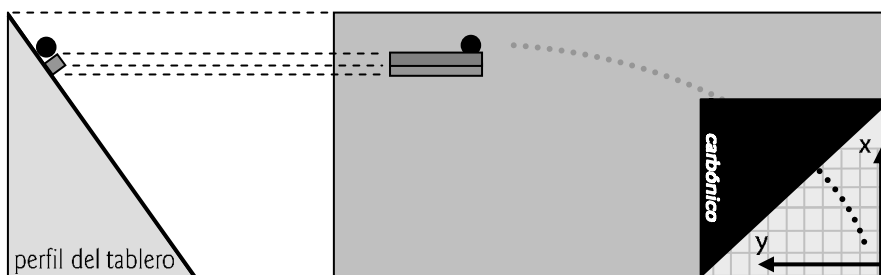
\* Fabrica un cañoncito con un tubo de plástico rígido y un resorte en su interior, comprimiendo el resorte con un hilo que soltarás para que el “cañoncito” lance el

proyectil (un pedazo de tiza o una bolita). Con el auxilio de un transportador toma la medida de los ángulos de disparo, para verificar que los lanzamientos a  $45^\circ$  son de mayor alcance, medidos en el mismo nivel de salida de la boca del cañón.



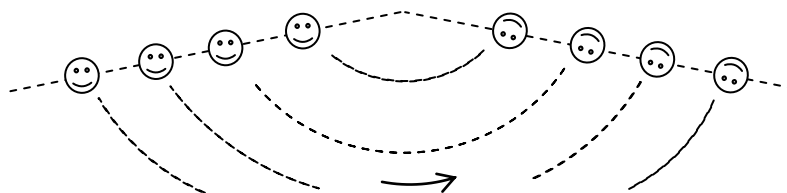
En el verano, en forma refrescante y divertida, se puede observar que el chorro de agua que sale de una manguera con la que estamos regando llega más lejos para determinado ángulo de salida, que a simple vista parece estar a unos  $45^\circ$ .

\* Con buena aproximación puedes verificar que la trayectoria en un tiro oblicuo es una parábola. Sobre una tabla con papel milimetrado y papel carbónico colocada como un plano inclinado, lanza horizontalmente una esfera (bolilla de acero) para que ruede sobre el carbónico. Al levantar éste verás sobre el papel milimetrado una curva que puedes verificar fácilmente corresponde a una parábola: para distintos puntos de la curva toma las coordenadas  $x$  e  $y$  y verifica que se cumple la ecuación:  $y = x^2$ .



\* Si tienes en cuenta que cada tramo de la cadena de una bicicleta tiene la misma rapidez respecto de la misma, y mides los diámetros del piñón, de la corona y de una de las ruedas, como así también la longitud de la palanca del pedal, puedes calcular las vueltas que debes ejecutar con los pedales (y luego *verificarlo* andando en bicicleta) para avanzar, por ejemplo, tres cuerdas.

\* También puedes experimentar con tres compañeros las cuestiones de las velocidades angulares y tangenciales. Si se colocan a una distancia de 1 m entre sí y pretenden conservar la línea imaginaria que los une mientras giran alrededor de un punto alejado a 2 m de la persona más cercana, calcula y *verifica* cuántos pasos debe realizar cada uno para dar una vuelta en el mismo tiempo, si cada uno se esfuerza por hacer el mismo paso, de 0.4 m, por ejemplo.



# **DINÁMICA**

## de la Partícula



## DINÁMICA de la Partícula

La parte de la física que estudia las causas de los movimientos en general (alguno de los cuales se analizó en *CINEMÁTICA de la Partícula*), se llama *Dinámica*. La que veremos a continuación es la correspondiente a la partícula, considerada aquí como un objeto grande en relación a las partículas subatómicas y, además, moviéndose a velocidades mucho menores que la de la luz. Lo que estudiaremos es, pues, la Dinámica del campo de la *Mecánica Clásica*.

Isaac Newton (cuya biografía y otros datos de interés pueden encontrarse en casi todos los buenos libros universitarios existentes en plaza) resumió en tres Principios o Leyes sus observaciones de la naturaleza en el dominio de la dinámica. En ellos aparecen magnitudes físicas que conviene definir antes de analizar a estos Principios uno por uno.

**Masa:** Es una cantidad escalar generalmente representada por la letra  $m$ . En principio, y a efectos de lograr una rápida interpretación, diremos que *masa* es la medida de la cantidad de materia que posee un cuerpo. Cuantos más átomos contenga un dado volumen de materia, mayor será su masa; y cuanto más grandes sean esos átomos (en cantidad de partículas subatómicas), mayor será también su masa. Pero para identificarla como "magnitud" es necesario definir cómo se la mide: con qué se la compara.

Se toma como masa patrón a un cuerpo de platino-iridio que se encuentra en un laboratorio de Francia, cuya masa se define de *un kilogramo* -  $1 \text{ kg}$  -. Ahora, todas las masas de los demás cuerpos se compararán con la patrón usando una balanza de platillos.

( Existe otra manera de definir la "masa" y de establecer cuándo dos cuerpos tienen igual masa. Ver el método de Mach en "Mecánica Elemental", de J.G.Roederer, para la determinación de la "masa inercial". Por otra parte, la masa varía con la velocidad, aunque esto solo se aprecia a velocidades importantes frente a la de la luz. (Nuestro mundo "clásico" de Física A está lejos de esta realidad). )

### *Ímpetu lineal*

(o "cantidad de movimiento"): Es una magnitud vectorial generalmente representada por  $\vec{p}$ . Depende del Sistema de Coordenadas, ya que es el producto de la masa de un cuerpo por su velocidad:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad [p] = [m] \cdot [v] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

**Fuerza:** Es una magnitud que representa la intensidad de la interacción entre dos cuerpos. Pero cuando hablamos de la acción sobre uno de estos cuerpos por parte del otro, aparecen también la dirección y el sentido de la fuerza. Por otra parte, si dos o más cuerpos actúan sobre un tercero, la fuerza neta (o resultante) se obtiene, según la experiencia lo indica, sumando las fuerzas con las reglas de la suma de vectores; por lo cual la *fuerza* es una magnitud vectorial, generalmente representada por  $\vec{f}$ .

## PRINCIPIOS DE NEWTON

### *1er. Principio*

(Principio de inercia)

" Todo cuerpo (partícula) permanece en reposo o se mueve con MRU a menos que sobre él actúen fuerzas que modifiquen dicho estado ".



En realidad, una partícula puede estar en reposo o moverse con movimiento rectilíneo uniforme aún en presencia de otros cuerpos con los que interactúa. Para ello debe darse la situación de que el conjunto de las fuerzas que el medio ambiente (los otros cuerpos) le aplica debe equivaler a una fuerza neta CERO.

$$\sum \vec{f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{cte. (en particular, } \vec{p} = 0 \text{)}$$

Analiza qué le pasa a un auto que avanza por el tramo recto de una ruta horizontal, a 110 km/h . ¿Hay fuerzas actuando sobre el auto? .... Evidentemente sí, porque hay “medios ambientes” actuando sobre él: el piso, el aire, la Tierra. Entonces hay más de una fuerza, aunque el efecto es como si no la hubiera, a juzgar por el desplazamiento con velocidad constante del vehículo. La suma vectorial de todas esas fuerzas vale CERO.

2do. Principio  
(Principio de masa)

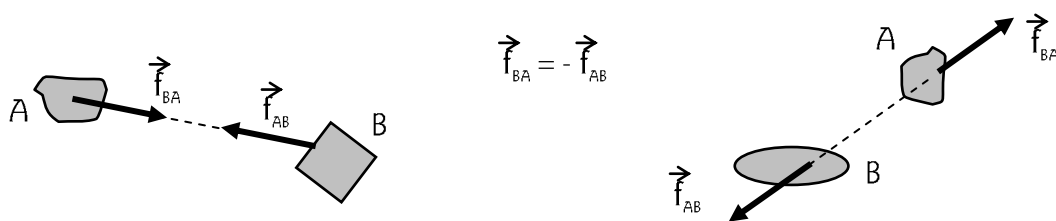
“ Si sobre una partícula existe una fuerza neta como consecuencia de su interacción con varios cuerpos, se cumple:  $\sum \vec{f} = d\vec{p} / dt$  ”

ecuación que, en caso de que la masa no se altere durante la aplicación de las fuerzas, se escribe:

$$\boxed{\sum \vec{f}} = d(m\vec{v})/dt = m \cdot d\vec{v}/dt = \boxed{m \cdot \vec{a}}$$

3er. Principio  
(Principio de acción y reacción)

“ Cuando interactúan dos cuerpos, las acciones dinámicas (“fuerzas”) entre ellos aparecen en forma de pares a los que se llama acción-reacción. Si un cuerpo A interactúa con otro B, el cuerpo A le ejerce al B una fuerza  $\vec{f}_{AB}$ , mientras que el B ejerce sobre el A, en la misma dirección, una fuerza de igual intensidad pero de sentido contrario:  $\vec{f}_{BA}$  ” .



Estos son los tres Principios que dan fundamento a la Mecánica Clásica. Son válidos los tres, si bien el 1er. Principio parece una consecuencia del 2do. Pero esta cuestión será analizada más adelante en “Sistemas No Inerciales” .

Los cuerpos interactúan en contacto o a distancia. Podemos empujar, sujetar, ... (fuerzas de contacto), o dejar caer algún cuerpo a tierra o levantar agujas de una mesa con un imán (fuerzas de acción a distancia).

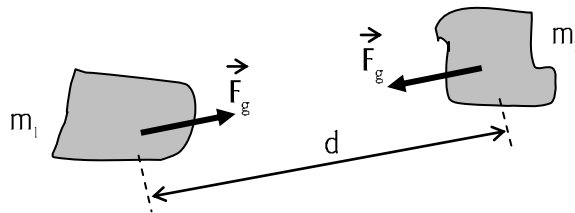
En la Naturaleza existen sólo tres tipos de fuerzas: *gravitatorias, electromagnéticas y nucleares* (aunque éstas últimas, de acción a muy corta distancia entre los componentes de cada núcleo

atómico, pueden dividirse en dos: fuerzas *fuertes* y fuerzas *débiles*). Si un cuerpo cae, es porque sobre él actúa una fuerza gravitatoria; si un material plástico frotado atrae a pequeños objetos, es porque entre ellos aparecen fuerzas eléctricas (electromagnéticas); si un cuerpo se apoya sobre una mesa, lo sujetan fuerzas electromagnéticas ...

Todas las partículas, cualquiera sea su masa, se atraen entre sí. Responden a la Ley Universal de Atracción Gravitatoria, que se expresa así:

$$F_g = G \cdot m_1 \cdot m_2 / d^2$$

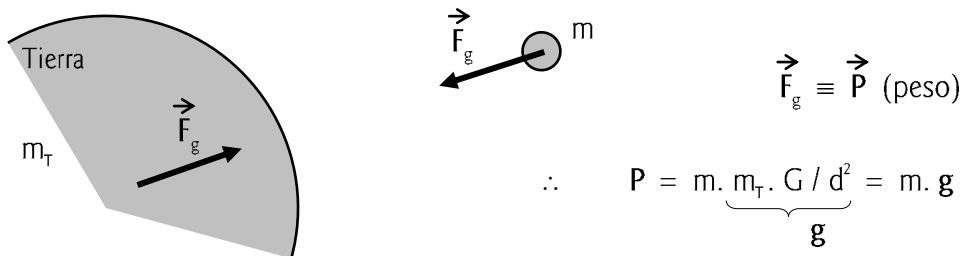
y significa que los cuerpos se aplican entre sí fuerzas de atracción (llamadas gravitatorias) proporcionales a sus masas e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que los separa.



Las fuerzas gravitatorias son muy pequeñas. Son, aproximadamente, ¡  $10^{40}$  ! veces más pequeñas que las electromagnéticas, a pesar de que los golpes que nos damos al tropezar y caer sobre el suelo debido a la atracción del planeta parecieran indicar lo contrario. Por eso la constante G, llamada *constante de gravitación universal*, tiene tan pequeño valor:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

Lo que sucede entre dos partículas cualesquiera, sucede entre la Tierra (enorme partícula) y otro cuerpo. En tal caso la fuerza de atracción gravitatoria se llama *peso* :



Sería bueno que verifiques, con cuentas muy sencillas, que la influencia gravitatoria de los planetas sobre las personas es despreciable. ¡Ni hablar de la de las estrellas, muchísimo más lejanas! . Si llamamos  $m_h$  a la masa de un hombre que vive en la Tierra,  $M_j$  a la masa de Júpiter,  $d_{jT}$  a la distancia entre este planeta y el nuestro, aplicando  $F_g = G \cdot m_h \cdot M_j / d_{jT}^2$  verificamos que la atracción gravitatoria de Júpiter sobre cada uno de nosotros es menor que la de un mueble cercano. Y cuando estudies las características de las ondas electromagnéticas (el otro modo con el que podrían influenciarnos los astros), habrás deducido que *la astrología no tiene fundamentos científicos* sobre los que basarse.

En cuanto a las masas, las consideramos constantes porque las supondremos en todos los casos en reposo o moviéndose a velocidades muy, muy lejanas a la de la luz en nuestro sistema de referencia. Esto significa que para lograr una aceleración determinada, habremos de aplicar a la partícula de cierta masa la misma fuerza, independientemente del estado de reposo o movimiento de dicha partícula.

Por último, si la masa es enorme (como por ejemplo la de un agujero negro), también se modifican en su entorno el espacio y el tiempo. Esto ha sido comprobado por muchísimas experiencias, que no serán tratadas aquí.

### UNIDADES DE MEDIDA


A lo largo del texto usaremos el *Sistema Internacional de Unidades (SIU)*, adoptado por el *Si.Me.L.A. (Sistema Métrico Legal Argentino)*, por lo que nos referiremos a éste en primer término. Y citaremos a otros sistemas a efectos de ver cómo están relacionadas las unidades de medida de las mismas magnitudes físicas.

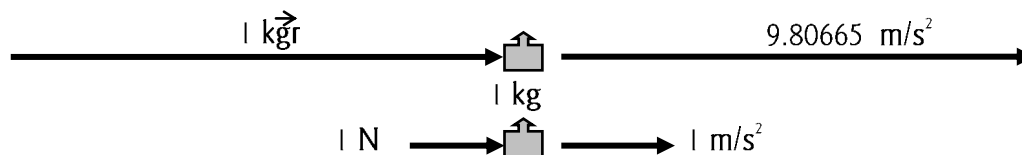
En 1971 la Conferencia General de Pesos y Medidas (CGPM) seleccionó como unidades básicas de medida a las de siete magnitudes: *longitud, masa, tiempo, corriente eléctrica, temperatura termodinámica, cantidad de sustancia e intensidad luminosa*, que constituyen la base del *SIU*. Además de los procedimientos operacionales que indican cómo se producen las siete unidades básicas en un laboratorio, la CGPM fija los símbolos para representarlas y señala cómo, a partir de estas unidades fundamentales, se llega a las unidades derivadas.

En este curso de Física, por los temas que se abordan, utilizamos del *SIU* solamente las unidades fundamentales de longitud (*metro m*), masa (*kilogramo kg*) y tiempo (*segundo s*), a partir de las cuales deducimos las unidades de otras magnitudes, como las de *ímpetu lineal y fuerza*:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad [p] = [m] \cdot [v] = [m] \cdot [\Delta x] / [t] = \text{kg} \cdot \text{m/s} \\ \vec{f} &= m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad [f] = [m] \cdot [a] = [m] \cdot [\Delta x] / [t]^2 = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \end{aligned}$$

A la unidad de fuerza (unidad derivada) en el *SIU* se la llama *Newton (N)*. Es decir,  $1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1 \text{ N}$ . Físicamente significa que si a una partícula, cuya masa es de  $1 \text{ kg}$ , se le aplica una fuerza de  $1 \text{ N}$ , la partícula adquiere una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$ . O sea, si sabemos qué es  $1 \text{ kg}$  (ese cilindro de platino e iridio que está en Francia y que se usa de patrón universal), podemos saber qué es  $1 \text{ N}$  al observar que bajo tal fuerza ese *kilogramo* se acelera  $1 \text{ m/s}^2$  (que es medible).

En el *Sistema Técnico de Unidades* aparece como unidad fundamental la de la *fuerza*: el  $\text{kgf}$ , y se deduce la unidad de la masa, la **UTM** (Unidad Técnica de Masa). Se dice que el kilogramo masa patrón (aquel, el de Francia: ) , cuando se encuentra a nivel del mar en la latitud de  $45^\circ$  en donde la aceleración de la gravedad es de  $9.80665 \text{ m/s}^2$ , tiene un peso de  $1 \text{ kgf}$ . Con lo que podemos determinar la equivalencia entre el  $\text{kgf}$  y el  $\text{N}$ :



Luego:

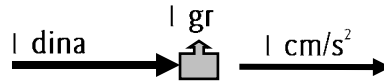
$1 \text{ kgf} = 9.80665 \text{ N} \approx 9.8 \text{ N}$
---

En el *Sistema "c.g.s."* se dan como unidades fundamentales las de la *longitud, la masa, y el tiempo*: el centímetro (*cm*), el gramo (*gr*) y el segundo (*s*), respectivamente. De manera que la unidad de medida de la fuerza, en *este Sistema*, se deduce de la *Ley de Newton*:

$$[F] = [m] \cdot [a] = [m] \cdot [v] / [t] = [m] \cdot [\Delta x] / [t]^2$$

∴ En el c.g.s. :  $[F] = \text{gr. cm/s}^2 = 1 \text{ dina}$  (a veces se escribe dyn)

Quiere decir que si a un cuerpo de masa 1 gr ( la milésima parte de 1 kg ), se le imprime una fuerza con la cual logra una aceleración de 1 cm/s<sup>2</sup>, esa fuerza es de una dina:



Ahora, ¿a cuántas dinas equivale 1 N ?

El procedimiento de “aislar” entre paréntesis a las unidades de medida, como veremos a continuación, es válido para pasar cualquiera de ellas de cualquier sistema de medidas a otro. Naturalmente, las que sean de la misma magnitud física.

$$\begin{aligned} \underline{1 \text{ N}} &= 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1 (\text{kg}) \cdot (\text{m}) / (\text{s})^2 = 1 (1000 \text{ gr}) \cdot (100 \text{ cm}) / \text{s}^2 = \\ &= 100\,000 \underbrace{(\text{gr. cm/s}^2)}_{1 \text{ dina}} = \underline{10^5 \text{ dinas}} \end{aligned}$$

Como regla mnemotécnica, conviene recordar que las unidades de fuerza y de masa del *Sistema Técnico* son aproximadamente 9.8 veces más grandes que las del *S.I.U.*, y que éstas son mucho más grandes que las del *c.g.s.*

En cuanto a las unidades de longitud y tiempo, la Conferencia General de Pesos y Medidas adoptó, en 1960 y 1967, respectivamente, las siguientes definiciones:

*metro*: equivale a 1650763.73 longitudes de onda de la radiación anaranjada, en el vacío, de un isótopo del criptón ( $\text{Kr}^{86}$ ).

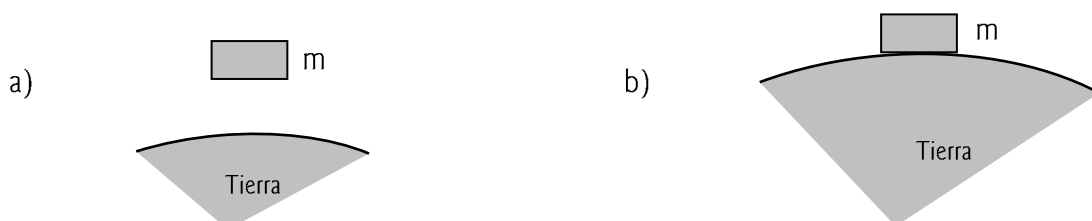
*segundo*: equivale a 9192631770 periodos de la transición particular del cesio ( $\text{Cs}^{133}$ ).

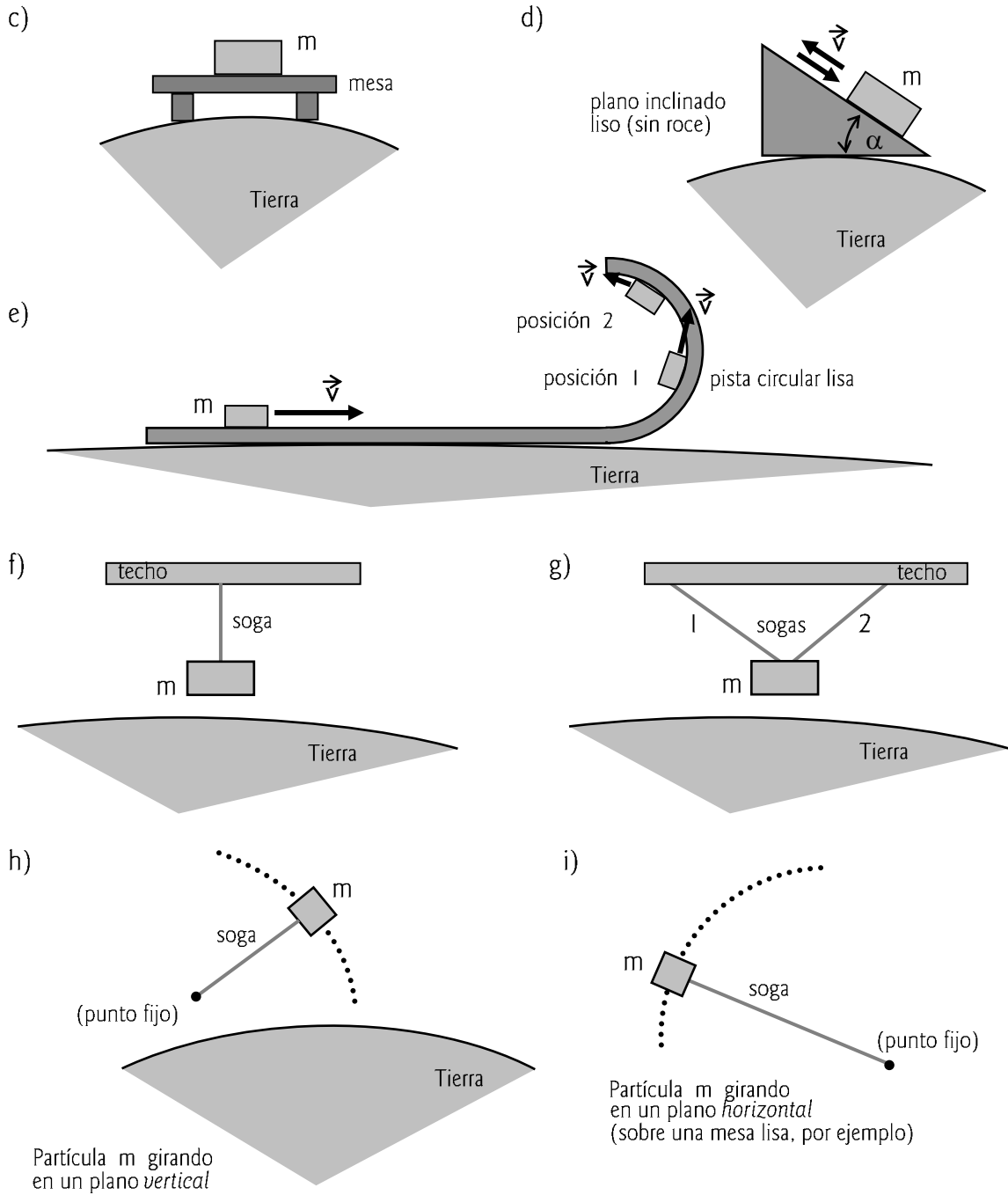
Pasaremos ahora a aplicar las Leyes de Newton.

En todos los casos, salvo que se indique lo contrario, no se tendrá en cuenta la influencia del aire existente sobre el planeta Tierra, el que seguirá siendo un plano horizontal, como lo consideraríamos en *CINEMÁTICA*... (a pesar de algunos de los dibujos que siguen, que son a efectos de la ilustración).

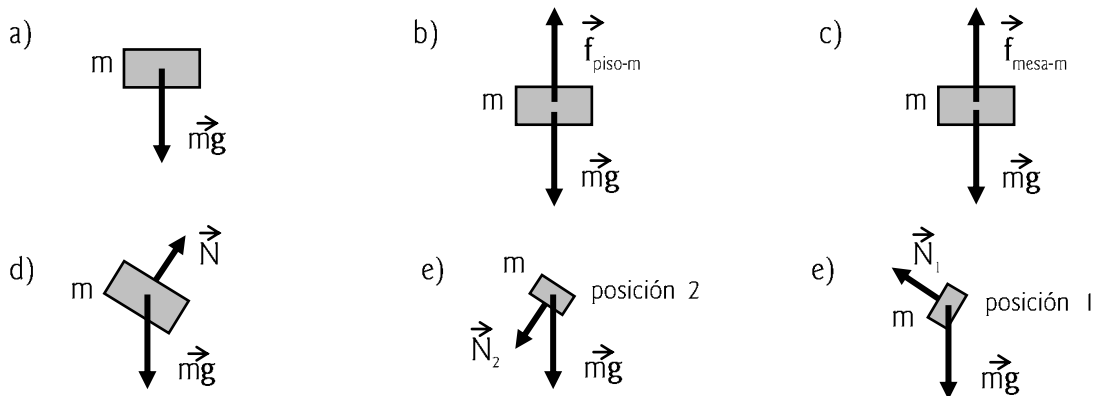
### Ejemplo 25

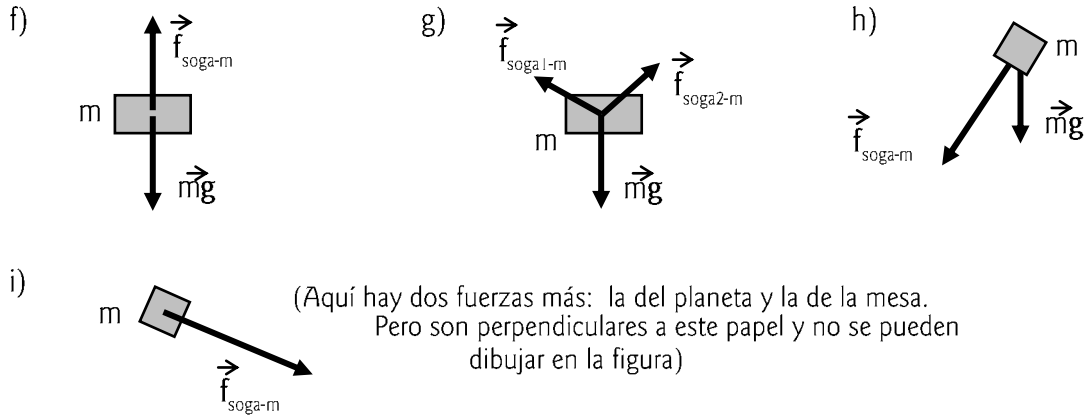
Para los siguientes casos, dibujar *sobre la partícula* (representada por m ) las fuerzas a las que el medio ambiente la somete:





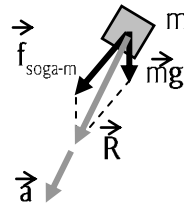
Solución:





Lo que hemos hecho es establecer lo que se llama el “*diagrama del cuerpo aislado*”. Analizamos qué efectos le producen a la partícula que estudiamos las fuerzas provenientes de los cuerpos con los que interactúa. Es decir, al dibujar las fuerzas, a simple vista podemos determinar si la partícula se encuentra en equilibrio (reposo o MRU) o no. Dado que para que esto suceda se debe cumplir con:  $\sum \vec{f} = 0$ , vemos en el ejemplo anterior que esta situación solo se da en los casos de los incisos b), c), f) y g). En las situaciones de los otros incisos, la partícula está acelerada. La dirección y el sentido de la aceleración serán los de la fuerza resultante:  $\vec{R} = \sum \vec{f}$ .

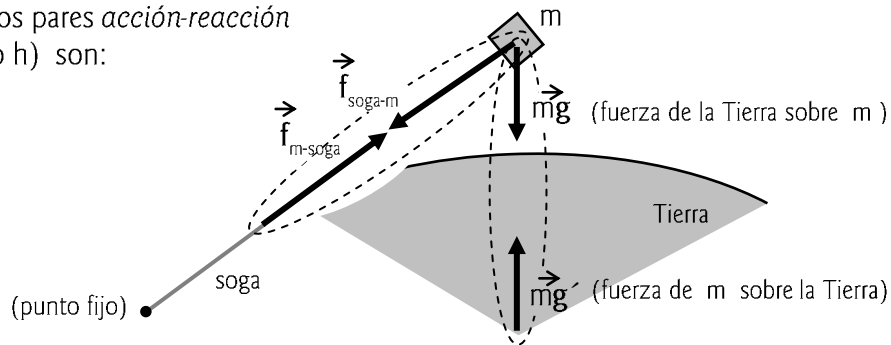
Por ejemplo, para el caso del inciso h) :



En cuanto a la fuerza que complementa en cada caso al par *acción-reacción*, recordemos que son fuerzas

“*iguales y contrarias*”, pero actuando sobre distintos cuerpos (ver *3er. Principio*). Así, no es un par *acción-reacción* el que se ve en los incisos b), c) y f) del *Ejemplo 25*.

En cambio, los pares *acción-reacción* para el inciso h) son:



Con las fuerzas dibujadas se plantean las ecuaciones para resolver un problema, no sin antes fijar, *arbitrariamente*, un *Sistema de Referencias*.

Cualquier *Sistema de Referencias* puede ser útil. No obstante, se elige aquel que facilita los cálculos. Por ejemplo, para cuando una partícula se mueve sobre un plano inclinado, es conveniente elegir como *Sistema* al que tiene a uno de sus ejes paralelo al plano.

Como todos los vectores (velocidad, aceleración, ímpetu lineal, ...), la fuerza puede descomponerse en componentes ortogonales. Por lo tanto el *2do. Principio* vale en las tres

dimensiones:

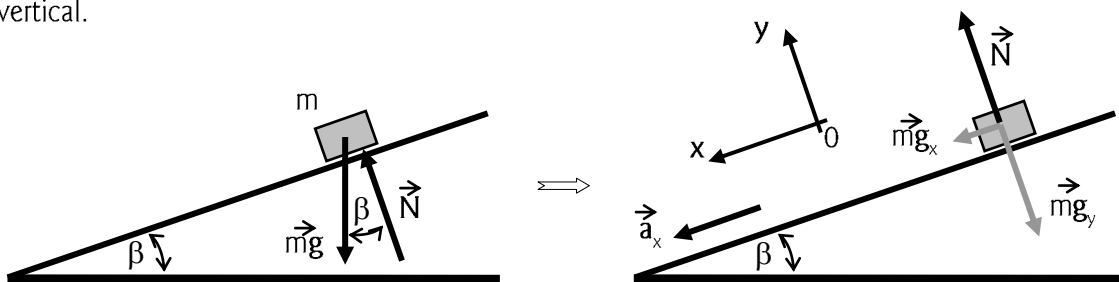
$$\vec{\Sigma f} = m \cdot \vec{a} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma f_x = m \cdot a_x \\ \Sigma f_y = m \cdot a_y \\ \Sigma f_z = m \cdot a_z \end{array} \right.$$

### Ejemplo 26

Se deposita una partícula sobre un plano inclinado liso. Calcular la aceleración que va a adquirir, y decir si ésta depende de que la partícula se haya depositado en reposo, o con cierta velocidad (hacia arriba o hacia abajo) respecto del plano.

Solución:

Dibujaremos en la misma figura la situación real y el diagrama de cuerpo aislado de la partícula  $m$ . Es para enfatizar que la aceleración obtenida es paralela al plano supuesto en reposo, y que la fuerza motora es visiblemente la debida a la atracción de la Tierra. Obsérvese que la fuerza que el piso (plano inclinado) le hace a  $m$  la llamamos  $\vec{N}$  (de "normal"). Esto es porque se verifica experimentalmente que las fuerzas de contacto entre dos superficies son perpendiculares a las mismas, en ausencia de roce, como es el caso de este ejemplo. Si las superficies de contacto fuesen rugosas, habría una componente de la fuerza de contacto paralela a estas superficies, llamada fuerza de roce. Empero, aún con superficies rugosas, si se deposita a un cuerpo en reposo sobre una superficie horizontal, la fuerza de contacto será vertical.



En la última figura  $m g_y = N$ , porque en la dirección perpendicular al plano la partícula no se acelera. Y la componente del peso en  $x$  es la que genera la aceleración paralela al plano  $m g_x = m \cdot a_x$ .

$$\therefore \boxed{a_x = g_x}$$

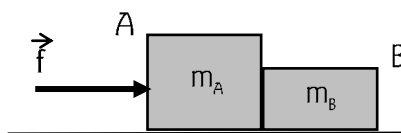
Ahora bien. Esta situación se da por la interacción entre el plano, el planeta y la partícula, que no dependerá de si ésta fue depositada en reposo, o ha sido lanzada hacia arriba o hacia abajo por el plano inclinado. Con lo que queda respondida la inquietud planteada en el enunciado.

Por otra parte, veamos la coherencia del resultado:  $a_x = g_x = g \cdot \text{sen } \beta$ . Si el ángulo  $\beta$  tiende a CERO (plano horizontal) no habrá aceleración; si  $\beta$  pasa a ser un ángulo recto,  $\text{sen } \beta$  vale 1, y la partícula cae libremente con la aceleración de la gravedad.

.....

### Ejemplo 27

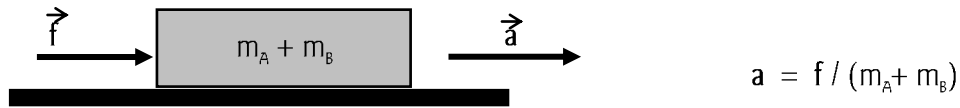
Los bloques A y B están en contacto y se encuentran apoyados sobre una superficie



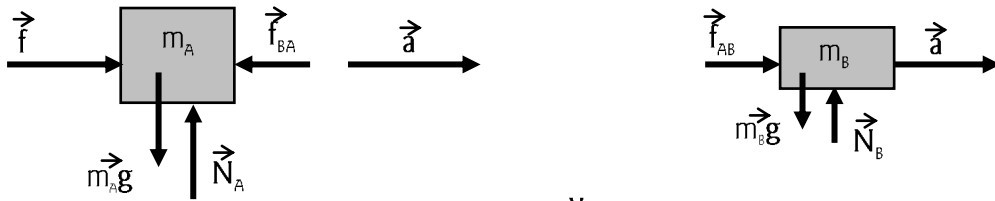
horizontal lisa. Si se aplica una fuerza  $\vec{f}$  al bloque A, calcular la que A le ejerce a B, la que B le ejerce a A, y la aceleración de cada bloque.

Solución:

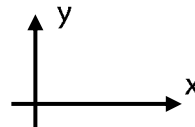
Es obvio que los bloques estarán siempre en contacto, moviéndose ambos con la misma aceleración. Para  $\vec{f}$  es como si actuara sobre una única masa  $m_A + m_B$ :



El diagrama de cuerpo aislado de cada bloque, es:



Si elegimos ahora el Sistema de Referencias: se pueden escribir las ecuaciones:



$$\begin{aligned} f - f_{BA} &= m_A \cdot a = m_A \cdot f / (m_A + m_B) & N_A - m_A g &= 0 \\ f_{AB} &= m_B \cdot a = m_B \cdot f / (m_A + m_B) & N_B - m_B g &= 0 \end{aligned}$$

con las que queda resuelto el problema, por ser  $f_{AB} = f_{BA}$  (3er. Principio). Y se puede ver, contra lo que apresuradamente contestaríamos de entrada, que  $f_{AB} < f$ .

.....

**Ejemplo 28**

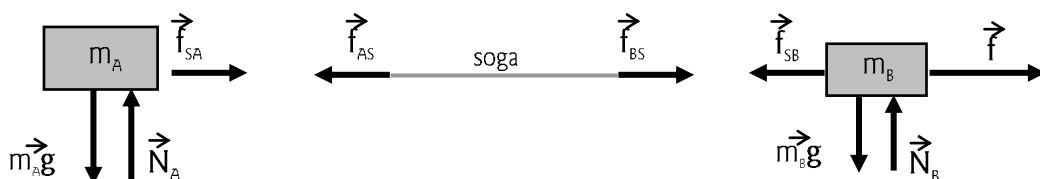
Veamos ahora qué pasa si aplicamos la misma fuerza  $\vec{f}$  del ejemplo anterior al conjunto de las mismas masas, pero esta vez sobre la partícula  $m_B$ , unida a  $m_A$  mediante una soga sin masa (ideal, claro está).



Solución:

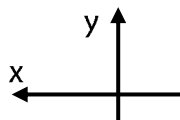
Como en el caso anterior, la aceleración de cada partícula es la misma, igual a la del conjunto, pues suponemos a la cuerda que las une inextensible:  $a = f / (m_A + m_B)$ .

El diagrama de cuerpo aislado de cada bloque y la soga es:





Si elegimos ahora el Sistema de Referencias:



se pueden escribir las ecuaciones:

$$- f_{sA} = m_A \cdot a \quad ; \quad N_A - m_A g = 0 \quad ; \quad - f + f_{sB} = m_B \cdot a \quad ; \quad N_B - m_B g = 0$$

En cuanto a la soga, como la supusimos sin masa, no necesita una fuerza resultante  $\neq 0$  para acelerarse con la aceleración  $\vec{a}$ . Por lo tanto  $f_{AS} = f_{BS} = T$ , lo que se llama *tensión*, y vale lo mismo para cualquier tramo de la soga.

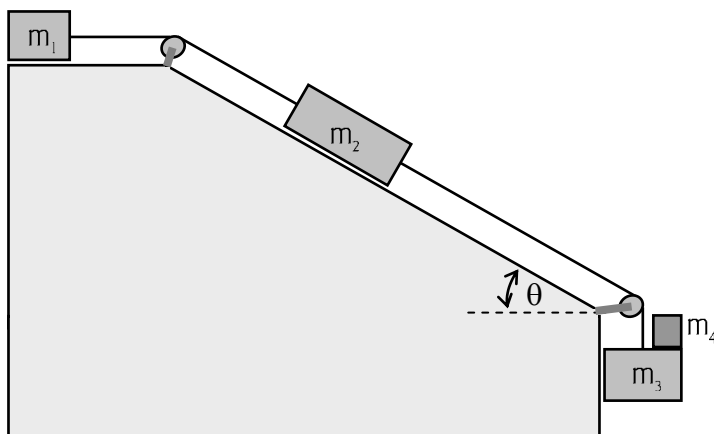
Ahora, teniendo en cuenta que  $f_{AS} = f_{SA}$ , y que  $f_{BS} = f_{SB}$ , resulta que  $f_{SA} = f_{SB}$ , con lo que se resuelve el sistema de ecuaciones.

.....

### Ejemplo 29

Los bloques de masas  $m_1$  y  $m_2$  señalados en la figura se deslizan sobre superficies sin roce. El bloque  $m_3$  cuelga y desciende verticalmente. El bloque  $m_4$  se apoya sobre  $m_3$ . Las poleas y los distintos tramos de soga no tienen masa.

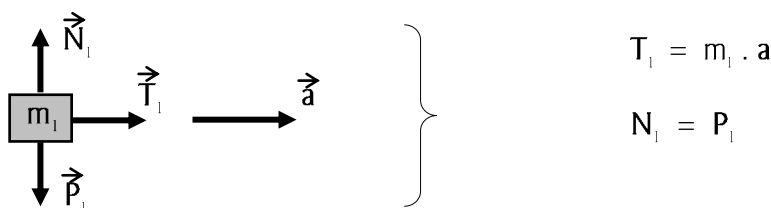
Realizar los diagramas de cuerpo aislado correspondientes y calcular las tensiones en las cuerdas y la fuerza que  $m_4$  ejerce sobre  $m_3$ , para los siguientes DATOS :



- $m_1 = 1.0 \text{ kg}$
- $m_2 = 2.0 \text{ kg}$
- $m_3 = 5.0 \text{ kg}$
- $m_4 = 0.5 \text{ kg}$
- $\theta = 30^\circ$

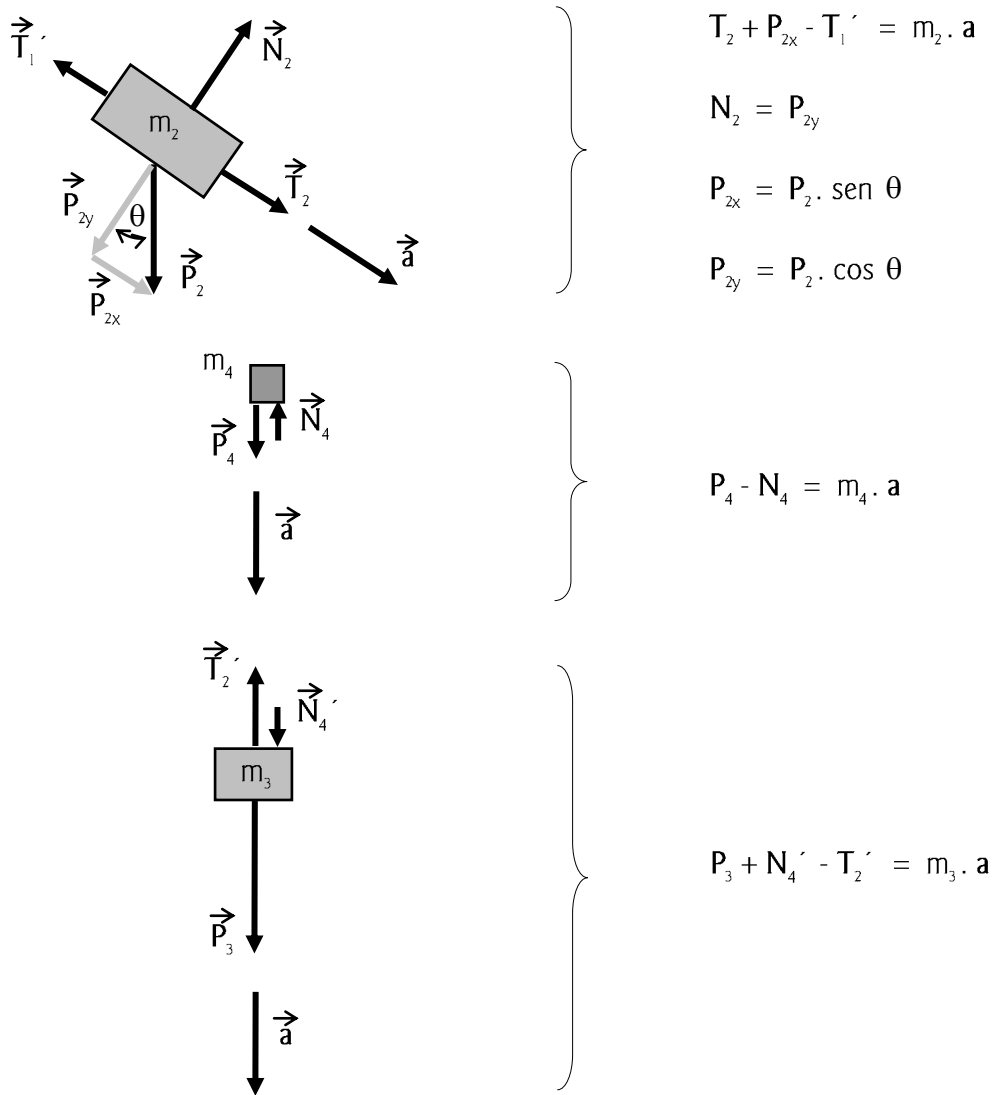
Solución:

Las ecuaciones que se escribirán tendrán en cuenta el movimiento natural del sistema que, indudablemente, será siguiendo la caída de  $m_3$ . Por lo tanto, en cada diagrama de cuerpo aislado, habrá que observar que la resultante de las fuerzas que apuntan hacia el lado al cual se mueve el cuerpo deberá ser mayor que la resultante de las fuerzas que se oponen, imponiendo el sentido de la aceleración de la partícula. Y dado que la cuerda es inextensible, esta aceleración será del mismo módulo para todo el sistema.



$$T_1 = m_1 \cdot a$$

$$N_1 = P_1$$



Por acción y reacción:  $N_4' = N_4$ .

Por ausencia de masa en las sogas y en las poleas:  $T_2 = T_2'$  y  $T_1 = T_1'$ .

Combinando todas estas ecuaciones, y considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , se llega a:

$a = 7.647 \text{ m/s}^2$

$T_1 = 7.647 \text{ N}$

$T_2 = 12.941 \text{ N}$

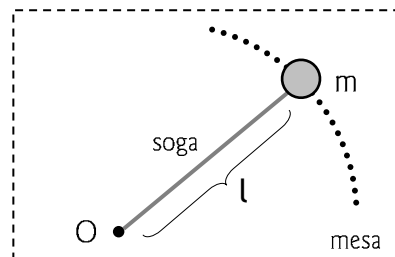
$N_4 = 1.1765 \text{ N}$

Obsérvese que la fuerza que  $m_4$  le hace a  $m_3$  mientras caen juntas en contacto, *no* es igual al peso de  $m_4$ .

.....

**Ejemplo 30**

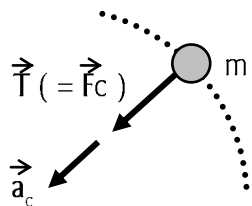
Calcular la tensión de la soga que sostiene a la partícula de masa  $m$  mientras ésta gira alrededor de "O" con velocidad angular  $\omega$  constante, sobre una mesa horizontal lisa.



Solución:

El único “medio ambiente” que actúa sobre la partícula, a nivel horizontal, es la sogá. Es ésta la que le proporciona a  $m$  la fuerza para que pueda describir una circunferencia [ si cortamos la sogá,  $m$  “se va por la tangente”, continuando su movimiento sobre la mesa con  $\vec{v} = \text{cte. (MRU)}$  ].

Dado que la aceleración en el movimiento circular uniforme es centrípeta, y es generada por una única fuerza en este caso, lo que aplica la sogá a la partícula es una “fuerza centrípeta”, naturalmente siempre en la dirección de la sogá:

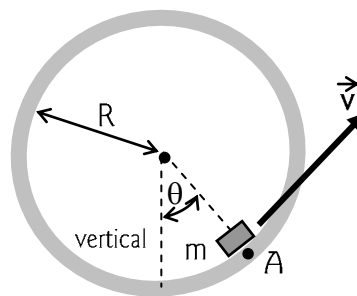


$$T = m \cdot a_c = m \cdot \omega^2 \cdot l$$

**Ejemplo 3 I**

Sobre una pista vertical sin roce, una partícula de masa  $m$  pasa por el punto  $A$  a la velocidad  $\vec{v}$ , como se indica en la figura.

Calcular la fuerza que la pista ejerce sobre la partícula en ese instante, considerando como DATOS a :  $m, R, \theta, \vec{v}$  y  $\vec{g}$ .



Solución:



$$N - P_c = m \cdot a_c$$

$$P_c = P \cdot \cos \theta$$

$$a_c = v^2 / R$$

$$N = m \cdot v^2 / R + m \cdot g \cdot \cos \theta$$

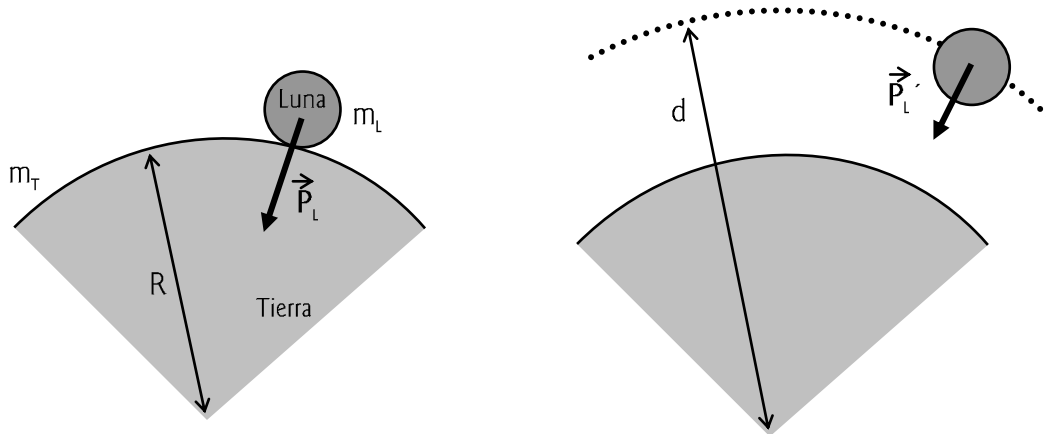
Ya en la época de Newton se conocían con buena aproximación el radio de la Tierra y la distancia entre la Tierra y la Luna. Con estos datos Newton pudo constatar que las Leyes por él enunciadas son válidas para los cuerpos celestes, como se deduce a continuación.

Ejemplo 32

¿Por qué la Luna demora casi un mes en circunvalar la Tierra?

Solución:

Imaginemos a la Luna en dos posiciones distintas: una, la real, a la distancia  $d$  de la Tierra, y la otra apoyada sobre nuestro planeta. Veamos cómo aplicaríamos “Newton” en cada situación.



$$P_L = F_g = G \cdot m_L \cdot m_T / R^2 = k / R^2 \quad ; \quad P_L' = F_g' = G \cdot m_L \cdot m_T / d^2 = k / d^2 = m_L \cdot \omega^2 \cdot d$$

$$\therefore P_L = k / R^2 = m_L \cdot g \quad \Rightarrow \quad P_L' / P_L = m_L \cdot \omega^2 \cdot d / m_L \cdot g = R^2 / d^2$$

$$\text{Luego:} \quad \omega^2 = R^2 \cdot g / d^3 \quad \Rightarrow \quad T^2 = (2\pi)^2 / \omega^2 = (2\pi)^2 \cdot d^3 / g \cdot R^2$$

Si  $d$  es poco menos de 400 000 km ,  $R$  algo más de 6350 km , y  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  , el periodo resulta de casi un mes:

$T \approx 29 \text{ días}$	c. q. d.
-----------------------------	----------

Vimos que el peso es la fuerza con que las cosas se atraen con el planeta. Lejos de la Tierra, la fuerza de atracción gravitatoria (peso) disminuye. No obstante oímos a menudo que nuestro peso disminuye o aumenta por tal o cual circunstancia; por ejemplo, que disminuye al sumergirnos en el agua.

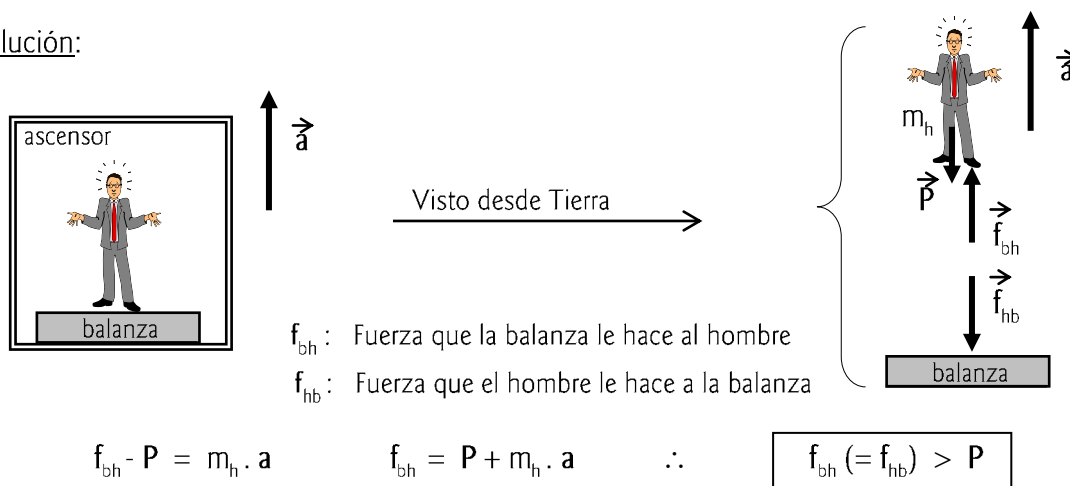
No es correcto decir que el peso varía según donde se encuentre el cuerpo sumergido. El peso no varía. Lo que sucede es que el líquido ejerce una fuerza hacia arriba, llamada empuje, que hace decir que el peso disminuyó. (El empuje se estudiará en el capítulo de FLUIDOS.).

Si colgamos un cuerpo de un *dinamómetro* (aparato para medir intensidades de fuerzas, que suele ser simplemente un resorte) sujeto en el techo, el dinamómetro acusará el peso del cuerpo. Pero si aceleramos al dinamómetro hacia arriba, parecerá que el cuerpo colgado “gana” en peso, porque el dinamómetro registrará una lectura mayor (el resorte se estira). Una vez más: en estas circunstancias, ¿varía el peso? ... Obviamente no, porque la experiencia la realizamos a la misma distancia del centro de la Tierra. ¿Qué sucede entonces? ¿Acaso los dinamómetros, u otras balanzas, no miden el peso? ... Veámoslo a través de un ejemplo.

### Ejemplo 33

Una persona se encuentra parada sobre una balanza apoyada en el piso de un ascensor. Cuando éste comienza a ascender, pasa de la situación de reposo a otra con velocidad constante. Durante unos instantes, pues, el ascensor se acelera en el sentido de su movimiento, y la persona “siente” como que la empujan hacia arriba. ¿Qué indica la balanza durante la aceleración?

Solución:



Vemos que la fuerza que acusa la balanza es mayor que el peso del hombre.

Si la aceleración del ascensor fuese hacia abajo, la persona sentiría como que le “quitan” el suelo; se debilita su contacto con la balanza, la que acusaría un valor menor al de su peso. En el caso límite en que se corta el cable del ascensor se anula el contacto con la balanza, que indicaría CERO porque el ascensor, la balanza y la persona caerían con  $\vec{g}$ ; sin embargo el individuo conserva su peso.

### Ejemplo 34

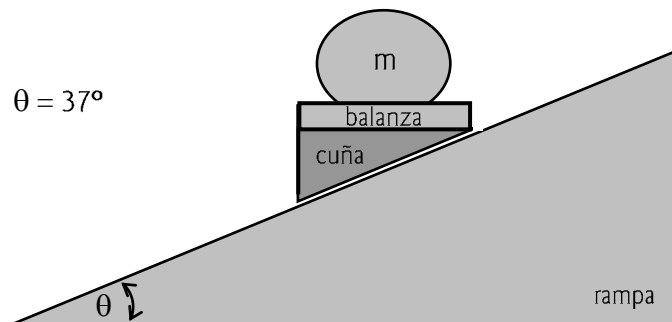
Una plataforma en forma de cuña se desliza sobre una rampa totalmente lisa. Sobre la plataforma hay atornillada una balanza, y sobre la balanza áspera, no lisa, hay apoyado un cuerpo de masa  $m$  que permanece inmóvil respecto de la cuña durante la caída. Para los datos que se suministran, calcular la indicación de la balanza mientras desliza la plataforma.

DATOS:

ángulo de inclinación de la rampa:  $\theta = 37^\circ$

masa del cuerpo:  $m = 80 \text{ kg}$

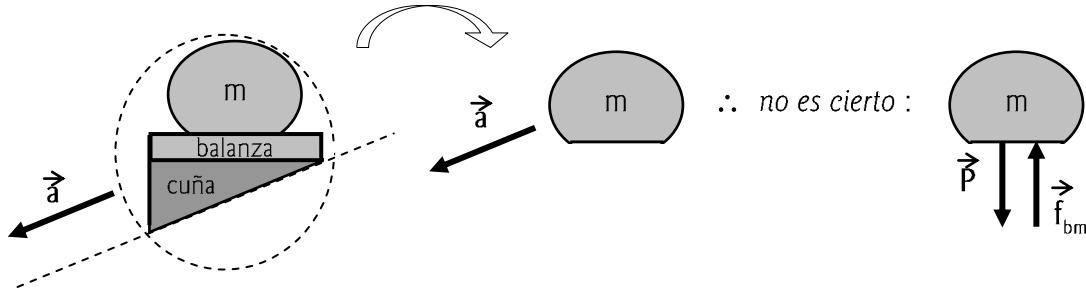
$g = 10 \text{ m/s}^2$



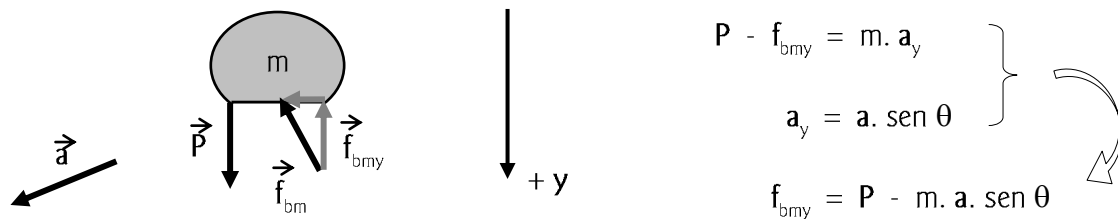
Solución:

A primera vista pareciera que sobre  $m$  hay dos fuerzas *verticales*: la de su peso, y la que le hace la balanza, ya que está apoyado sobre una superficie horizontal. Pero resulta que  $m$  tiene la misma aceleración  $\vec{a}$  respecto de la rampa (fija a Tierra) que la balanza atornillada a la

cuña. Y, como se viera en el *Ejemplo 26*, el módulo  $a$  vale  $g \cdot \sin \theta$ , debido a que el conjunto "  $m$ , balanza, cuña ", se desplaza sobre una rampa lisa:



Es correcto suponer que haya dos fuerzas sobre  $m$ , dado que influyen sobre este cuerpo el planeta y la balanza. Pero es obvio que la fuerza que proporciona la balanza no es vertical, dado que las superficies entre ésta y el cuerpo no son lisas (si lo fueran, no viajarían juntos; ver a continuación *Fuerza de Roce*). La componente vertical,  $\vec{f}_{bmy}$ , es la que tiene que ver con lo que indica la balanza:



Como  $a = g \cdot \sin \theta$ , resulta:  $f_{bmy} = P - m \cdot g \cdot \sin^2 \theta$   $\therefore$  la balanza indica: 512 N!

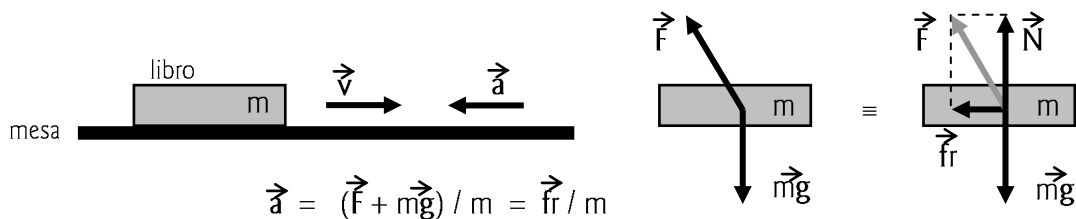
En los *Ejemplos 25, 26, 27, 28, 29 y 31* se consideró a la interacción entre la/s partícula/s y el piso como una fuerza perpendicular a las superficies de contacto, porque el enunciado de esos problemas aclaraba que el piso era liso, sin asperezas (caso ideal). Pero en la práctica, entre todas las superficies que se deslizan una encima de la otra existe *rozamiento*, que analizaremos a continuación.

**FUERZA DE ROCE**

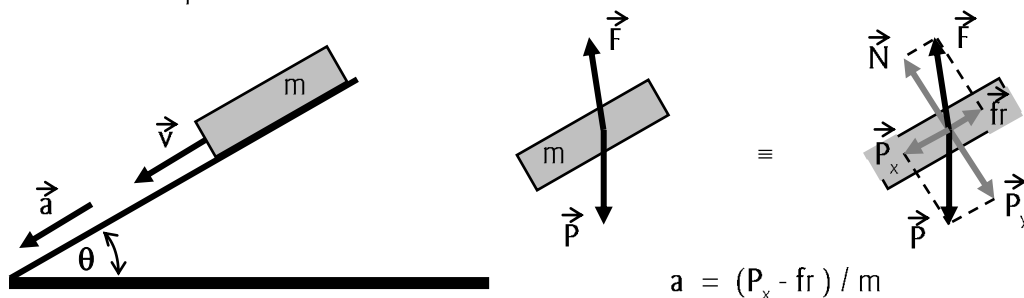
Si sobre una mesa lanzamos un libro, por ejemplo, vemos que éste se desliza hasta detenerse. Es obvio que "alguien" lo detuvo, porque de lo contrario hubiese seguido deslizándose con velocidad constante hasta el borde de la mesa. Esto es la *fuerza de roce*,  $\vec{f}_r$ . Por otra parte, si el libro no se hundió ni voló, significa que también hubo entre estos cuerpos una fuerza perpendicular a las superficies de contacto que es igual al peso del libro (supuesta la mesa horizontal), a la que llamamos *normal*,  $\vec{N}$ .

Dado que todas las *fuerzas* aparecen por la interacción entre los cuerpos, sobre una partícula aparecen tantas fuerzas como cuerpos interactúan con ella (lo hemos discutido en las páginas precedentes). De manera que, en el caso que estamos analizando, existen sobre el libro dos fuerzas: una gravitatoria,  $m\vec{g}$ , debida a su interacción con el planeta, y otra de carácter electromagnético,  $\vec{F}$ , debida a su interacción con la mesa; pero esta última tiene dos

componentes que llamamos *fuerza de roce*,  $\vec{f}_r$ , y *normal*,  $\vec{N}$ :



En el caso de un plano inclinado no liso:



La experiencia demuestra que esta fuerza que se opone al movimiento es proporcional al tipo superficies en contacto y a la fuerza normal. En el caso de la mesa horizontal, es proporcional a  $N = mg$ ; en el caso del plano inclinado del ejemplo, a  $N = mg_y = mg \cdot \cos \theta$ . En realidad, tampoco es exactamente así, pues en la práctica la fuerza de roce depende un poco de la velocidad, de las condiciones de las superficies (humedad, lubricación, etc.). Pero nosotros consideraremos que, en movimiento:  $f_r = \mu_d \cdot N$ , en donde  $\mu_d$  es el factor que depende de la naturaleza de los cuerpos que se rozan y que llamaremos coeficiente de roce dinámico. Obsérvese que esta fuerza de roce no es función, en principio (y para las consideraciones en FÍSICA I), del área en contacto (cantidad de  $cm^2$ , por ejemplo).

Por otra parte, un cuerpo en reposo también puede estar bajo la influencia de una fuerza de roce. Imaginemos una caja pesada apoyada sobre una mesa. Si la tocamos, lo más probable es que no se mueva. Es decir, le aplicamos cierta fuerza horizontal, y la caja permanece en reposo. ¿Qué quiere decir esto? Creyendo en Newton, vemos que si actuara horizontalmente solo la fuerza de nuestra mano, la caja debería acelerarse. Si esto no ocurre es porque aparece entre ésta y la mesa una fuerza que se opone a su movimiento. Es la fuerza de roce. ¿Y cuánto vale en este caso? ... Vale lo que la fuerza que aplicamos con la mano, en módulo y dirección. Si aumenta ésta, se “acomoda” la fuerza de roce y la equilibra de tal manera que la caja permanezca en reposo pues sigue cumpliéndose:  $\sum \vec{f} = m \cdot \vec{a}$  ;  $\sum \vec{f} = m \cdot 0 = 0$ .

Pero llega un momento en que con la mano movemos la caja. Entonces, habiendo aceleración cuando la caja sale del reposo, decimos que “vencimos” a la fuerza de roce. Ya no puede aumentar  $f_r$  para oponerse a las fuerzas externas; su módulo también es proporcional al tipo de superficies en contacto y a la normal entre ellas. De manera que puede escribirse que la *máxima fuerza de roce* que puede obtenerse con un cuerpo en reposo, es:

$$f_{r\text{máx}} = \mu_e \cdot N$$

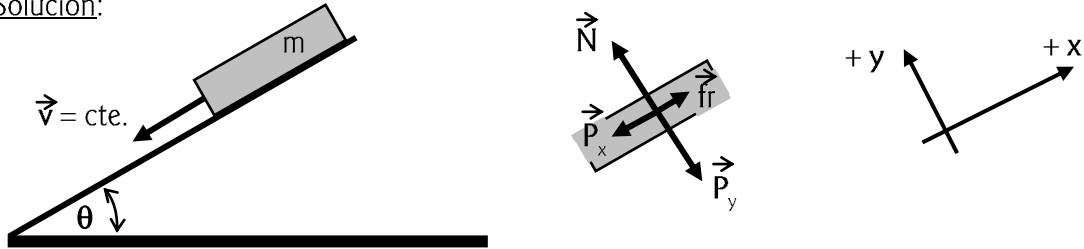
En general, para las partículas en reposo que no estén a punto de moverse:  $f_r \leq \mu_e \cdot N$ .

El coeficiente de roce estático,  $\mu_e$ , suele diferir muy poco del dinámico  $\mu_d$ . En este texto los consideraremos iguales y llamaremos al coeficiente de roce simplemente  $\mu$ .

Ejemplo 35

¿Puede un bloque deslizarse hacia abajo por un plano inclinado, con velocidad constante? Si esto fuera posible, ¿cuánto debería valer  $\mu$  ?

Solución:

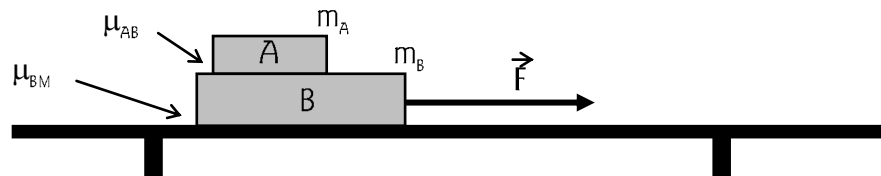


Si  $\vec{v} = \text{cte.}$  significa que  $\vec{a} = 0 \therefore \sum \vec{f} = 0 :$   $-P_x + fr = m \cdot \vec{a} = 0$   
 $fr = P_x = mg \cdot \text{sen } \theta$

$fr = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \text{cos } \theta \Rightarrow \boxed{\mu = \text{tg } \theta}$

Ejemplo 36

El bloque A se encuentra encima del bloque B , que está apoyado sobre una mesa, como indica la figura. Están los dos en reposo y existe roce entre todas las superficies en contacto. En estas condiciones se aplica una fuerza  $\vec{F}$  al bloque B , y éste acelera. Si son datos  $m_A$  ,  $m_B$  ,  $\mu_{AB}$  y  $\mu_{BM}$  , ¿cuánto debe valer F para que el bloque A esté a punto de deslizarse sobre B ?



Solución:

$$fr_1 = m_A \cdot a_A$$

$$N_{BA} - m_A \cdot g = 0$$

$$fr_1 = \mu_{AB} \cdot N_{BA}$$

(por estar a punto de deslizarse)

$$F - fr_1' - fr_2 = m_B \cdot a_B$$

$$N_{MB} - m_B \cdot g - N_{AB} = 0$$

$$fr_2 = \mu_{BM} \cdot N_{MB}$$

(por patinar sobre la mesa)

$$N_{AB} = N_{BA} \quad ; \quad a_A = a_B \quad ; \quad fr_1 = fr_1'$$

Combinando las ecuaciones, resulta:

$$\boxed{F = \mu_{AB} \cdot (m_A + m_B) \cdot g + \mu_{BM} \cdot (m_A + m_B) \cdot g}$$

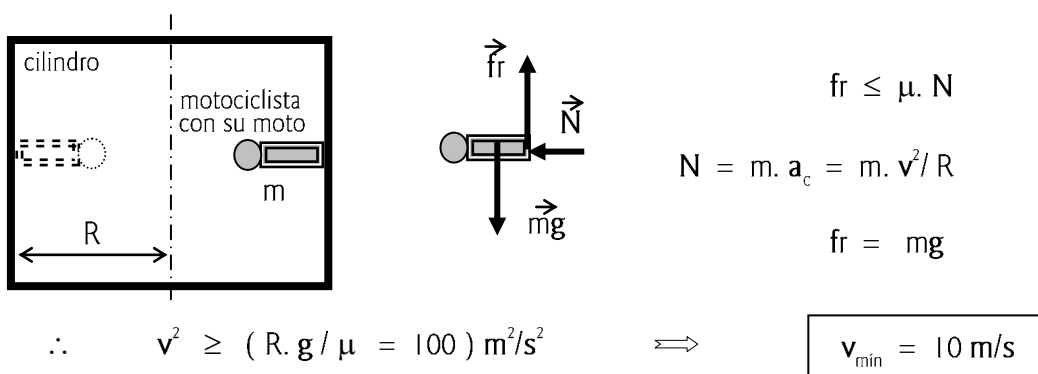


### Ejemplo 37

Calcular la velocidad mínima que deben tener un motociclista y su moto para circunvalar el interior de un cilindro de eje vertical, teniendo en cuenta los siguientes datos: coeficiente de roce entre ruedas y cilindro:  $\mu = 1.00$  ; radio interior:  $R = 10 \text{ m}$  ; masa del piloto con su moto:  $200 \text{ kg}$  .

Solución:

Lo que permite a la moto girar sin caerse es, indudablemente, el roce con el cilindro. Como el movimiento es circular en el plano horizontal, la pared del cilindro interactúa con la moto a través de una fuerza que tiene dos componentes: una de roce, que equilibra al peso y mantiene a la moto en el plano horizontal, y la otra normal, que le suministra su aceleración centrípeta.

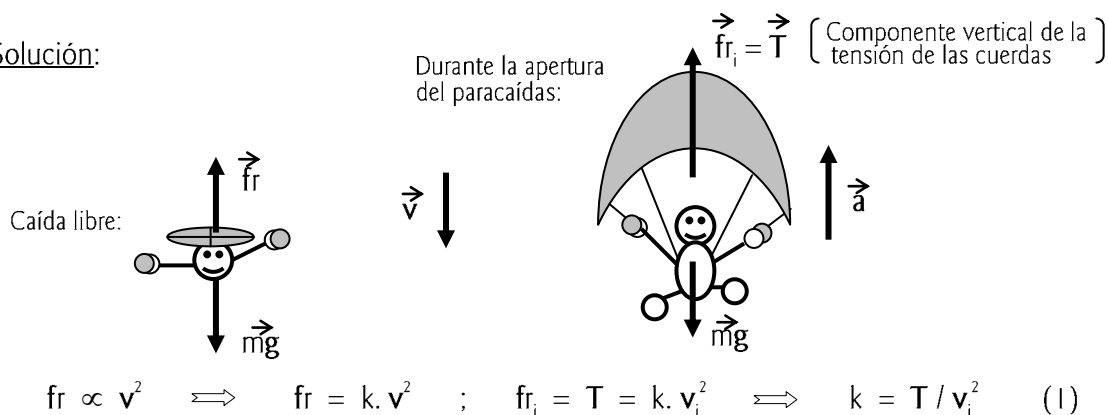


Cuando una partícula se desplaza en un fluido (aire, por ejemplo), en ciertas condiciones el rozamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad relativa entre partícula y fluido. Este es el caso, aproximadamente, de un paracaidista que cae: a medida que aumenta su velocidad, aumenta la fuerza de roce con el aire. Y si consideramos que es proporcional al cuadrado de la velocidad, podemos resolver lo siguiente.

### Ejemplo 38

Un paracaidista efectúa una caída libre. Antes de abrirse el paracaídas estaba cayendo con una rapidez  $v$  . Luego de abrirse el paracaídas desciende con una rapidez constante  $v_f$  . Suponiendo despreciables los pesos de las cuerdas y del paracaídas frente al peso del hombre, calcular la máxima tensión que soportan las cuerdas en la apertura.

Solución:



Adquirida la velocidad constante  $\vec{v}_f$ , luego de la apertura, la fuerza de roce vuelve a ser igual al peso:  $fr_{2f} = mg = k \cdot v_f^2 \implies k = mg / v_f^2$  (2)

Igualando (1) y (2): 
$$\boxed{T = k \cdot v_i^2 = (fr_2 / v_f^2) \cdot v_i^2 = (mg / v_f^2) \cdot v_i^2}$$

Como dato curioso, si el hombre pesa 80  $k\vec{g}r$ , la tensión  $T$  de las cuerdas sería de más de 12 000  $k\vec{g}r$  en caso de pasar de 50 m/s a 4 m/s.

.....

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

Lo que llamaremos "MAS" a partir de ahora es un movimiento de vaivén, ciertamente particular, que se realiza sobre la dirección de una recta. Debiera ser MRAS (Movimiento Rectilíneo Armónico Simple), pero se lo identifica sin la "R", dando por entendido que se trata de un movimiento *rectilíneo*.

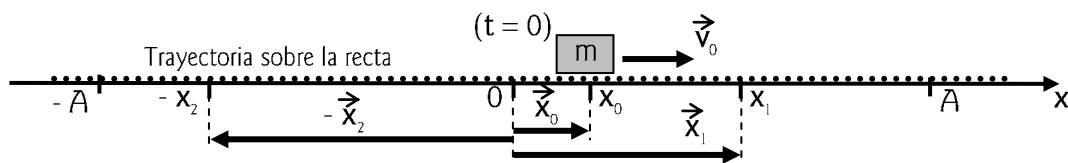
Por otra parte, visto aquí, pareciera un tema olvidado de cinemática, fuera de lugar en el contexto de la dinámica que estamos analizando. Pero preferimos estudiarlo en este capítulo para identificar inmediatamente a las fuerzas causales de este movimiento.

El MAS de una partícula es aquel para el cual su posición sobre la recta en la que se mueve, en función del tiempo, responde a la ecuación:

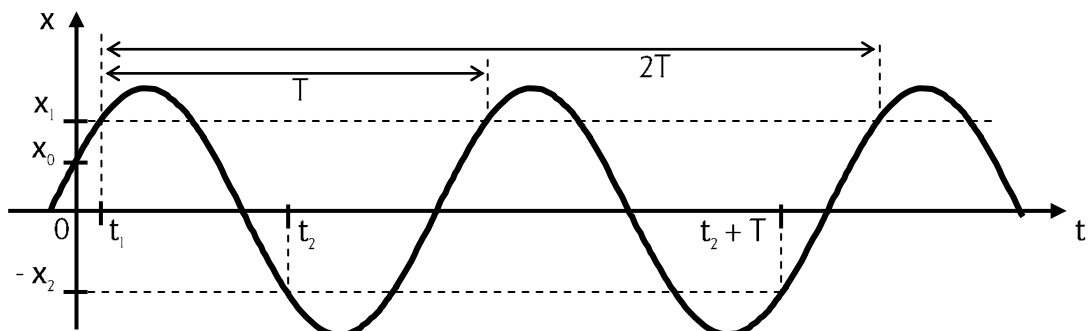
$$\boxed{x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)}$$

Esto significa que la partícula no puede superar los límites de "A", llamada *amplitud*, y que los puntos intermedios de esa trayectoria rectilínea se determinan mediante una función senoidal (puede ser, como veremos, cosenoidal); al argumento de esta función ( $\omega \cdot t + \delta$ ) se lo llama *fase*, en la que  $\delta$  es la *fase inicial* y el factor  $\omega$  es la *pulsación*.

Por ejemplo,  $m$  se mueve con MAS sobre la recta de la figura, entre  $A$  y  $-A$ , y su movimiento comenzó a contabilizarse ( $t = 0$ ) en el lugar en que se ve a la partícula. El sistema de coordenadas se hace coincidir con la recta en la que se establece la trayectoria, como se hiciera con los demás movimientos rectilíneos:



La gráfica horaria de la posición es:



El movimiento de vaivén es simétrico y de periodo  $T$ . Puede pasar por un mismo lugar “yendo” o “viniendo”, pero cada  $T$  segundos la partícula con MAS pasa por allí con la misma fase: en el mismo sentido, con igual velocidad e igual aceleración.

Si cada  $T$  la partícula tiene la misma posición, puede escribirse:

$$x(t) = x(t+T) \quad \Rightarrow \quad A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta) = A \cdot \text{sen}[\omega(t+T) + \delta]$$

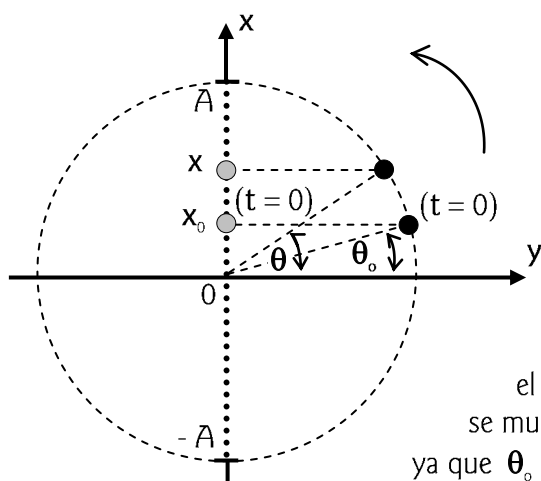
Por otro lado, sabemos que  $\text{sen } \beta = \text{sen}(\beta + 2\pi \cdot n)$ , (con  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ), por lo que, para  $n = 1$ , queda:

$$\text{sen}(\omega \cdot t + \delta) = \text{sen}(\omega \cdot t + \delta + 2\pi) = \text{sen}[\omega \cdot (t+T) + \delta]$$

de donde:  $T = 2\pi / \omega \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi / T = 2\pi \cdot f$

La magnitud física  $\omega$  está vinculada a cuántas veces por segundo se repite el fenómeno. Por eso a esta *pulsación* se la llama también *frecuencia angular*. Y es como si fuera la velocidad angular en un movimiento circular uniforme, según puede verse a continuación.

Si una partícula  $m$  se mueve con MCU ( $\omega = \text{cte.}$ ) sobre una circunferencia de radio  $A$ , su proyección (o “sombra”) sobre cualquiera de los diámetros de la circunferencia (por ejemplo por el que pasa el eje  $x$ ) es un MAS:



$$\begin{aligned} R &= A \\ \omega &= \text{cte.} \\ x &= A \cdot \text{sen } \theta \\ \theta &= \theta_0 + \omega \cdot t \\ \therefore x &= A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_0) \end{aligned}$$

el circulito gris (proyección o sombra de  $m$ ) se mueve sobre uno de los diámetros con MAS, ya que  $\theta_0$  equivale a  $\delta$ .

Ahora, de haber hecho la proyección sobre el diámetro por el que pasa el eje  $y$ , se hubiese obtenido la expresión:  $y = A \cdot \text{cos}(\omega \cdot t + \theta_0)$  que representaría al MAS en el que la partícula se dirige en ese instante hacia la  $y$  decreciente. Pero si quisiéramos representar al mismo movimiento (la sombra yendo hacia su amplitud, como en el ejemplo de la figura) transformando la ecuación horaria *senoidal* en *cosenoidal*, bastaría con reemplazar a  $\delta$  por  $\delta' = \delta - \pi/2$ , ya que:  $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta + \text{sen } \beta \cdot \text{cos } \alpha$ .

$$\text{sen}(\omega \cdot t + \delta) = \text{sen}(\underbrace{\omega \cdot t + \delta - \pi/2}_{\alpha} + \underbrace{\pi/2}_{\beta}) = \text{cos}(\omega \cdot t + \delta - \pi/2) = \text{cos}(\omega \cdot t + \delta')$$

$$\therefore x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta) = A \cdot \text{cos}(\omega \cdot t + \delta')$$

Derivando una vez o dos veces respecto del tiempo cualquiera de las expresiones anteriores (seguiremos usando la primera en este texto), se obtienen respectivamente las ecuaciones horarias de velocidad y aceleración. Para  $x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)$ :

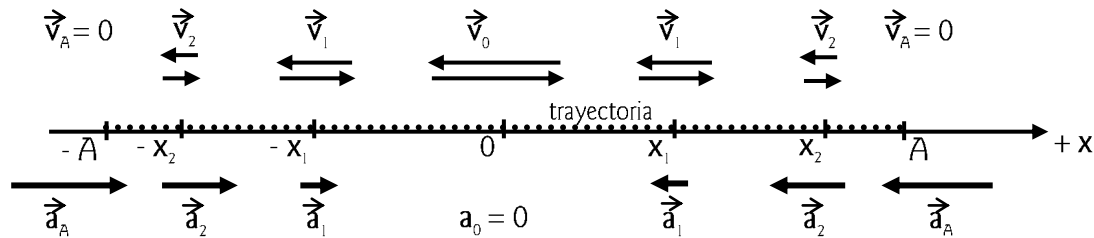
$$v = \omega \cdot A \cdot \text{cos}(\omega \cdot t + \delta) \quad a = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta) = -\omega^2 \cdot x$$

Puesto que  $\omega$  es constante para determinado MAS, resulta la aceleración proporcional a la posición, y su gráfica horaria una imagen "especular" de la misma. Para cada posición, positiva o negativa, la aceleración apunta hacia el centro del movimiento.

Por otro lado, combinando las ecuaciones horarias, se llega a una ecuación que nos muestra de qué manera la velocidad depende también de la posición:

$$v = \pm \omega \cdot (A^2 - x^2)^{1/2} \quad (*)$$

Esto nos dice que la partícula pasa con la máxima rapidez por el centro ( $x = 0$ ) de la trayectoria de vaivén. Valen:  $v_{\text{máx}} = \omega \cdot A$ , [ como podríamos haber deducido de la ecuación trigonométrica  $v = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \delta)$  ], y  $v = 0$ , en  $x = \pm A$ . Por otra parte, los signos de (\*) nos indican que por cierta posición  $x$  la partícula pasa con idéntica rapidez, yendo o viniendo:



### Ejemplo 39

Una partícula realiza un MAS con un periodo  $T = 2\pi \text{ s}$ . En el instante  $t = 0$  su posición es  $x = 5 \text{ m}$ , y su rapidez es de  $+8 \text{ m/s}$ . Hallar  $A$ ,  $\delta$ ,  $\omega$ ,  $x(t)$ ,  $v(t)$ ,  $a(t)$  y dibujar los gráficos horarios correspondientes.

Solución:

Elijiendo para  $x(t)$  la expresión:  $x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)$ , las ecuaciones de  $v(t)$  y  $a(t)$  resultan:  $v = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)$ ;  $a = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)$ , con las que, para  $t = 0$ , queda:

$$5 \text{ m} = A \cdot \text{sen}(\delta) \quad [1] \quad ; \quad +8 \text{ m/s} = \omega \cdot A \cdot \cos(\delta) \quad [2] \quad ; \quad a = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\delta) \quad [3]$$

De las ecuaciones [1] y [2]:  $5 \text{ m} / 8 \text{ m/s} = (1/\omega) \cdot \text{tg} \delta \quad \Rightarrow \quad \delta = 0.5586 \text{ rad}$

ya que:  $T = 2\pi \text{ s}$  (dato)  $= 2\pi / \omega$ , con lo que:  $\omega = 1 \text{ rad/s} = 1 \text{ 1/s}$  y  $\text{tg} \delta = 0.625$ .

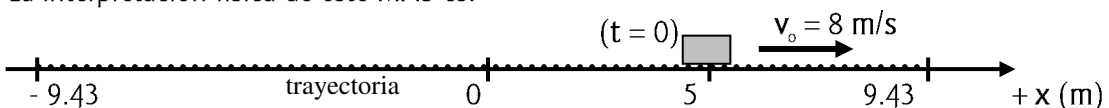
De [2], con  $\omega$  y  $\delta$  conocidos, se deduce que:  $A = 9.43 \text{ m}$

Las ecuaciones horarias quedan:

$$x(t) = 9.43 \cdot \text{sen}(t + 0.5586) \text{ m} \quad ; \quad v(t) = 9.43 \cdot \cos(t + 0.5586) \text{ m/s}$$

$$a(t) = -9.43 \cdot \text{sen}(t + 0.5586) \text{ m/s}^2$$

La interpretación física de este MAS es:



En cuanto a los gráficos horarios, observemos que la ecuación horaria de la aceleración es idéntica a la de la posición, con el signo cambiado. Por lo tanto, el gráfico de aceleración es como si se viera el de la posición en un espejo plano. El gráfico de la velocidad, en cambio, es como el de la posición, pero desplazado, dado su carácter cosenoidal.

.....

### Ejemplo 40

Con los datos del *Ejemplo 39*, hallar  $A$ ,  $\delta$ ,  $\omega$ ,  $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$ , partiendo de la ecuación horaria:  $x'(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta')$ .

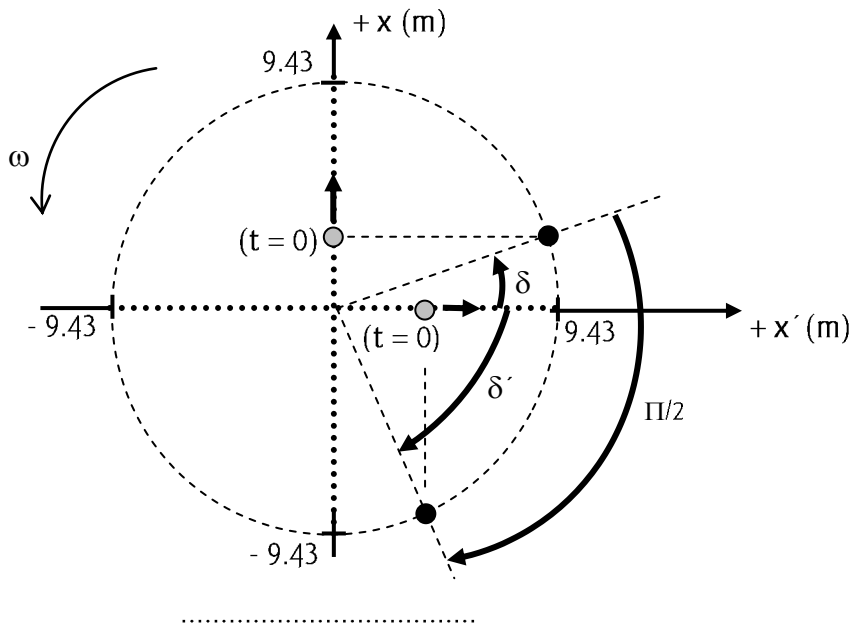
Solución:

$$x'(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta') ; v' = -\omega \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta') ; a' = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta')$$

Siguiendo los pasos indicados en el ejemplo precedente, llegamos a que la pulsación es  $\omega = 1 \text{ 1/s}$  y  $\delta' = -1.012 \text{ rad}$ , con lo que se comprueba que  $A = 9.43 \text{ m}$ .

Luego: $x'(t) = 9.43 \cdot \cos(t - 1.012) \text{ m}$ ; $v' = 9.43 \cdot \sin(t - 1.012) \text{ m/s}$ $a' = -9.43 \cdot \cos(t - 1.012) \text{ m/s}^2$
---

Visto de otra manera, es idéntico el MAS para la trayectoria sobre  $x$  que para una trayectoria sobre  $x'$ , como puede verse en la figura:

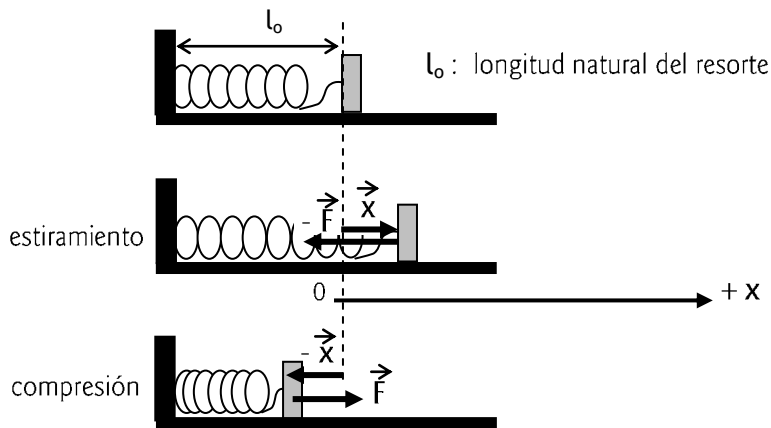


Hasta aquí hemos estudiado particularmente los movimientos rectilíneos “uniforme”, “uniformemente variado” y “armónico simple”. En el primer caso la sumatoria de las fuerzas actuantes sobre la partícula es *cer*o, mientras que en el segundo caso la resultante debe mantenerse *constante*. En cuanto al MAS, ¿cómo debe ser la fuerza que lo genere?

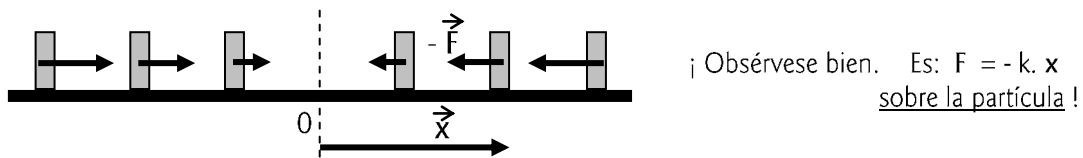
El gráfico en el que señalamos los sentidos y los valores relativos de las velocidades y las

aceleraciones para distintos puntos de la trayectoria, indica que en el centro de la misma la fuerza causante de este movimiento alternativo debe ser nula, porque es cero la aceleración; y que debe apuntar hacia ese centro en cualquier otra posición de la partícula, con valores crecientes cuando ésta se dirige hacia los extremos de su recorrido.

Un dispositivo capaz de proveer una fuerza con esas características elásticas, es el resorte "ideal". (Uno real se comporta aproximadamente así dentro de ciertos límites). Vemos que si con un dedo estiramos un resorte, éste "tira" de nuestro dedo con una fuerza que crece cuanto más grande es el estiramiento; el sentido de la misma es tal que apunta al lugar en el cual estaba la punta del resorte antes de que lo estirásemos. Por otro lado sucede lo contrario en la compresión:



En la figura se observa cómo la fuerza que actúa sobre la partícula  $m$  tiene en todo caso un sentido que se opone al del vector posición. Y, siendo que el módulo de  $\vec{F}$  es proporcional al estiramiento del resorte, puede escribirse:  $F = -k \cdot x$ , en donde  $k$  representa a ese factor de proporcionalidad que depende del tipo de resorte (diámetro de las espiras, grueso del alambre, material, etc.).

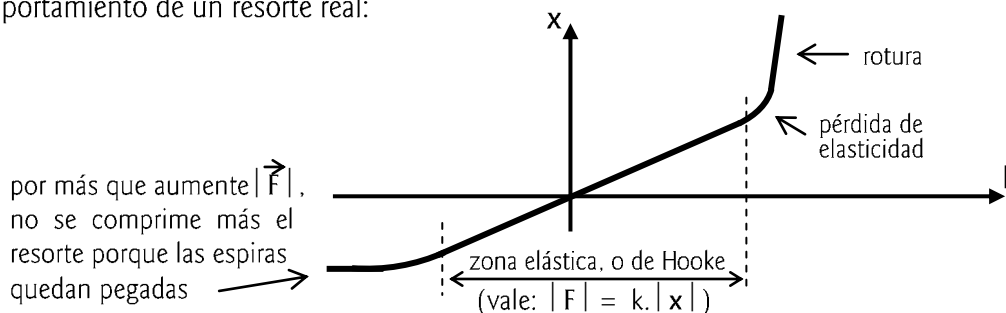


De manera que si  $\vec{F}$  fuera la única fuerza actuante (al menos, en el sentido horizontal, si  $m$  se encuentra apoyado sobre una mesa sin roce), la partícula adquiriría una aceleración:  $a = F/m = -k \cdot x / m = -(\text{cte.}) \cdot x$ , que es la aceleración correspondiente a un movimiento armónico simple.

Luego, por comparación con la ecuación  $a = f(t)$  correspondiente al MAS, se obtiene:  $k/m = \omega^2 = (2\pi/T)^2$ . Con lo que se deduce que el periodo de la partícula depende de su masa y del tipo de resorte (o de su constante elástica) al que está unida:  $T = 2\pi \cdot (m/k)^{1/2}$ .

Antes de pasar a algún ejemplo de aplicación, digamos que hay fuerzas elásticas que no necesariamente provienen de un resorte, cuyo módulo es, también, proporcional a la deformación. Estas fuerzas pueden proporcionar un MAS a la partícula con la que interactúan, aunque no llegue a completarse un periodo; es decir, una fracción del mismo puede ser parte de un movimiento armónico simple.

Comportamiento de un resorte real:



### Ejemplo 41

Un cuerpo de masa  $m = 1 \text{ kg}$  se halla en reposo sobre una mesa horizontal unido a un resorte estirado  $3 \text{ cm}$ , en el instante  $t = 0$ . Si el resorte tiene una constante  $k = 1 \text{ N/cm}$ , y no hay otras fuerzas sobre la partícula en el sentido de la acción del mismo, describir el movimiento del cuerpo a partir de  $t = 0$ , a través de las ecuaciones  $x(t)$ ,  $v(t)$ ,  $a(t)$ .

Solución:

Sabiendo que una fuerza neta elástica genera un MAS, las ecuaciones son del tipo:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta) ; v = \omega \cdot A \cdot \text{cos}(\omega \cdot t + \delta) ; a = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)$$

El procedimiento es el usado en los ejercicios anteriores. Solo que ahora la *pulsación*  $\omega$  queda determinada por la constante del resorte y la masa enganchada al mismo:  $\omega = (k/m)^{1/2} = 10 \text{ 1/s}$ . Con lo que resulta:

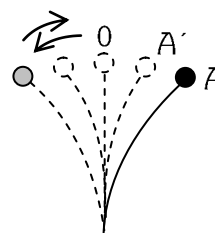
$x = 0.03 \cdot \text{sen}(10t + \pi/2)$	$v = 0.3 \cdot \text{cos}(10t + \pi/2)$	$a = -3 \cdot \text{sen}(10t + \pi/2)$
--	---	--

con  $x$ ,  $v$ , y  $a$ , expresadas en  $\text{m}$ ,  $\text{m/s}$ , y  $\text{m/s}^2$ , respectivamente.

.....

### Ejemplo 42

Una cinta plana de acero tiene soldado en un extremo un cuerpo de  $2 \text{ kg}$ . Si se lo separa  $20 \text{ cm}$  de la vertical, como indica la figura, calcular: a) la aceleración máxima del cuerpo; b) su velocidad y su aceleración cuando se encuentra a igual distancia del punto medio que de la posición inicial; c) el tiempo  $t_{AA'}$  que necesita para recorrer la distancia entre la posición  $A$  (inicial) y  $A'$  (mitad del recorrido entre  $A$  y el centro "0").



DATOS:  $m = 2 \text{ kg}$  ;  $k = 3.33 \text{ kg/m}$

Solución:

Si la cinta elástica es lo suficientemente larga como para poder suponer que la masa  $m$  se mueve prácticamente sobre una recta (en realidad su movimiento es sobre un arco), entonces tendremos un MAS como los que hemos estudiado, con  $A = 0.2 \text{ m}$  de amplitud máxima.

a)  $a_{\text{máx}} = \omega^2 \cdot A$        $\omega = (k/m)^{1/2} = 4.04 \text{ 1/s}$        $\therefore$   $a_{\text{máx}} = 3.26 \text{ m/s}^2$

b) 
$$\boxed{v = \pm \omega \cdot (A^2 - x^2)^{1/2} = \pm 4.04 \cdot [(0.2)^2 - (0.1)^2]^{1/2} = \pm 0.7 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{a = -\omega^2 \cdot x = -1.63 \text{ m/s}^2}$$

c) Si usamos  $x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)$ , con las condiciones iniciales resulta:  $\delta = \pi/2$ .

Para  $x = 0.1$ :  $0.1 = 0.2 \cdot \text{sen}[(4.04) \cdot t_{AA'} + \pi/2] \Rightarrow \theta = \text{arc sen } 0.5 = 4.04 \cdot t_{AA'} + \pi/2$

$\theta = \text{arc sen } 0.5 = 2.618 \text{ rad} \quad (\text{ó } \pi - 0.5235) - \text{Ver figura} - \therefore \boxed{t_{AA'} = 0.26 \text{ s}}$

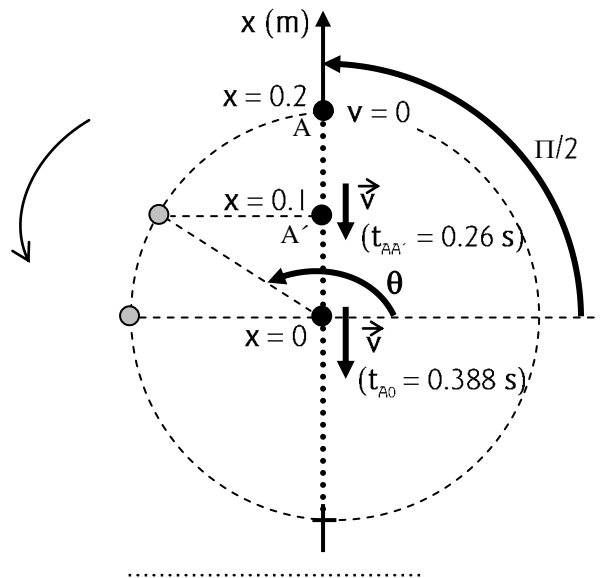
Obsérvese que el tiempo  $t_{AA'}$  que demora la partícula en recorrer la primera mitad del camino entre la amplitud máxima y  $x = 0$ , no es el mismo que el que invierte en recorrer la segunda mitad ( $t_{A'0}$ ).

Para  $x = 0$ :  $0 = 0.2 \cdot \text{sen}(4.04 \cdot t_{A0} + \pi/2) \Rightarrow \theta = \text{arc sen } 0 = 4.04 \cdot t_{A0} + \pi/2$

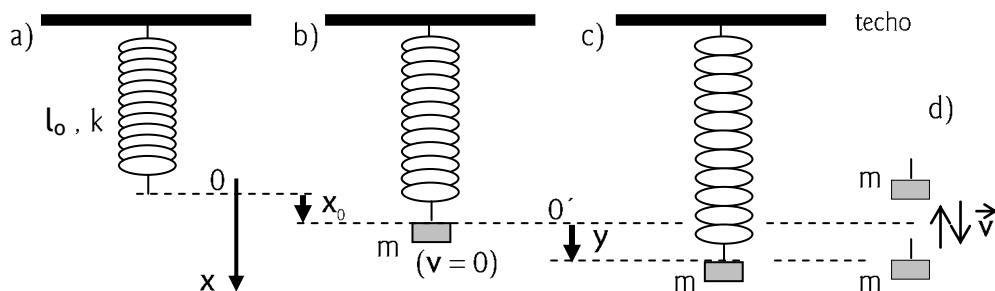
$\theta = \text{arc sen } 0 = \pi \text{ rad} \quad \therefore t_{A0} = 0.388 \text{ s}$

$\therefore t_{A'0} = t_{A0} - t_{AA'} = 0.388 \text{ s} - 0.26 \text{ s} = 0.128 \text{ s}$

Esto se debe a que en un caso parte de  $v = 0$ , mientras que en la segunda mitad ya posee una cierta velocidad inicial.

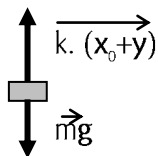


En los ejemplos precedentes la fuerza generadora del movimiento armónico simple era la proveniente de un resorte o de una cinta elástica. Pero, ¿puede haber MAS si, además de estos elementos, actúa en el sentido del movimiento alguna fuerza no elástica? ... Si colgamos a un cuerpo de un resorte vertical, ¿se desarrollará un MAS? Veamos:





En la figura a) vemos a un resorte de constante  $k$  y longitud natural  $l_0$  colgando del techo libremente. En la figura b) el resorte se estiró  $x_0$  porque se le enganchó un cuerpo de masa  $m$ , que está en reposo bajo la acción de las fuerzas peso y elástica:  $k \cdot x_0 = m \cdot g$ . En c) una fuerza externa originó que se estirara el resorte aún más:  $x_0 + y$ ; en esa posición, liberando a la partícula de ese factor externo, actúan las fuerzas:



Por lo que puede escribirse:

$$m \cdot g - k \cdot (x_0 + y) = m \cdot a \quad \underbrace{m \cdot g - k \cdot x_0}_0 - k \cdot y = m \cdot a$$

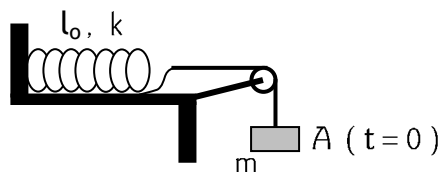
Resulta la aceleración proporcional a “ $y$ ”, con el signo cambiado, lo que define a un movimiento armónico simple alrededor del punto  $O'$  a partir del cual se mide “ $y$ ” (Ver figura d). Si a partir de ese punto  $O'$  se comprime o estira al resorte un valor  $A$ , por ejemplo, dejándolo luego actuar libremente, se establecerá un MAS al que corresponderá la ecuación horaria:  $y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)$ , con  $T = 2\pi \cdot (m/k)^{1/2}$ .

En todo este análisis no ha sido tomada en cuenta la masa del resorte real,  $M$ , la que modificaría al periodo agrandándolo. Puede demostrarse que el periodo se calcularía utilizando la expresión:  $T = 2\pi \cdot [(m + M/3) / k]^{1/2}$ . Por otra parte, debido a la existencia del aire cuando se realiza la experiencia, si suponemos al roce con el aire proporcional a la velocidad con que se mueve la partícula, se obtendría un *Movimiento Oscilatorio Amortiguado* para el que la ecuación horaria de la posición es:  $y = A \cdot e^{-\mu t} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)$ , con  $\mu$  como coeficiente de amortiguamiento.

### Ejemplo 43

El resorte de la figura no está estirado ni comprimido cuando la masa  $m$  se encuentra en la posición  $A$ :

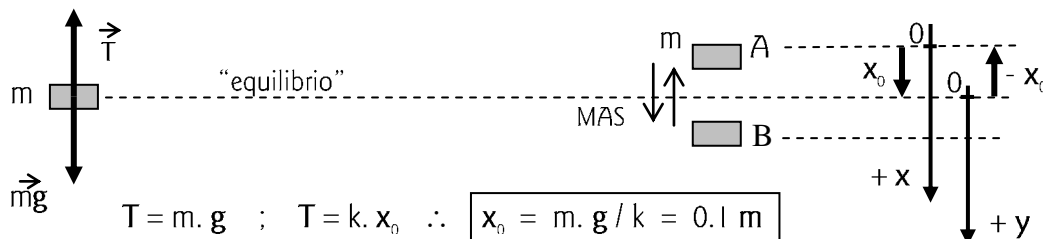
DATOS:  $k = 100 \text{ N/m}$      $m = 1 \text{ kg}$



En  $t = 0$  se suelta  $m$  y comienza a estirarse el resorte y a desarrollarse un MAS. Para los datos que se dan, determinar: a) la posición alrededor de la cual oscilará  $m$ ; b) la ecuación horaria del movimiento de  $m$ ; c) el valor de la tensión de la cuerda en los puntos más alto y más bajo de la trayectoria.

### Solución:

a) La posición alrededor de la cual oscilará  $m$  es la que corresponde al equilibrio, punto en el que estaría en reposo  $m$  si inicialmente se la depositara allí, bajo la acción del resorte y de su peso:



b)  $y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)$      $v = \omega \cdot A \cdot \text{cos}(\omega \cdot t + \delta)$      $\omega = (k/m)^{1/2} = 10 \text{ 1/s}$

En  $t=0$  (posición "A"):  $y = -x_0$      $y = -x_0$      $v = 0$ , con lo que  $\delta = \pi/2$  y  $A = -x_0$

$y = -x_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \pi/2)$  ó  $x = x_0 - x_0 \cdot \text{sen}(10t + \pi/2) = 0.1 - 0.1 \cdot \text{sen}(10t + \pi/2)$

c) Como se trata de un MAS, la aceleración máxima en los extremos es  $\omega^2 \cdot x_0$ , por lo que puede escribirse:

arriba  $m \cdot g - T_{\text{arriba}} = m \cdot a_{\text{máx}} = m \cdot \omega^2 \cdot x_0 = k \cdot x_0$

Como:  $m \cdot g = k \cdot x_0$ , resulta:  $T_{\text{arriba}} = 0$

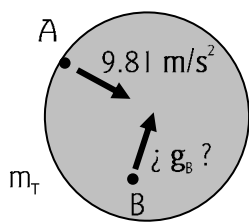
abajo  $m \cdot g - T_{\text{abajo}} = -m \cdot a_{\text{máx}} = -m \cdot \omega^2 \cdot x_0 = -k \cdot x_0$

Como:  $m \cdot g = k \cdot x_0$ , resulta:  $T_{\text{arriba}} = 2 k \cdot x_0 = 20 \text{ N}$

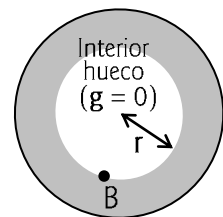
Hasta aquí pareciera que solamente fuerzas provenientes de resortes o de gomas elásticas pueden generar un MAS. No parece que lo pudiese hacer la gravitatoria, que depende de la distancia entre los cuerpos que se atraen mutuamente, elevada al cuadrado. Sin embargo, si penetramos en una enorme cuerpo (por ejemplo, la Tierra), tendremos masa rodeándonos por todos lados y entonces la atracción gravitatoria no tendrá sobre nosotros esa influencia del "cuadrado de la distancia".

Sobre la superficie de la Tierra, en A, la aceleración es "g", y vale:  $m_T \cdot G / R_T^2$ , como se viera en la *pág. 75*. Toda la masa de la Tierra,  $m_T$ , está debajo de nuestros pies, como si estuviera concentrada en un punto en el centro del planeta, a la distancia del radio  $R_T$ .

Imaginemos ahora que nos encontramos en B, un punto dentro de la Tierra. Aquí la gravedad nos atrae hacia "abajo" y hacia "arriba" ¿Cuánto vale g en esta situación? ...



Como se puede demostrar (lo verás cuando estudies otros campos, como el eléctrico), una corteza esférica no produce ningún campo dentro de ella, en ningún punto del espacio encerrado. Si hacia su centro la Tierra fuese hueca, sobre B no habría gravedad.

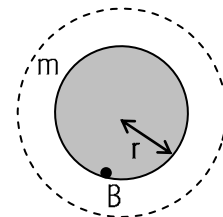


Por lo tanto la gravedad que existe en el punto B de la Tierra real, considerada esférica y homogénea, es la debida a la masa de radio  $r$ .

Y aquí  $g_b$  valdría:  $m \cdot G / r^2$ ,

donde:  $m = \delta \cdot 4/3 \Pi \cdot r^3$ ,

con  $\delta$  (densidad media de la Tierra) =  $m_T / 4/3 \Pi \cdot R_T^3$ .



Finalmente, el módulo del campo en el interior de la Tierra (por ejemplo el punto B) vale:  $g_b = G \cdot m_T \cdot r / R_T^3$ . Así, la gravedad es *cero* en el centro del planeta ( $r = 0$ ), mientras que es  $g$  en su superficie ( $r = R_T$ ).

En cuanto a los vectores  $\vec{g}_b$  y  $\vec{r}$ , ambos están en la dirección radial y son de sentidos opuestos. Por lo cual se puede escribir la relación:

$$\vec{g}_b = - ( G. m_T / R_T^3 ). \vec{r}$$

¡ La aceleración es proporcional a la posición cambiada de signo ! Quiere decir que si un objeto cayera por un tubo que atravesase la Tierra por su centro, se desplazaría con un movimiento armónico simple.

### Ejemplo 44

Se deja caer la partícula  $m$  por un tubo recto que atraviesa la Tierra de horizonte a horizonte, como indica la figura. El cuerpo parte con velocidad cero y llega al otro extremo con velocidad cero, para volver a penetrar el tubo en sentido contrario, con un movimiento que, debe demostrarse, corresponde a un MAS. Calcular a partir de esa deducción el tiempo que el cuerpo tarda en recorrer una vez el tubo.

Solución:

$$F_{gA} = m. g_A = m. [ - ( G. m_T / R_T^3 ). r ]$$

$$F_{gAx} = m. g_{Ax} = m. [ - ( G. m_T / R_T^3 ). r. \cos \theta ]$$

Pero:  $| r. \cos \theta | = x$

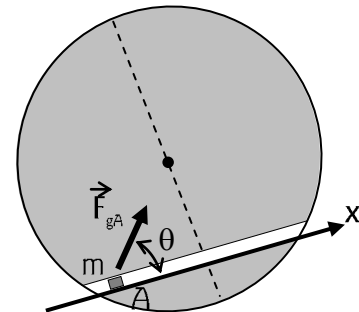
Entonces:  $F_x = - m. ( G. m_T / R_T^3 ). x$

Esta fuerza genera una aceleración:

$$a_x = F_{gAx} / m = - ( G. m_T / R_T^3 ). x = - \text{cte.} \cdot x$$

$\therefore$  ¡ se trata de un MAS, con  $\omega^2 = G. m_T / R_T^3 = g / R_T$  !

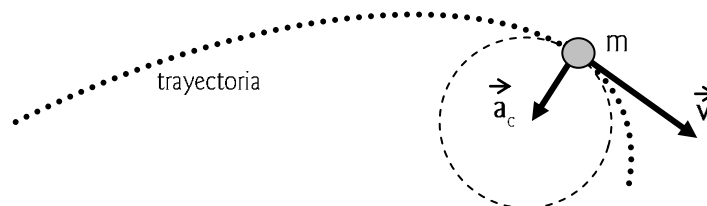
Siendo  $\omega^2 = (2\pi/T)^2$  resulta:  $T = 2\pi. (R_T / g)^{1/2} = 84.4 \text{ min}$



De manera que, cualquier cuerpo dejado caer por un tubo recto que atravesase de cualquier manera a la Tierra (supuesta una esfera perfecta y homogénea), demora **42.2 min** en llegar sin velocidad al otro extremo, independientemente de la longitud del tubo.

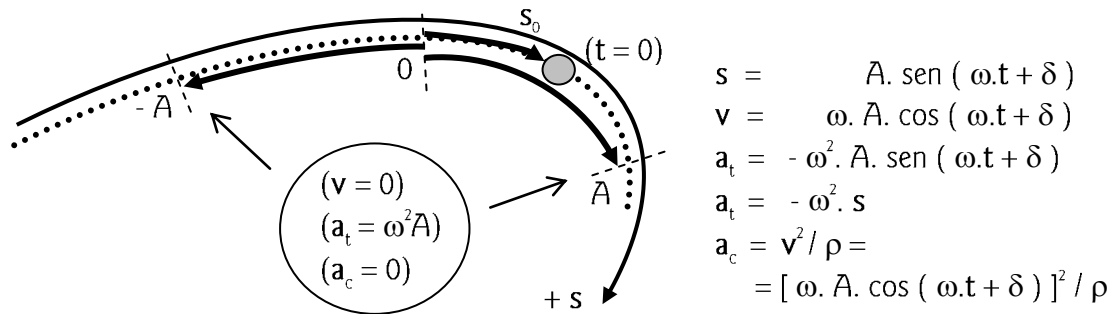
### MOVIMIENTO CURVILÍNEO ARMÓNICO SIMPLE

Moviéndose sobre una curva cualquiera, una partícula *seguro* que tiene aceleración; *al menos*, una aceleración centrípeta que apunta al centro de la circunferencia osculatriz, como se ha visto anteriormente:



Naturalmente, si a lo largo de la trayectoria aparece sobre  $m$  una fuerza tangente a la misma, que “acompaña” al movimiento, además de la centrípeta que obliga a la partícula a “doblar”, entonces la aceleración tendrá también una componente tangencial. Si la fuerza que opera en el sentido tangencial es del tipo “elástica”, la aceleración tangencial será función de la posición, como en el MAS. Cuando ello sucede, estamos en presencia de un movimiento curvilíneo armónico simple (MCAS).

Para determinar las ecuaciones horarias correspondientes a la partícula con MCAS, se fija un sistema de referencias instalado sobre la curva-trayectoria, para el cual vale lo visto en el MAS:



De manera que, para que la partícula pueda moverse describiendo una trayectoria como la dibujada, sobre ella debe actuar una fuerza  $\vec{F}$  (resultante) apuntando a la parte cóncava de la curva, cuyas componentes son:

$$F_t = m \cdot a_t = m \cdot (-\omega^2 \cdot s) = -k \cdot s \qquad F_c = m \cdot a_c = m \cdot v^2 / \rho$$

Una partícula puede describir un MCAS aunque sobre la misma no actúe la fuerza elástica de algún resorte. Tal es el caso del

**PÉNDULO SIMPLE (O MATEMÁTICO)**

Es el que está formado por una masa concentrada en un punto, pendiente de un hilo inextensible colgado de un soporte en el que no hay roce. Es, por cierto, imposible lograr en la práctica un péndulo con estas características. No obstante, si el cuerpo que se cuelga de un hilo tiene mucha masa en relación a su pequeño volumen y una forma sobre la que el roce con el aire se puede considerar despreciable, habrá sobre el cuerpo oscilante (péndulo) solamente un par de fuerzas: la proveniente del hilo (tensión) y la que se debe a la Tierra (peso):

En el sentido tangencial:  $-m \cdot g \cdot \text{sen} \theta = m \cdot a_t$

( el signo “-” se debe a que  $m \cdot g \cdot \text{sen} \theta$  tiene sentido contrario al de  $\theta$  )

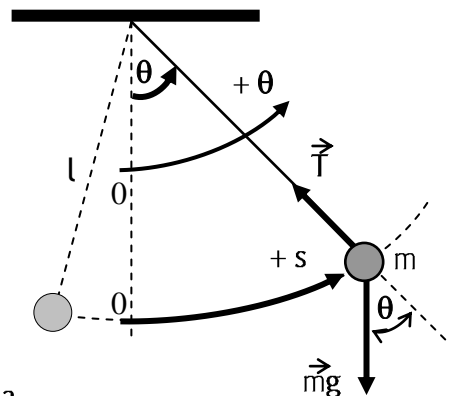
En el sentido radial:  $T - m \cdot g \cdot \text{cos} \theta = m \cdot a_c$

Para ángulos pequeños ( $\text{sen} \theta \approx \theta$ ):

$$-m \cdot g \cdot \theta = m \cdot a_t$$

Como  $\theta \cdot l = s \implies -m \cdot g \cdot s / l = m \cdot a_t$

$$\therefore -(g/l) \cdot s = a_t$$



Entonces, para desplazamientos pequeños respecto de la vertical, el péndulo oscila con movimiento curvilíneo armónico simple (MCAS), dado que la aceleración tangencial es proporcional a la posición sobre la trayectoria curva, cambiada de signo. Y como, de acuerdo a lo visto:  $a_t = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta) = -\omega^2 \cdot s$ , comparando esta expresión con la anterior se deduce que  $\omega^2 = g/l$ .

$$T = 2\pi \cdot (l/g)^{1/2}$$

para un péndulo simple que se aparta menos de una décima de radián de la vertical.

Por cierto que, para mayores apartamientos de la vertical, el péndulo también oscila de una manera tal que el tiempo que tarda en pasar por el mismo lugar y en la misma fase entre oscilaciones sucesivas (periodo), sea siempre el mismo. Pero en tal caso, la solución de la ecuación diferencial:  $-m \cdot g \cdot \text{sen} s/l = m \cdot a_t = d^2s/dt^2$  expresa a T como una serie de potencias en función del ángulo  $\theta$ , cuyo estudio detallado no se realizará aquí.

### Ejemplo 45

Un péndulo simple colgado de un techo, de masa  $m$  y longitud  $l$ , se aparta un ángulo  $\theta_0$  de la vertical y se lo deja oscilar libremente. Suponiendo que no hay roce en la articulación y con el aire, y que  $\theta_0$  es menor a  $6^\circ$ , calcular la velocidad, la aceleración tangencial, la aceleración centrípeta y la tensión de la soga en las posiciones extremas y en el centro de las oscilaciones.

Solución:

En A :

- $v = 0$
- $a_t = -g \cdot \text{sen} \theta_0$
- $a_c = (T - m \cdot g \cdot \cos \theta_0) / m = v^2 / l = 0$
- $T = m \cdot g \cdot \cos \theta_0$

En B :

- $v = (g \cdot l)^{1/2} \cdot \theta_0$
- $a_t = 0$
- $a_c = (T - m \cdot g) / m = v^2 / l = g \cdot (\theta_0)^2$
- $T = m \cdot g \cdot (\theta_0)^2 + m \cdot g$

¿De dónde salen estas expresiones? ...

Sabemos que se tratará de un MCAS, por ser del orden de 1 rad el máximo ángulo de apartamiento. Luego, dado que  $v = \omega \cdot s_{\text{máx}} \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)$ , es obvio que la velocidad máxima se da en B, lo que corresponde al valor 1 de la función trigonométrica y por lo tanto a:

$$v_{\text{máx}} = \omega \cdot s_{\text{máx}} = (g/l)^{1/2} \cdot s_{\text{máx}} = (g/l)^{1/2} \cdot l \cdot \theta_0 = (g \cdot l)^{1/2} \cdot \theta_0$$

En cuanto al valor máximo de  $a_t$ , que se da en los extremos del movimiento pendular (punto A, por ejemplo), como  $a_t = -\omega^2 \cdot s_{\text{máx}} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)$ , vale:

$$\underline{a_{t \text{ máx}}} = -\omega^2 \cdot s_{\text{máx}} = - (g/l) \cdot l \cdot \theta_0 = \underline{-g \cdot \theta_0}$$

que es casi igual a:  $-g \cdot \text{sen} \theta_0$ , por ser  $\theta_0 \downarrow$ .

.....

SISTEMAS DE REFERENCIAS NO INERCIALES Y JUSTIFICACIÓN DE LA 1era. LEY DE NEWTON

Nos parece natural que las cosas se frenen o aceleren en función de quienes ocasionen fuerzas sobre ellas. Aceleramos, lo vemos, cuando nos empujan si estamos parados; o cuando, patinando, nos frena el roce con el suelo. Funcionan aquí muy bien las Leyes de Newton.

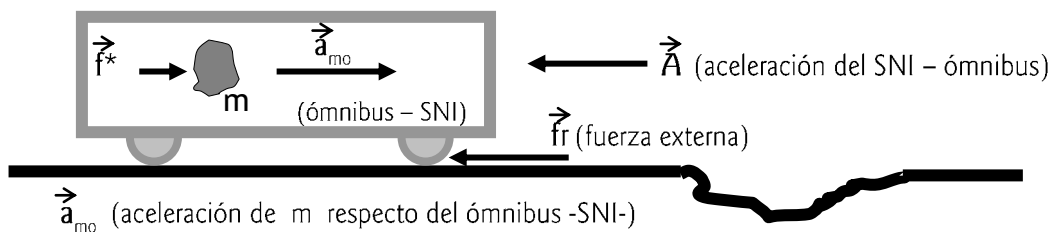
Nuestro sistema de referencias intuitivo, cotidiano, es el suelo del planeta. El “ombú”. Algo que está bien anclado y que, “naturalmente”, debe ser la referencia de lo que nos pasa. Sin embargo, a diario nos suceden también cosas en ámbitos en los que no podemos aplicar las mencionadas leyes; al menos, tal como las hemos planteado como producto de la interacción de elementos físicos reales.

Es el caso del ómnibus, por ejemplo. Viajando con velocidad constante, si está bien diseñado, casi ni nos damos cuenta que habitamos algo que se mueve respecto del exterior. Valen las Leyes tal como las conocemos. Pero si de pronto el chofer se ve en la necesidad de frenar al vehículo abruptamente, quienes viajamos cómodamente sentados nos vemos impulsados violentamente hacia adelante: aceleramos respecto del ómnibus, porque desde la velocidad cero que teníamos respecto del mismo, aparecemos de pronto con velocidad creciente.

Todo sigue siendo “natural” desde el “ombú” (la calle): frena el móvil porque aparece una fuerza externa que lo obliga a frenar. Pero no frenan los pasajeros quienes, por inercia, siguen con la velocidad que tenían. Es cierto, pero visto desde el “ombú”.

Si nuestro mundo fuese el ómnibus, y no supiésemos de la existencia de un mundo externo al mismo, ¿cómo justificaríamos nuestra aceleración, sin la mediación de factores desencadenantes? No tendríamos otro remedio que inventar la causa, la “fuerza”, aún sin la evidencia de su presencia real. Inventamos una fuerza para poder aplicar las Leyes de Newton en los ámbitos acelerados en donde establecemos un Sistema de Referencias al que llamamos No Inercial (SNI). Estas fuerzas creadas, llamadas *ficticias*, representadas generalmente con  $\vec{f}^*$ , no tienen su complemento para formar un par acción-reacción.

Volviendo al ejemplo, el ómnibus frenándose es un SNI en el cual con una  $\vec{f}^*$  justifico mi aceleración con respecto a él:



Desde SNI (ómnibus):  $m$  se mueve con MRUV ( $\vec{a}_{mo} = \text{cte.}$ ) respecto del ómnibus, mientras  $\vec{A}$  (aceleración del SNI) sea constante.  $\Leftrightarrow \vec{a}_{mo} = \vec{f}^*/m$

Desde SI (Tierra):  $m$  se mueve con MRU ( $\vec{a}_{mT} = 0$ ), con la velocidad que traía el ómnibus al comenzar a frenar. Se puede escribir:  $\vec{a}_{mo} = -\vec{A}$

De manera que, en todos los casos, sobre cada uno de los cuerpos que se encuentran dentro de un sistema acelerado (SNI), debe aplicarse una fuerza ficticia  $\vec{f}^* = m \cdot \vec{a}_{mo} = -m \cdot \vec{A}$ , además de las fuerzas reales que actúan sobre ellos.

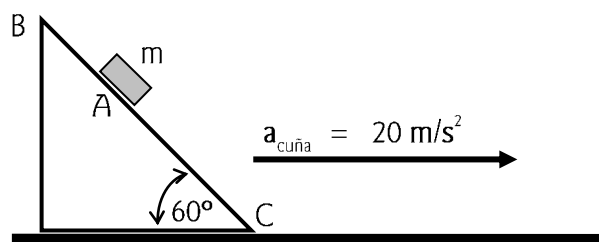
La segunda Ley de Newton, aplicada en sistemas acelerados (SNI), se escribe:

$$\Sigma \vec{f}_{\text{reales}} + \vec{f}^* = m \cdot \vec{a}_{m \text{ SNI}}$$

donde  $\vec{a}_{m \text{ SNI}}$  es la aceleración de la partícula  $m$  respecto del SNI.

### Ejemplo 46

Una cuña, que tiene una superficie pulida y una inclinación de  $60^\circ$ , está acelerada con una aceleración constante de  $20 \text{ m/s}^2$ , en la dirección que indica la figura. Si en determinado instante se coloca sobre la cuña, en el punto  $A$ , una masa de  $2 \text{ kg}$  ¿se mantendrá en equilibrio esta partícula? ... En caso de desplazarse, calcular el tiempo que tardará en llegar al extremo correspondiente.



$$\begin{aligned} m &= 2 \text{ kg} \\ \overline{AB} &= 10 \text{ m} \\ \overline{AC} &= 17 \text{ m} \\ g &= 10 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

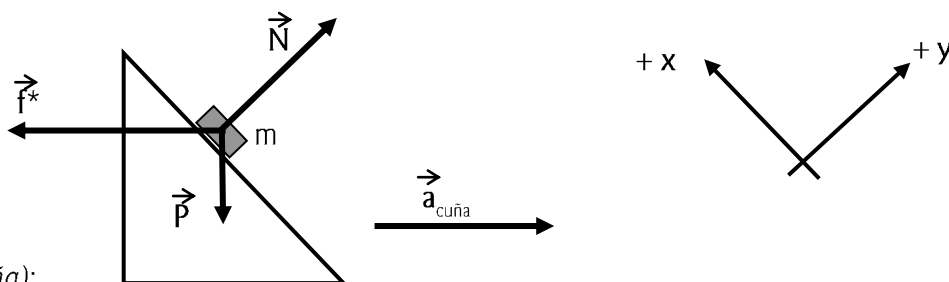
Solución:

Este es un buen ejemplo para observarlo experimentalmente. Con una carpeta rígida en forma de cuña y un objeto apoyado sobre la misma, este caso se puede representar. Se observa cómo, si pegamos un tirón a la carpeta en la forma indicada (dirección y sentido de  $\vec{a}_c$ ), el objeto sube primero por su pendiente y luego cae ...

¿Qué es lo que hizo subir al objeto? ... ¡ Si sabemos que actúan sobre él nada más que las fuerzas reales Peso y Normal del plano !

Lo que sucede, *visto desde el Sistema Inercial Tierra*, es que la cuña acelerada empuja al objeto generando una Normal superior a la que existe con el plano inclinado en reposo. Entonces la componente vertical de esa Normal puede igualar al Peso, con lo que el objeto se quedaría donde está; o puede superarlo, cosa que sucede cuando el objeto sube. En este caso, respecto de Tierra, el objeto sube, pero avanza en el sentido de la cuña, debido a la componente horizontal de la fuerza Normal.

En cambio, *visto desde el Sistema No Inercial cuña*, la interpretación sólo puede darse a través de la existencia de una fuerza extraña, dado que, aún parado arriba de la cuña y suponiendo conocido este incremento de la Normal, uno “no ve” ninguna componente de esta fuerza o de otra real en el sentido del plano inclinado como para justificar la subida del objeto y su marcha “hacia atrás”, respecto de la cuña. La causa es, indudablemente, una fuerza ficticia.



Desde SNI (cuña):

$$\sum \vec{f}_{\text{reales}} + \vec{f}^* = m \cdot \vec{a}_{mc} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{En } x: & f^* \cdot \cos 60^\circ - P \cdot \sin 60^\circ = m \cdot a_{mcx} \\ \text{En } y: & N - P \cdot \cos 60^\circ - f^* \cdot \sin 60^\circ = 0 \end{matrix}$$

( $a_{mc}$ : aceleración de  $m$  respecto de la cuña)

$$\vec{f}^* = -m \cdot \vec{a}_{\text{cuña}} \quad \Rightarrow \quad |f^*| = f^* = m \cdot |a_{\text{cuña}}| = 2 \text{ kg} \cdot 20 \text{ m/s}^2 = 40 \text{ N}$$

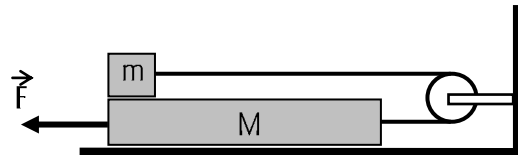
De estas ecuaciones resulta:  $a_{mcx} = +1.34 \text{ m/s}^2$

Quiere decir que el cuerpo sube por el plano inclinado, con un MRUV ( $a_{mcx}$  constante), y demora  $t_s$  para llegar a B:

$$\overline{AB} = \frac{1}{2} a_{mcx} \cdot t_s^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_s = (2 \cdot \overline{AB} / a_{mcx})^{1/2} = 3.86 \text{ s}}$$

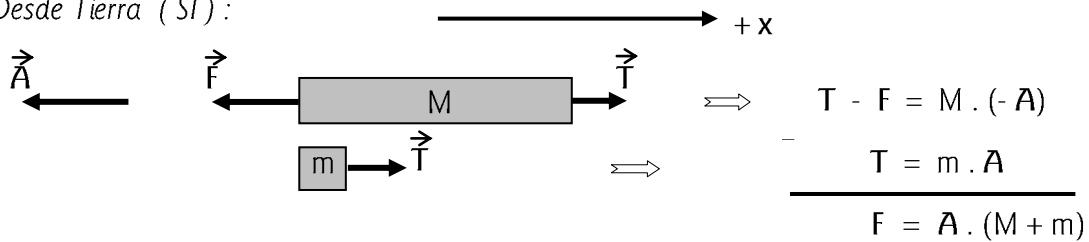
**Ejemplo 47**

En el sistema de la figura no hay roce entre las superficies. Si se aplica la fuerza  $\vec{F}$  a la tabla de masa  $M$  y longitud  $l$ , calcular el tiempo en que la partícula de dimensiones despreciables, de masa  $m$ , recorre la tabla de extremo a extremo. En  $t = 0$  el sistema está en reposo.

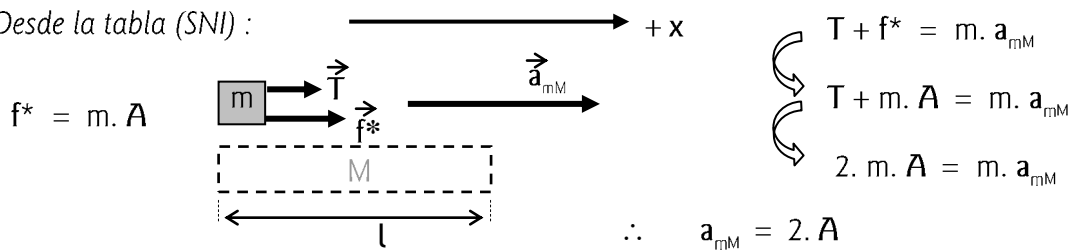


Solución:

Desde Tierra (SI):



Desde la tabla (SNI):



Por otra parte, se podría calcular  $a_{mM}$  (aceleración de la partícula  $m$  respecto de la tabla  $M$ ) utilizando la ley de adición de aceleraciones:  $\vec{a}_{mM} = \vec{a}_{mT} - \vec{a}_{MT} = \vec{a}_{mT} - \vec{A}$ .

Con el sistema de referencias adoptado:  $a_{mM} = A - (-A) = 2 \cdot A$ .

Luego, teniendo en cuenta que  $F = A \cdot (M + m)$ , resulta:  $a_{mM} = 2 \cdot F / (M + m)$ .

Ahora, sabiendo que las fuerzas actuantes sobre  $m$  son constantes ( $T$  y  $f^*$ ), la partícula desarrolla un MRUV sobre la tabla y puede escribirse:  $\frac{1}{2} a_{mM} \cdot t^2 = l$ .

$$\boxed{t = (2 \cdot l / a_{mM})^{1/2} = [(M + m) \cdot l / F]^{1/2}}$$



Un tren o un auto girando en una curva, también sugieren fuerzas ficticias para justificar lo que en ellos sucede. Sentimos que nos respaldamos sobre sus puertas o ventanillas durante el giro; luego sentimos una fuerza real sobre nosotros, pero no nos aceleramos respecto del vehículo: una fuerza ficticia hace que la suma total de fuerzas sea cero, y por ello permanecemos inmóviles. En cambio, visto desde Tierra, solo se observa la fuerza real que obliga a que también nosotros giremos respecto de Tierra.

La fuerza ficticia que aparece en sistemas no inerciales en rotación, se llama *fuerza centrífuga*. Como las otras, no tiene reacción.

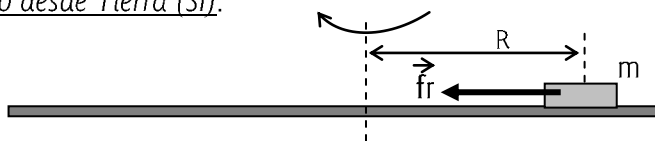
### Ejemplo 48

Sobre un disco horizontal que gira con velocidad angular  $\omega$  constante, a una distancia  $R$  del eje, se encuentra un cuerpo que está a punto de deslizarse. Existe un coeficiente de roce  $\mu$  entre el disco y este objeto. Calcular la fuerza centrífuga actuante sobre el cuerpo.

Solución:

Analizaremos el problema desde un observador “terrestre” y luego desde otro, ubicado arriba del disco, junto al objeto.

Visto desde Tierra (SI):



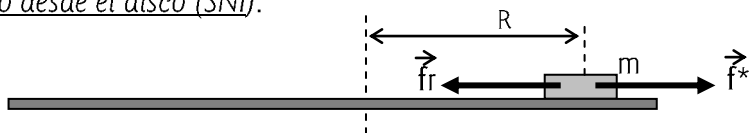
Dado que  $m$  está a punto de deslizarse:

$$f_r = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g$$

$\vec{f}_r$  es la fuerza centrípeta que genera la aceleración centrípeta de módulo:

$$a_c = f_c / m = f_r / m = \omega^2 \cdot R$$

Visto desde el disco (SNI):



Existe  $\vec{f}_r$ , pero aparece también  $\vec{f}^*$ , que es la fuerza centrífuga.

Como el objeto se ve en reposo, es obvio que ambas fuerzas son opuestas y que su suma vectorial da cero:  $\sum \vec{f}_{\text{reales}} + \vec{f}^* = \vec{a}_{m\text{SNI}} = 0 \quad \vec{f}_r + \vec{f}^* = 0$

Por lo tanto:

$$f^* = f_r = m \cdot a_c = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

.....

Hay otra fuerza ficticia que aparece cuando un objeto se desplaza radialmente sobre un disco en rotación. Es la *fuerza de Coriolis*, de la que se hablará más adelante.

Volviendo ahora al *1er. Principio de Newton*, vemos que se justifica su enunciado porque, si se cumple, seguro que valen los otros dos principios. El *1er. Principio* oficia entonces de test, para ver si el sistema en el que nos encontramos es un sistema inercial.

### Experiencias sencillas

\* En el *Ejemplo 46* se menciona la conveniencia de realizar una sencilla experiencia para constatar que un cuerpo puede subir por un plano inclinado, cuando éste se encuentra acelerado. Observa bien qué sucede acelerando la carpeta (cuña) en uno u otro sentido, o cuando simplemente la mueves con velocidad constante.

\* Si haces girar a una partícula (un tornillo, una piedra, ...) sostenida por un resorte, cuyo otro extremo sostienes con la mano, verás que cuanto mayor velocidad angular imprimas al movimiento de la partícula con el resorte, mayor será el estiramiento del resorte. Esto es así porque a mayor velocidad (angular o tangencial), mayor aceleración centrípeta:  $a_c = v^2/R = \omega^2 \cdot R$ ; y la aceleración centrípeta es fruto de una fuerza centrípeta provista en este caso por el elemento elástico. Luego, si el resorte proporciona una fuerza mayor, la partícula realiza sobre éste una fuerza también mayor (acción y reacción) provocándole un estiramiento más grande.

\* Con una banda elástica se puede verificar lo tratado en el *Ejemplo 43*. Observa que si sostenemos a una gomita de la que cuelga algo, la gomita adquiere cierto estiramiento. Pero si de pronto aceleramos nuestra mano hacia arriba, el estiramiento aumenta; y si la aceleramos hacia abajo, el efecto es contrario, adquiriendo la gomita su longitud natural cuando es dejada caer libremente.

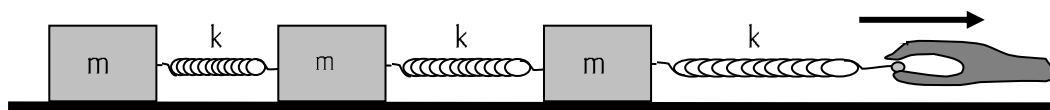
\* El resorte (una especie de dinamómetro) nos puede ser útil para comprobar que la fuerza de roce máxima depende de la normal. Tomamos una carpeta apoyada sobre una mesa, por ejemplo, le enganchamos un resorte y tratamos de ponerla en movimiento. Veremos que el resorte se estira más si sobre la carpeta depositamos otro objeto: aumenta la “normal”, la fuerza que la superficie de apoyo ejerce sobre la carpeta. Y también comprobamos que el resorte se estira menos si realizamos la misma experiencia sobre una superficie lubricada.

\* Ahora, sabiendo que la fuerza de roce es proporcional al tipo de superficies en contacto, deja deslizar por un plano inclinado (puede ser cualquier tabla, o la carpeta anterior), desde la misma altura, a un capuchón de lapicera y a un ganchito “clip”. Una vez llegados ambos a la mesa horizontal, ¿cuál de los objetos avanza más? ¿Por qué? ... En todo caso, si deseas realizar experiencias con muy bajo coeficiente de roce, toma un cubito de hielo y hazlo deslizar sobre una superficie mojada.

\* Lo del péndulo es más sencillo: toma un cordel y átale una tuerca o algo así. Apártalo de la vertical y hazlo oscilar, para verificar que cuanto más corto es el cordel (lo tomo con la mano más cerca de la “tuerca”), más corto es el periodo de oscilación:  $T \propto l^{1/2} \iff [T = 2\pi \cdot (l/g)^{1/2}]$ .

\* Algunos negocios se especializan en vender resortes y, entre éstos, resortes para fabricar dinamómetros. Estos elementos suelen ser adecuados para realizar distintas experiencias, además, por cierto, de que puedas construir tu propio medidor de módulos de fuerzas. Compra 30 cm de este tipo de resorte, córtalo en tres partes y obtendrás de esa manera tres resortes de 10 cm cada uno, con la misma constante (k). Ahora toma tres cuerpos del mismo peso (igual masa - pueden ser tres tacos de madera iguales -) y arma sobre una mesa horizontal o sobre un piso sin asperezas un

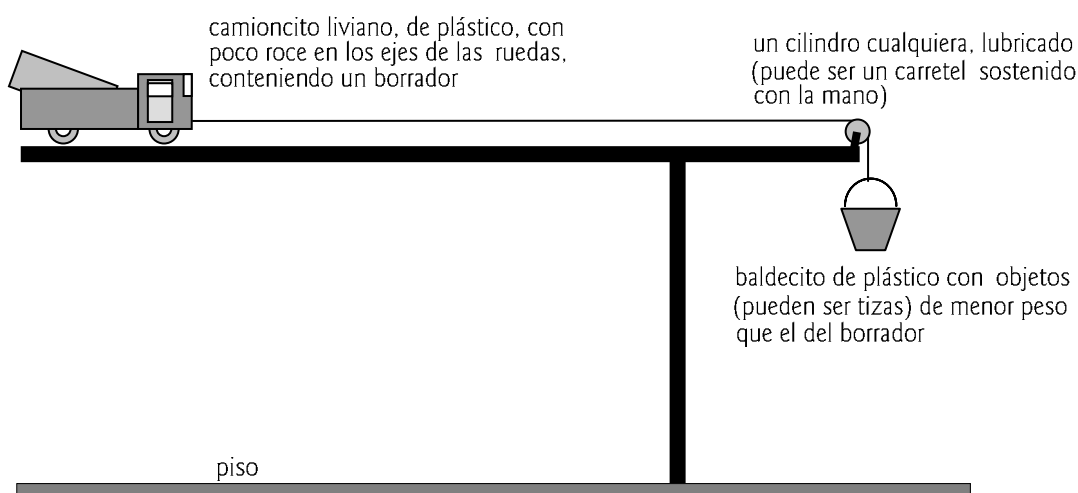
“trecito” como el de la figura; luego tira con la mano del extremo de uno de los resortes:



Verás que los estiramientos de los resortes son desiguales. Y si tienes paciencia, y el roce entre los tacos de madera y la mesa realmente puede despreciarse, conociendo  $m$  y  $k$  hasta puedes calcular y luego verificar la magnitud de estos estiramientos. La constante  $k$  de uno cualquiera de los resortes (los demás son iguales) se calcula fácilmente colgándole pesas de valores conocidos y midiendo el alargamiento que éstas le producen cuando cuelga verticalmente.

\* Ya que dispones de resortes y pesas (si es que has realizado la experiencia anterior), engancha una pesa en el extremo de un resorte que cuelga verticalmente; luego aparta a esa pesa de su condición de equilibrio y observa alrededor de qué punto se establece un movimiento alternativo. Detén el movimiento y ahora agrega otra pesa; verás que las oscilaciones se dan alrededor de otro punto: el que corresponde al nuevo equilibrio. Pero, además, observa que ahora las pesas van y vienen en un tiempo mayor que cuando había una sola; acabas de verificar que el periodo es proporcional a la masa que se mueve con MAS (recuerda:  $T = 2\pi \cdot (m/k)^{1/2}$ ).

\* Se puede calcular la tensión del hilo y la aceleración de los cuerpos para un sistema formado por un objeto que cuelga de un hilo que con su otro extremo arrastra a otro objeto apoyado sobre una superficie horizontal lisa. Pero arma la experiencia para verificar que, en efecto, la aceleración que se obtiene depende de las masas de los cuerpos del sistema, y que, además, no es lo mismo que cuelgue un cuerpo liviano para arrastrar a otro más pesado que al revés: que sea el pesado el que cuelga. ¿Es esto lo que puedes deducir de las ecuaciones?



Si la altura de la mesa no te permite percibir la diferencia de aceleraciones cuando se permutan los objetos del camioncito y del balde, levanta la mesa apoyando sus patas sobre bancos, por ejemplo.

# **TRABAJO y ENERGÍA**

## de la Partícula



## TRABAJO y ENERGÍA de la Partícula

Veremos en detalle cómo es conveniente definir matemáticamente al *trabajo* y a la *energía*. Pero comenzaremos diciendo que el trabajo es una especie de “manifestación de la energía”, mientras que ésta es aquello que posee “condiciones de generar trabajo”.

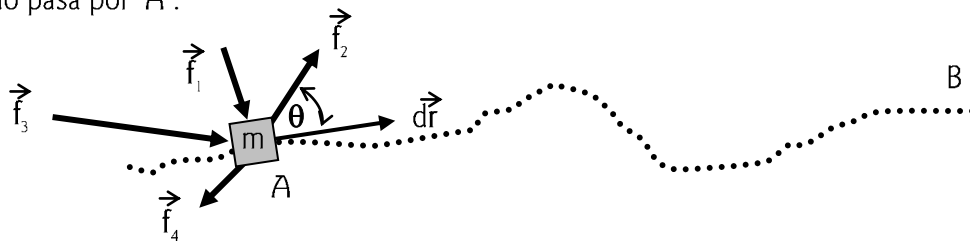
No parece aclarar nada esta breve introducción. Sin embargo, si llamamos *trabajo* a la fuerza junto con su desplazamiento (en realidad, desplazamiento de la partícula sobre la que la fuerza actúa), y *energía* a la capacidad que tienen los cuerpos (o los campos, como el electromagnético, p.ej.) para realizar dicha acción, vamos adivinando la relación entre ambas magnitudes físicas y por qué se expresan las dos con las mismas unidades de medida.

Por otra parte, el Teorema Trabajo-Energía que usaremos profusamente a partir de este capítulo deviene de las Leyes de Newton, lo que podría parecer una limitación de estos conceptos al campo de la *Mecánica Clásica*. No obstante, el electromagnetismo y la física atómica se valen permanentemente de la relación trabajo-energía.

Por último, antes de las definiciones, digamos que con lo que sigue podremos resolver cuestiones como la de calcular velocidades de partículas que no necesariamente siguen trayectorias lineales o circulares, consideradas detenidamente en los capítulos de *CINEMÁTICA* y *DINÁMICA de la Partícula*.

### TRABAJO

Sobre la partícula de masa  $m$  de la figura actúan varias fuerzas, bajo las cuales la partícula sigue una trayectoria como la dibujada; su desplazamiento diferencial está dado por  $d\vec{r}$  cuando pasa por  $A$ .



(Obviamente, las fuerzas se supone que van variando, porque de lo contrario la trayectoria sería una recta).

Para un desplazamiento  $d\vec{r}$  de la partícula, se *define* como trabajo de la fuerza  $\vec{f}_2$ , por ejemplo, al producto escalar entre esta fuerza y dicho desplazamiento:

$$dW_{f_2} = \vec{f}_2 \cdot d\vec{r}$$

que se puede expresar como:

$$dW_{f_2} = |\vec{f}_2| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos \theta = f_2 \cdot dr \cdot \cos \theta \quad \text{ó} \quad dW_{f_2} = f_{2x} \cdot dx + f_{2y} \cdot dy + f_{2z} \cdot dz$$

El trabajo correspondiente a un desplazamiento finito, entre  $A$  y  $B$ , por ejemplo, se calcula realizando sumatorias de los “trabajitos” diferenciales:

$$W_{f_2} = \sum_{(A \rightarrow B)} dW_{f_2} = \int_A^B f_2 \cdot dr \cdot \cos \theta = \int_A^B (f_{2x} \cdot dx + f_{2y} \cdot dy + f_{2z} \cdot dz)$$

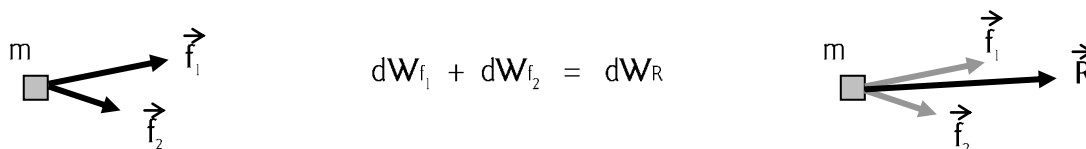
El símbolo  $\int_A^B$  representa una *integral curvilínea* (sumatoria a lo largo de la curva-trayectoria).

La unidad de medida de la magnitud "Trabajo" es:  $[W] = [f] \cdot [x]$

En el Sistema Internacional (S.I.):  $[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$  (Joule)  
 En el Sistema Técnico:  $[W] = \text{kgf} \cdot \text{m} = \text{kgfm}$  (kilográmetro)  
 En el Sistema c. g. s.:  $[W] = \text{dyn} \cdot \text{cm} = \text{ergio}$

Siendo el trabajo un producto escalar, valen para el mismo las propiedades correspondientes a cualquier otro producto escalar entre vectores:

- $dW_f$  es un número (no vector) mayor, menor o igual a 0.
- La suma de los trabajos de cada una de las fuerzas que actúan sobre una partícula, es igual al trabajo de la resultante de las mismas:



*Demostración, para fuerzas en dos dimensiones (plano):*

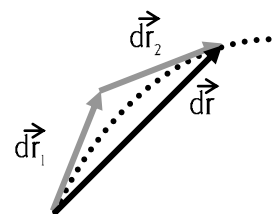
$$dW_{f_1} = f_{1x} \cdot dx + f_{1y} \cdot dy \qquad dW_{f_2} = f_{2x} \cdot dx + f_{2y} \cdot dy$$

$$\underline{dW_{f_1} + dW_{f_2}} = f_{1x} \cdot dx + f_{1y} \cdot dy + f_{2x} \cdot dx + f_{2y} \cdot dy = \underbrace{(f_{1x} + f_{2x})}_{R_x} \cdot dx + \underbrace{(f_{1y} + f_{2y})}_{R_y} \cdot dy$$

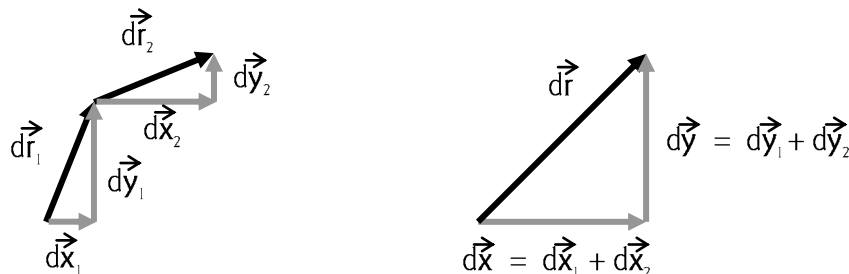
$$= R_x \cdot dx + R_y \cdot dy = \underline{dW_R}$$

- Si  $d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2$ , entonces:

$$\vec{f} \cdot d\vec{r} = \vec{f} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f} \cdot d\vec{r}_2$$



*Demostración:*



$$+ \begin{aligned} \vec{f} \cdot d\vec{r}_1 &= f_x \cdot dx_1 + f_y \cdot dy_1 \\ \vec{f} \cdot d\vec{r}_2 &= f_x \cdot dx_2 + f_y \cdot dy_2 \end{aligned}$$

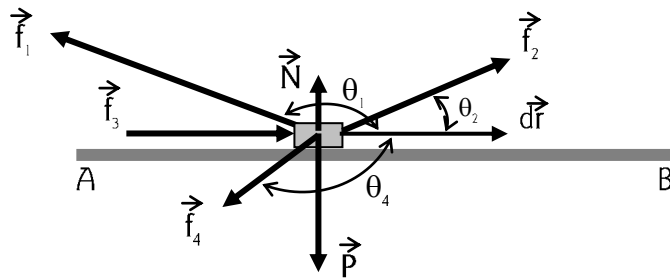
---


$$\left[ \vec{f} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f} \cdot d\vec{r}_2 = f_x \cdot (dx_1 + dx_2) + f_y \cdot (dy_1 + dy_2) = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy = \vec{f} \cdot d\vec{r} \right]$$

**Ejemplo 49**

La partícula  $m$  se desplaza entre  $A$  y  $B$  bajo la acción de las fuerzas constantes que se señalan.

Calcular el trabajo que aporta cada una de estas fuerzas.



$\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_4$  son ángulos que las direcciones de las fuerzas  $\vec{f}_1, \vec{f}_2$  y  $\vec{f}_4$  forman con  $\vec{dr}$ , mientras que las fuerzas  $\vec{N}$  y  $\vec{P}$  están a  $\pi/2$  de dicho vector desplazamiento.

Solución:

$$W_{N(A \rightarrow B)} = \int_A^B N \cdot dr \cdot \cos \pi/2 = \underline{0} \qquad W_{P(A \rightarrow B)} = \int_A^B P \cdot dr \cdot \cos \pi/2 = \underline{0}$$

$$W_{f_3(A \rightarrow B)} = \int_A^B f_3 \cdot dr \cdot \cos 0 = f_3 \cdot \int_A^B dr = \underline{f_3 \cdot \overline{AB}} > 0$$

$$W_{f_2(A \rightarrow B)} = \int_A^B f_2 \cdot dr \cdot \cos \theta_2 = f_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \int_A^B dr = \underline{f_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \overline{AB}} > 0$$

De otra manera:  $W_{f_2(A \rightarrow B)} = \int_A^B f_{2x} \cdot dx = f_{2x} \cdot \int_A^B dx = \underline{f_{2x} \cdot \overline{AB}} = f_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \overline{AB} > 0$

( eligiendo la siguiente referencia  $\longrightarrow +x$  ) :

$$W_{f_1(A \rightarrow B)} = \int_A^B f_1 \cdot dr \cdot \cos \theta_1 = f_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \int_A^B dr = f_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \overline{AB} = \underline{-f_{1x} \cdot \overline{AB}} < 0$$

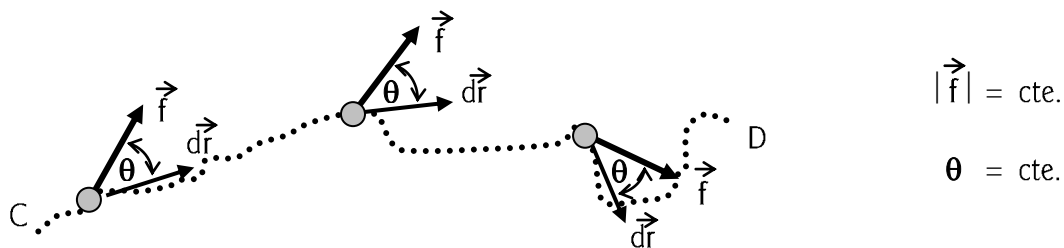
$$W_{f_4(A \rightarrow B)} = \int_A^B f_4 \cdot dr \cdot \cos \theta_4 = f_4 \cdot \cos \theta_4 \cdot \int_A^B dr = f_4 \cdot \cos \theta_4 \cdot \overline{AB} = \underline{-f_{4x} \cdot \overline{AB}} < 0$$

.....

Obsérvese que, independientemente de los sistemas de referencia adoptados, el trabajo de una fuerza es *positivo* si la fuerza o alguna de sus componentes “acompañan” al movimiento de la partícula sobre la que la fuerza está aplicada. En caso de que se oponga al movimiento, la fuerza generará un trabajo *negativo*; y será *nulo* si la dirección de la fuerza es perpendicular al movimiento.

Por otra parte, en el ejemplo desarrollado la trayectoria era una recta y el trabajo resultaba simplemente “fuerza por distancia”. Pero si la dirección de una fuerza de módulo constante se mantiene invariante respecto a las direcciones de los desplazamientos diferenciales, el resultado es también “fuerza por distancia”, en donde ésta última es la longitud de la trayectoria, aunque la misma fuese una curva cualquiera:





Aquí,  $W_f = \int_{(C \rightarrow D)} \vec{f} \cdot d\vec{r} \cos \theta = f \cdot \cos \theta \cdot \int_C^D dr = f \cdot \cos \theta \cdot l_{CD}$   
 ( $l_{CD}$  : longitud de la trayectoria)

Véase un caso similar en el tema que sigue.

### Trabajo de la fuerza de roce

La fuerza de roce se opone en cada posición al vector *diferencial de desplazamiento*, por lo cual el ángulo que esta fuerza forma con  $d\vec{r}$  es siempre de  $\Pi$  radianes. Por otra parte, si no varía  $N$  a lo largo de la trayectoria, el módulo de la fuerza de roce también se mantiene constante, de valor  $\mu N$ . Por lo que:

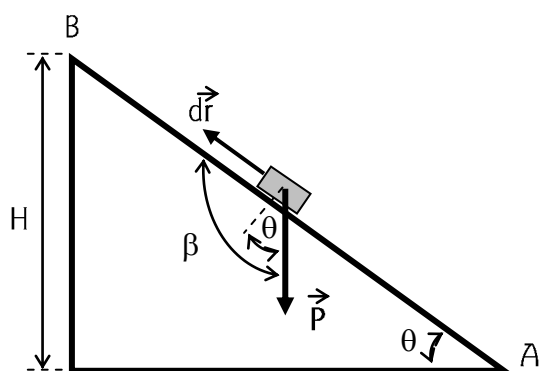
$W_{fr} = -\mu N \cdot l$

donde  $l$  es la longitud de la trayectoria, cualquiera sea su forma.

Las fuerzas se pueden comportar de cualquier manera sobre un cuerpo, mientras éste se desplace. Es decir, se debe conocer dicha variación punto a punto, a efectos de poder calcular el trabajo que aportan. Pero hay otras (como la que estudiaremos a continuación) cuyo comportamiento se puede anticipar, para las que su trabajo es digno de tenerse en cuenta por su particularidad.

### Trabajo de la fuerza peso

Imaginemos que un cuerpo sube por un plano inclinado bajo la acción de algunas fuerzas, mientras que, entre todas, se encuentra también la de su peso:

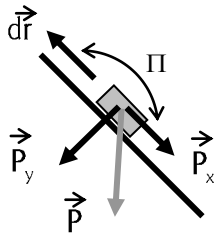


$$\left[ \begin{aligned}
 W_p &= \int_{(A \rightarrow B)}^B P \cdot dr \cos \beta = \\
 &= P \cdot \cos \beta \cdot \overline{AB} = \\
 &= P \cdot (-\text{sen } \theta) \cdot \overline{AB} = \\
 &= - P \cdot \overline{AB} \cdot \text{sen } \theta = \\
 &= - P \cdot H
 \end{aligned} \right]$$

El signo “ - ” es por lo que ya se comentó: es negativo el trabajo de la fuerza que se opone al movimiento.

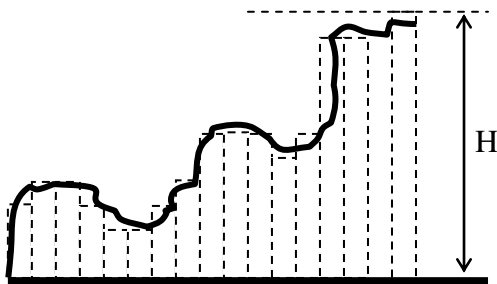
Este resultado se hubiese podido obtener aplicando una de las propiedades mencionadas del producto escalar “trabajo”:  $dW_{f_1} + dW_{f_2} = dW_R$ . La fuerza *peso* puede considerarse

la resultante o suma de sus componentes; por lo que el trabajo del peso debe ser igual a la suma de los trabajos de sus componentes paralela y perpendicular al plano.



Un análisis similar se puede realizar para calcular el trabajo del peso cuando la partícula desciende por el plano inclinado. Es fácil imaginarse que el resultado cuantitativo debe ser el mismo, con la salvedad de que en tal caso el trabajo es positivo, por ayudar el peso al movimiento de bajada. Así, para el mismo caso, en bajada:  $W_p = + P \cdot H$ .

Por otro lado, si el objeto sube o baja por un camino ondulado, además de que el trabajo del peso será negativo o positivo, demostraremos que también es proporcional al desnivel que cubra, independientemente de cómo es la forma o la longitud de dicha trayectoria.



Cualquier ondulación puede considerarse compuesta por infinitos escalones de paredes verticales y horizontales. La fuerza peso, por lo visto precedentemente, sólo aportaría trabajo en los tramos en que la partícula recorre paredes verticales, cuya suma equivale al desnivel H.

En síntesis: el peso no ejecuta trabajo si la partícula pasa desde un punto a otro ubicado en el mismo nivel horizontal, siguiendo el camino más intrincado imaginable, con infinitas subidas y bajadas. Pero su trabajo vale  $\pm P \cdot H$  si en los extremos de la trayectoria hay un desnivel H.

Por distintas razones que se justificarán más adelante, analizaremos ahora otro “trabajo” especial.

### Trabajo de la fuerza del resorte

Si sobre una partícula que se mueve sobre una recta entre dos posiciones  $x_1$  y  $x_2$ , por ejemplo, actúan varias fuerzas entre las que se encuentra la que le ejerce un resorte y que llamaremos  $\vec{F}_R$ , el trabajo de esta última se calcula teniendo en cuenta cómo varían su módulo y su sentido con la posición de la partícula:  $F_R = -k \cdot x$ . Haciendo coincidir al eje x con la trayectoria, el producto escalar “trabajo del resorte” se reduce al término  $f_x (\equiv F_R) \cdot dx$ :

$$\left[ W_{F_R} = \int_{x_1}^{x_2} f_x \cdot dx = - \int_{x_1}^{x_2} k \cdot x \cdot dx = -1/2 k \cdot (x_2^2 - x_1^2) \right]$$

La lectura del resultado obtenido nos indica que el trabajo del resorte sobre la partícula, entre  $x_1$  y  $x_2$ , depende de estas posiciones y no del camino recorrido, aunque hubiese sido de varias pasadas por estos lugares.

*¡ Comparar con el trabajo de la fuerza peso !*

Naturalmente, cualquier otra fuerza elástica ( $f \propto x$ ) proveniente de bandas elásticas u otros dispositivos, genera también un trabajo independiente del camino recorrido entre dos puntos.

Es bueno tener presente que no es lo mismo para un resorte “trabajar” entre posiciones que van de 3 a 5 cm, por ejemplo, que hacerlo entre 9 y 11 cm, aunque la distancia entre esos puntos sea la misma: 2 cm (¡Verificalo numéricamente!). Y que cuanto más “fuerte” sea el resorte (un  $k$  grande), mayor será el trabajo que desarrolle.

Las fuerzas constantes, como el peso, o unidireccionales dependientes de la posición, como el resorte, se llaman *fuerzas conservativas*. El trabajo que realizan sobre una partícula, cuando ésta pasa de A a B, por ejemplo, no depende del camino que la partícula sigue entre esos puntos; cualquiera sea éste, el trabajo vale lo mismo.

Pero puede haber infinitas fuerzas conservativas. Son todas aquellas que cumplen con la condición de que sus derivadas parciales cruzadas sean iguales:

$$\delta F_y / \delta x = \delta F_x / \delta y \quad \delta F_z / \delta x = \delta F_x / \delta z \quad \delta F_z / \delta y = \delta F_y / \delta z$$

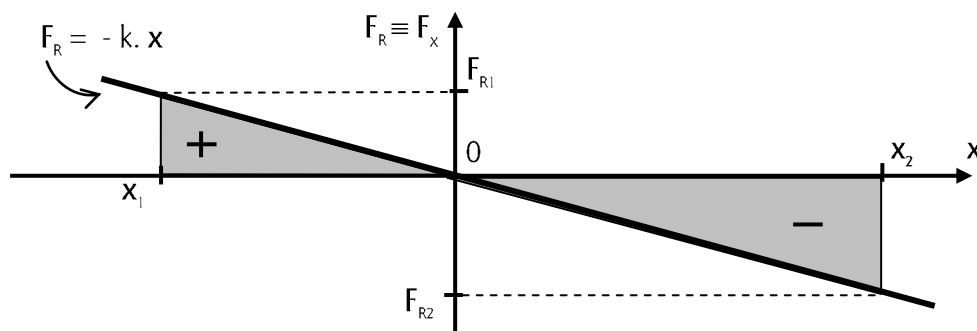
Más adelante, en el *Ejemplo 58*, veremos la aplicación de estas derivadas.

En base al trabajo que aportan, se puede realizar la siguiente

*CLASIFICACIÓN DE LAS FUERZAS*

- \* Fuerzas que guían (normales a la trayectoria) .....  $W_N = 0$
- \* Fuerzas disipativas (fuerzas de roce) - Disipan Energía Cinética ...  $W_f < 0$
- \* Fuerzas conservativas (no dependen de la trayectoria) .....  $W_f > = < 0$
- \* Otras fuerzas .....  $W_f > = < 0$

En un gráfico  $f_x = f(x)$  correspondiente a cualquiera de estas fuerzas o a sus componentes sobre  $x$ , el área encerrada por la curva representa el trabajo que la fuerza (o su componente en  $x$ ) genera en el trecho en que actúa. Tener en cuenta esto es particularmente interesante para casos como el del resorte, en donde a simple vista se puede hacer una evaluación del trabajo total realizado, y de su signo:



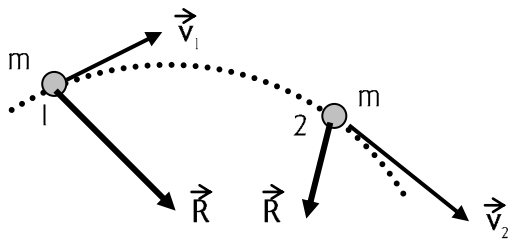
Este gráfico corresponde al caso en que una partícula enganchada a un resorte de constante  $k$  pasa por  $x_1$  dirigiéndose al punto  $x = 0$ , en el que el resorte no ejerce fuerza alguna (tiene su longitud natural). En ese tramo el resorte empuja, aportando trabajo positivo. A partir

de 0 continúa moviéndose la partícula hacia  $x_2$ , mientras el resorte comienza su acción de frenado, generando trabajo negativo.

Se observa en este ejemplo que, entre  $x_1$  y  $x_2$ , el resorte aportó trabajo total negativo (le quitó energía a la partícula). Por otra parte, si  $|\vec{x}_1| = |\vec{x}_2|$ , el trabajo neto entre estas posiciones es *cero*.

**TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA**

Una partícula de masa  $m$  se mueve bajo la acción de varias fuerzas, cuya suma está representada por la resultante  $\vec{R}$ , entre los puntos 1 y 2 de la trayectoria indicada en la figura. En el punto 1 su velocidad es  $\vec{v}_1$ , y cuando pasa por 2 su velocidad es  $\vec{v}_2$ .



Se cumple:

$$W_{R \ (1 \rightarrow 2)} = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$$

Esta expresión nos dice que debido al trabajo de todas las fuerzas sobre la partícula, varía la expresión  $\frac{1}{2} m \cdot v^2$ , a la que se dio en llamar *Energía Cinética* ( $E_c$ ). Lo de *cinética*, porque son términos vinculados al movimiento; lo de *energía*, por lo que ya comentamos en cuanto a la capacidad de producir trabajo: es obvio que a mayor masa y a mayor velocidad la partícula está en condiciones de causar más daño contra el obstáculo con que se encuentre (podrá aplicar mayor fuerza y lograr mayor desplazamiento).

A partir de las Leyes de Newton, en un Sistema Inercial, se demuestra el Teorema:

$$\begin{aligned} dW_R &= \vec{R} \cdot d\vec{r} = (d\vec{p}/dt) \cdot d\vec{r} = d\vec{p} \cdot (d\vec{r}/dt) = m \cdot d\vec{v} \cdot (d\vec{r}/dt) = m \cdot d\vec{v} \cdot \vec{v} \\ W_{R \ (1 \rightarrow 2)} &= \int_1^2 dW_R = \int_1^2 m \cdot d\vec{v} \cdot \vec{v} = m \cdot \int_1^2 \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \cdot \int_1^2 (v_x \cdot dv_x + v_y \cdot dv_y) = \\ &= \frac{1}{2} m \cdot \left\{ [v_x^2]_1^2 + [v_y^2]_1^2 \right\} = \frac{1}{2} m \cdot [(v_{x2}^2 + v_{y2}^2) - (v_{x1}^2 + v_{y1}^2)] = \\ &= \frac{1}{2} m \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = E_{c2} - E_{c1} \end{aligned}$$

Se ha demostrado el Teorema Trabajo-Energía para el caso bidimensional, simplemente por una comodidad formal. Naturalmente, es válido para las demás dimensiones.

Otra manera de expresar el Teorema, es:

$$W_{\text{todas las fuerzas}} = \Delta E_c$$

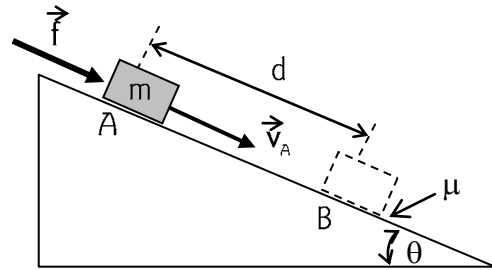
En caso de querer aplicar el Teorema T-E en un Sistema No Inercial, se debe tener en cuenta el trabajo de la fuerza ficticia, y que las velocidades y las energías cinéticas son referidas a ese sistema no inercial:

$$W_{\text{todas las fuerzas reales}} + W_{f^*} = \Delta E_{c_{SNI}} \quad \text{SNI}$$

### Ejemplo 50

Una partícula de masa  $m = 1 \text{ kg}$  desciende por un plano inclinado, rugoso, empujada por una fuerza paralela al plano, como se señala en la figura. Cuando la partícula pasa por el punto  $A$ , tiene una rapidez de  $10 \text{ m/s}$ .

Calcular la rapidez de la partícula cuando pasa por  $B$ , a  $50 \text{ m}$  de  $A$ , aplicando el Teorema T-E, y luego verificar si el resultado coincide con el que se obtiene utilizando el método dinámico conocido.



DATOS:  $f = 20 \text{ N}$  ;  $\mu = 0.5$  ;  $d = 50 \text{ m}$  ;  $\theta = 37^\circ$  ;  $m = 1 \text{ kg}$  ;  $v_A = 10 \text{ m/s}$

Solución:

Consideraremos como dato adicional a  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

(T-E) :  $W_R = \Delta E_c$

$$W_R = W_P + W_f + W_{f_r} + W_N^0 = E_{c_B} - E_{c_A}$$

$$W_P = P \cdot d \cdot \sin 37^\circ = 10 \text{ N} \cdot 30 \text{ m} = 300 \text{ J}$$

(A → B)

$$W_f = f \cdot d = 20 \text{ N} \cdot 50 \text{ m} = 1000 \text{ J}$$

(A → B)

$$W_{f_r} = -\mu \cdot N_1 \cdot d = -0.5 \cdot 8 \text{ N} \cdot 50 \text{ m} = -200 \text{ J}$$

(A → B)

$$\therefore W_R = (300 + 1000 - 200) \text{ J} = 1100 \text{ J}$$

Por otro lado:  $[\Delta E_c = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 = (0.5 \cdot v_B^2 - 50) \text{ J}]$

Igualando:  $1100 \text{ J} = (0.5 \cdot v_B^2 - 50) \text{ J} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B \approx 48 \text{ m/s}}$

(Cinemática y Dinámica) :  $\sum \vec{f} = m \cdot \vec{a}$

Dado que todas las fuerzas actuantes sobre la partícula son constantes, la aceleración de la misma también es constante. Por lo tanto se genera un movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV), cuyas ecuaciones horarias ya conocemos:

$$\left. \begin{aligned} v_B &= v_A + a \cdot t \\ d &= v_A \cdot t + \frac{1}{2} \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \quad d = (v_B^2 - v_A^2) / 2a \quad \Rightarrow \quad v_B = (2a \cdot d + v_A^2)^{1/2}$$

$$a = \sum f / m = (f + P \cdot \sin 37^\circ - \mu N_1) / m = (20 + 6 - 0.5 \cdot 8) \text{ N} / 1 \text{ kg} = 22 \text{ m/s}^2$$

$$\boxed{v_B = (2 \cdot 22 \cdot 50 + 100)^{1/2} \approx 48 \text{ m/s}}$$

.....

**Ejemplo 51**

Desde el punto 1 se lanza una piedra de masa  $m$  verticalmente hacia arriba, la que llega al punto 2 con velocidad cero. Aplicando el Teorema T-E demostrar que la piedra conserva su energía cinética al volver a pasar por el punto 1, en su caída.

Solución:

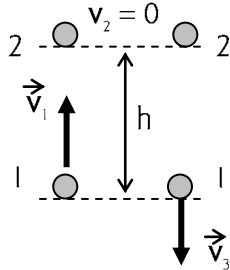
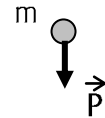


Diagrama de cuerpo aislado:  
(Única fuerza actuante, el peso.)



Aplicando  $W_{todas} = \Delta E_c$  :

$$1 \text{ a } 2 : - m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 \quad (1)$$

$$2 \text{ a } 3 : + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v_3^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 \quad (2)$$

Comparando (1) con (2), y teniendo en cuenta que  $v_2 = 0$ , resulta que  $E_{c3} = E_{c1}$ . O sea,  $v_3 = v_1$ , como ya pudimos deducir en *CINEMÁTICA* y *DINÁMICA de la Partícula*.

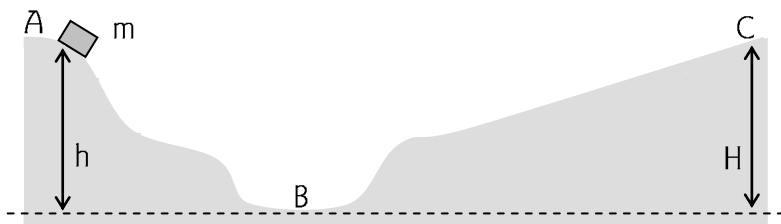
.....

Pareciera redundante el método de T-E para resolver problemas, a juzgar por el ejemplo desarrollado. Sin embargo, hay múltiples situaciones que requieren su uso, entre otras razones porque las trayectorias de las partículas no siempre son rectilíneas, como la de este plano inclinado.

**Ejemplo 52**

Sobre la pista lisa de la figura, se coloca un cuerpo de masa  $m$  en el punto A. El cuerpo comienza a deslizarse, baja hasta B, y luego asciende hasta el punto C en que su rapidez se anula.

Calcular la rapidez del cuerpo cuando pasa por B, y la altura H hasta la que asciende cuando se detiene.



Solución:

Siendo la pista fija y lisa, la fuerza que le aplica a  $m$  es siempre perpendicular a cada tramo de la pista ( $\vec{N}$ ), y por lo tanto no ejecuta trabajo a lo largo de toda la trayectoria. El Teorema T-E se escribe entonces, entre A y B :

$$W_{todas} = W_p = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2$$

$$\therefore m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 \implies v_B = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2}$$

Entre B y C :  $W_{todas} = W_p = \frac{1}{2} m \cdot v_C^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 \therefore - m \cdot g \cdot H = - \frac{1}{2} m \cdot v_B^2$

Comparando ecuaciones, se desprende que:

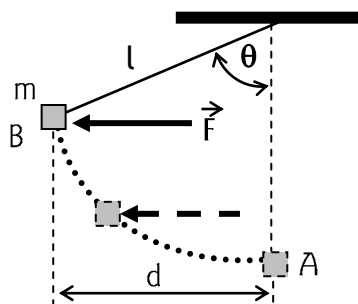
$H = h$

.....

### Ejemplo 53

Un cuerpo de masa  $m$  cuelga de una cuerda de longitud  $l$  enganchada al techo. Se aplica a este cuerpo una fuerza  $\vec{F}$  horizontal, hasta desplazarlo una distancia  $d$  de la vertical. Calcular el trabajo de  $\vec{F}$  para el caso en que el movimiento sea muy, muy lento (cuasi estático).

Solución:

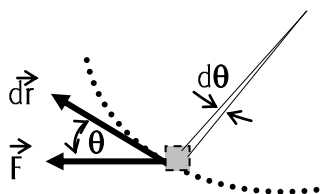
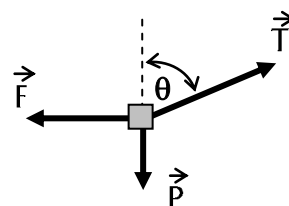


La fuerza  $\vec{F}$  depende de  $\theta$ , y en cada posición logra el equilibrio con la *tensión* y el *peso*:

$$F = T \cdot \text{sen } \theta$$

$$P = T \cdot \text{cos } \theta$$

$$F = P \cdot \text{tg } \theta$$



$$dW_F = F \cdot dr \cdot \text{cos } \theta = P \cdot \text{tg } \theta \cdot dr \cdot \text{cos } \theta = P \cdot dr \cdot \text{sen } \theta$$

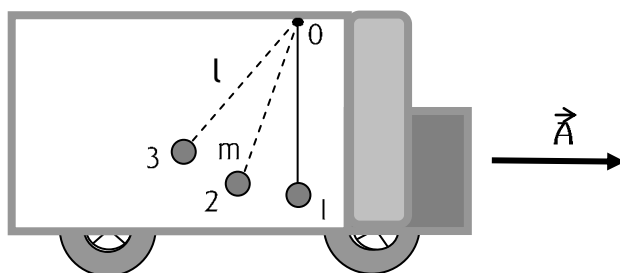
$$W_{F(0 \rightarrow \theta)} = \int_0^\theta P \cdot dr \cdot \text{sen } \theta = \int_0^\theta P \cdot l \cdot d\theta \cdot \text{sen } \theta$$

$$W_{F(0 \rightarrow \theta)} = P \cdot l \cdot [1 - \text{cos } \theta]$$

.....

### Ejemplo 54

Una plomada de masa  $m$  está sujeta en forma vertical en un camión que se mueve horizontalmente con aceleración  $\vec{A}$ , y es súbitamente liberada. Calcular: a) el trabajo realizado por la fuerza que desvía la plomada desde que se libera hasta su primera detención; b) el ángulo de desviación máxima respecto de la vertical.

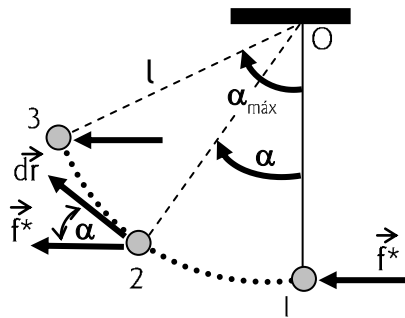


Solución:

Hay dos fuerzas reales sobre  $m$ : su peso, y la debida a la soga. Ninguna de ellas está en condiciones de llevar hacia atrás a la plomada. ¿Qué sucede, entonces, dentro del camión? ...

Mientras está acelerado el camión, un sistema de referencias fijado al mismo es un SNI.

Aparece una fuerza ficticia, de sentido contrario al de la aceleración del SNI, de módulo  $m \cdot A$  :



Esta  $\vec{f}^*$  empuja a  $m$  hacia el punto 2 en el que el péndulo estaría en equilibrio bajo las fuerzas  $\vec{P}$ ,  $\vec{T}$ , y  $\vec{F}$ . Pero la plomada continúa moviéndose hasta que se detiene en 3 y luego retrocede para oscilar alrededor de 2 .

Todo sucede como si dentro del camión hubiese un campo constituido por  $\vec{g} + (-\vec{A})$ , que fija una línea de equilibrio cuya dirección pasa por la articulación "O" y el punto 2 .

a) En cuanto al trabajo de  $\vec{f}^*$ :

$$dW_{f^*} = f^* \cdot dr \cdot \cos \alpha = f^* \cdot l \cdot d\alpha \cdot \cos \alpha = m \cdot A \cdot l \cdot d\alpha \cdot \cos \alpha \quad (\text{ver Ejemplo 53})$$

$$W_{f^*} = \int_{(0 \rightarrow \alpha_{\text{máx}})}^{\alpha_{\text{máx}}} (m \cdot A \cdot l \cdot d\alpha \cdot \cos \alpha) = m \cdot A \cdot l \cdot [\sin \alpha]_0^{\alpha_{\text{máx}}} = m \cdot A \cdot l \cdot \sin \alpha_{\text{máx}}$$

b) Aplicaremos el Teorema T-E :  $W_{\text{todas}} = \Delta E_c$

$$W_{\text{todas}} = W_P + W_{f^*} = -P \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha_{\text{máx}}) + m \cdot A \cdot l \cdot \sin \alpha_{\text{máx}} \quad (1)$$

$$\Delta E_c = E_{c_3} - E_{c_1} = 0 - 0 = 0$$

(2)

Igualando (1) con (2) :  $A/g = (1 - \cos \alpha_{\text{máx}}) / \sin \alpha_{\text{máx}}$

Teniendo en cuenta las siguientes relaciones entre funciones trigonométricas:

$$1 - \cos \alpha_{\text{máx}} = 2 \cdot \text{sen}^2(\alpha_{\text{máx}}/2) \quad \text{y} \quad \text{sen} \alpha_{\text{máx}} = 2 \cdot \text{sen}(\alpha_{\text{máx}}/2) \cdot \text{cos}(\alpha_{\text{máx}}/2)$$

resulta:

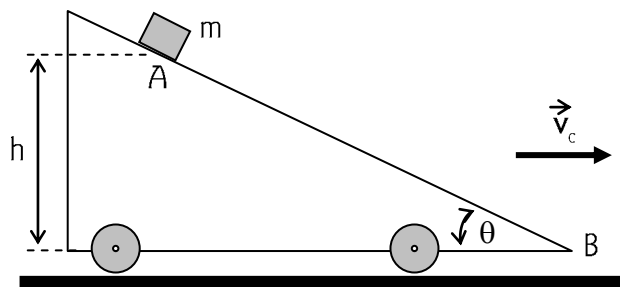
$$\alpha_{\text{máx}} = 2 \cdot \text{arc tg} (A/g)$$

.....

A veces las trayectorias no se "ven", y podemos cometer errores al prejuzgarlas. Veamos qué sucede con una cuña que se desplaza con velocidad constante.

### Ejemplo 55

Sobre el plano inclinado liso de un carro que se mueve con velocidad  $\vec{v}_c$  constante, se coloca una partícula  $m$  que comienza a deslizarse y desciende hasta el piso.





Calcular su velocidad en B (abajo del todo) considerando los siguientes DATOS:

$$m = 2 \text{ kg} ; h = 3.6 \text{ m} ; \theta = 37^\circ ; v_c = 10 \text{ m/s} ; g = 10 \text{ m/s}^2$$

en  $t = 0$ ,  $m$  está en  $A$  con  $v = 0$  respecto del carro

Solución:

Las fuerzas reales que actúan sobre  $m$  son  $\vec{N}$  y  $m\vec{g}$ . No existe ninguna  $\vec{f}^*$  porque el carro no está acelerado.

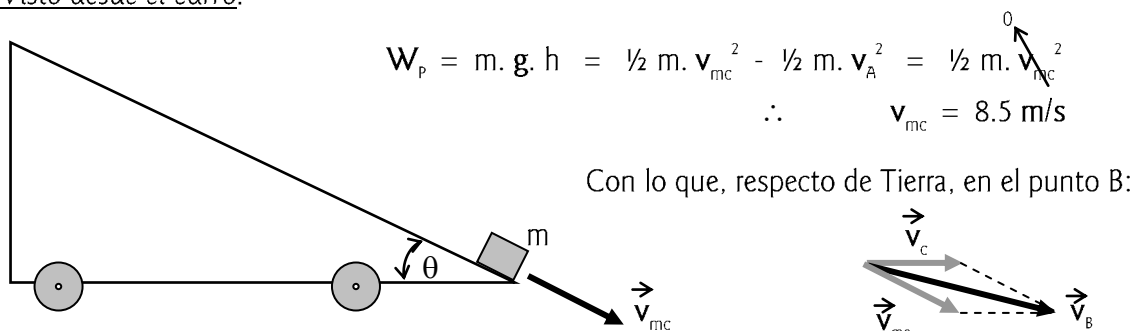
Visto desde Tierra: hay una tentación en decir que la única fuerza que ejecuta trabajo es el peso, ya que la otra es "normal". Si así fuera, el Teorema T-E aplicado al caso se plantearía:

$$W_p = m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2$$

Y, teniendo en cuenta que en  $t = 0$  la velocidad  $\vec{v}_A$  de la partícula es igual a la que tiene el carro,  $\vec{v}_c$ , la resolución de esta ecuación daría:

$$\boxed{v_B = 13.1 \text{ m/s}} \quad \text{"respecto de Tierra".}$$

Visto desde el carro:

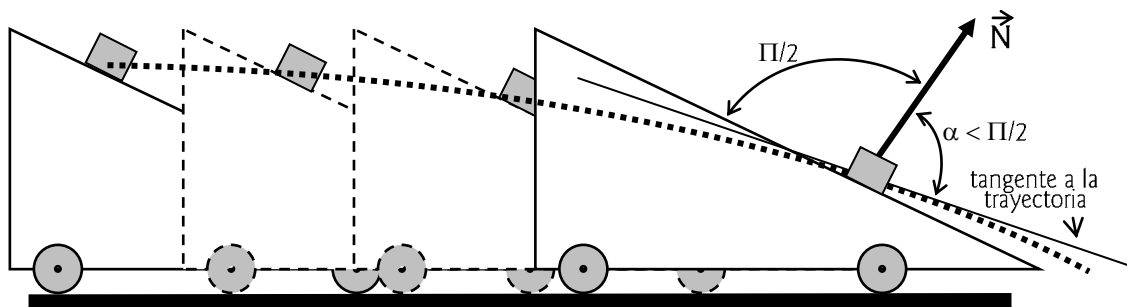


$$v_B^2 = v_{mc}^2 + v_c^2 + 2 \cdot v_{mc} \cdot v_c \cdot \cos \theta \approx (72 + 100 + 136) \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\therefore \boxed{v_B \approx 17.5 \text{ m/s}} \quad \text{respecto de Tierra !}$$

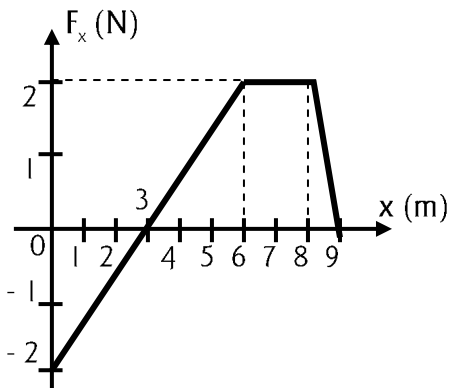
¿A qué se debe la diferencia en los resultados obtenidos de  $v_B$ ? ...

Se debe a que, en el primer caso, se partió de una falsa premisa: que la *normal* no ejecutaba trabajo. La *normal* tiene una dirección que siempre es perpendicular al plano inclinado que la genera. Pero esa normal, como se indica en la figura siguiente, *no* es perpendicular a la trayectoria que la partícula  $m$  describe respecto de Tierra, y por lo tanto genera trabajo.



**Ejemplo 56**

La componente  $F_x$  de una fuerza que actúa sobre una partícula, varía como indica la figura:



Calcular:

- El trabajo realizado por  $F_x$  cuando la partícula se mueve entre  $x = 0$  y  $x = 3$  m .
- El trabajo realizado por  $F_x$  cuando la partícula se mueve entre  $x = 3$  m y  $x = 9$  m .
- El trabajo realizado por  $F_x$  entre las posiciones  $x = 0$  y  $x = 9$  m .

Solución:

- a)  $F_x = f(x)$  para el intervalo  $x = 0$  m a  $x = 6$  m , es:  $F_x = -2 + k \cdot x$  (con  $k = 2/3$ )

$$\text{Entre } x = 0 \text{ m y } x = 3 \text{ m : } \underset{(0 \rightarrow 3)}{W_{F_x}} = \int_0^3 F_x \cdot dx = \int_0^3 (-2 + k \cdot x) \cdot dx = \underline{-3 \text{ J}}$$

$$\text{Entre } x = 3 \text{ m y } x = 6 \text{ m : } \underset{(3 \rightarrow 6)}{W_{F_x}} = \int_3^6 F_x \cdot dx = \int_3^6 (-2 + k \cdot x) \cdot dx = \underline{+3 \text{ J}}$$

- b)  $F_x = f(x)$  para el intervalo  $x = 6$  m a  $x = 8$  m , es:  $F_x = +2$  N

$$\text{Entre } x = 6 \text{ m y } x = 8 \text{ m : } \underset{(6 \rightarrow 8)}{W_{F_x}} = \int_6^8 F_x \cdot dx = \int_6^8 2 \cdot dx = \underline{+4 \text{ J}}$$

- c)  $F_x = f(x)$  para el intervalo  $x = 8$  m a  $x = 9$  m , es:  $F_x = 18 - 2 \cdot x$

$$\text{Entre } x = 8 \text{ m y } x = 9 \text{ m : } \underset{(8 \rightarrow 9)}{W_{F_x}} = \int_8^9 F_x \cdot dx = \int_8^9 (+18 - 2 \cdot x) \cdot dx = \underline{+1 \text{ J}}$$

$$\therefore \text{Entre } x = 0 \text{ m y } x = 9 \text{ m : } \underset{(0 \rightarrow 9)}{W_{F_x}} = -3 \text{ J} + 3 \text{ J} + 4 \text{ J} + 1 \text{ J} = \underline{+5 \text{ J}}$$

Sin necesidad de recurrir a las ecuaciones  $F_x = f(x)$  , se puede calcular el trabajo a partir de las superficies encerradas por la curva respectiva. Así, a simple vista, el trabajo total entre  $x = 0$  y  $x = 9$  m debe ser positivo, por ser mayor la *superficie trapezoidal* (encima del eje  $x$ ) que representa al trabajo positivo, que la *triangular* (debajo del eje  $x$ ) que equivale al trabajo negativo.

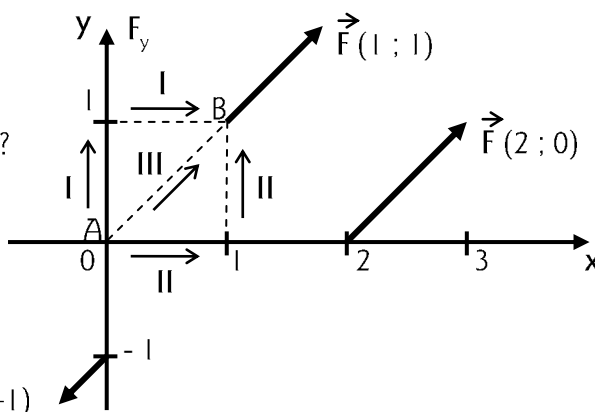
.....

**Ejemplo 57**

Una partícula se mueve en el campo vectorial de la fuerza  $\vec{F}$  cuyas componentes varían punto a punto. a) Calcular el trabajo de esta fuerza cuando la partícula pasa del punto  $A(0; 0)$  al

punto B ( 1 ; 1 ) por distintos caminos, como indica la figura:

- I. ( 0 ; 0 ) → ( 0 ; 1 ) → ( 1 ; 1 ) ;
- II. ( 0 ; 0 ) → ( 1 ; 0 ) → ( 1 ; 1 ) ;
- III. ( 0 ; 0 ) → ( 1 ; 1 ) .



b) ¿Es conservativo este campo de fuerzas?

DATOS:

$$\vec{F} \begin{cases} F_x = 3. x + 2. y \\ F_y = 3. x + 2. y \end{cases}$$

[ F ] = N ; [ x , y ] = m

Solución:

a) 
$$W_F = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int ( F_x \cdot dx + F_y \cdot dy )$$

Camino I: 
$$W_{F_I} = W_F_{(0,0 \rightarrow 0,1)} + W_F_{(0,1 \rightarrow 1,1)}$$

$$\left. \begin{aligned} W_F_{(0,0 \rightarrow 0,1)} &= \int_0^1 2. y. dy = 1 \text{ J} \\ W_F_{(0,1 \rightarrow 1,1)} &= \int_0^1 ( 3. x + 2 ). dx = 7/2 \text{ J} \end{aligned} \right\} W_{F_I} = ( 9/2 ) \text{ J}$$

Camino II: 
$$W_{F_{II}} = W_F_{(0,0 \rightarrow 1,0)} + W_F_{(1,0 \rightarrow 1,1)}$$

$$\left. \begin{aligned} W_F_{(0,0 \rightarrow 1,0)} &= \int_0^1 3. x. dx = 3/2 \text{ J} \\ W_F_{(1,0 \rightarrow 1,1)} &= \int_0^1 ( 3 + 2. y ). dy = 4 \text{ J} \end{aligned} \right\} W_{F_{II}} = ( 11/2 ) \text{ J}$$

Camino III: 
$$W_{F_{III}} = W_F_{(0,0 \rightarrow 1,1)} \quad ( x = y )$$

$$W_F_{(0,0 \rightarrow 1,1)} = \int_0^1 [( 3. x + 2. x ). dx + ( 3. x + 2. x )]. dx \quad W_{F_{III}} = 5 \text{ J}$$

b) No es conservativo. Son distintos los valores de  $W_{F_I}$  ,  $W_{F_{II}}$  y  $W_{F_{III}}$  .

Obsérvese en el gráfico cómo es el campo de fuerzas. ¿Es razonable que en cada uno de los caminos analizados el trabajo sea mayor que cero? ¿Cómo hubiera sido si la partícula pasaba de ( 3 ; 3 ) a ( 1 ; 1 ) , por ejemplo?

.....

Como se viera, las fuerzas *peso* y *elástica* son conservativas: el trabajo que aportan no depende de la trayectoria, y, en los casos en que son las únicas que generan trabajo, en un circuito cerrado la partícula sobre la que actúan conserva la energía cinética, como pudo verificarse en el *Ejemplo 51*.

Apliquemos ahora las condiciones de las derivadas cruzadas expresadas en la *página 116*.

### Ejemplo 58

Verificar con las derivadas parciales si el *peso*, la *fuerza del resorte* y la fuerza del *Ejemplo 57* son conservativas o no.

Solución:

*Peso:*  $\mathbf{P} = (0; P_y) \quad \therefore \quad \delta P_y / \delta x = 0 \quad \delta P_x / \delta y = 0$

$0 = 0$  Por lo tanto la fuerza *peso* es conservativa, como cualquier otra fuerza constante.

*Fuerza elástica (resorte):*  $\mathbf{F}_R = (F_{Rx}; 0) \quad \therefore \quad \delta F_{Ry} / \delta x = 0 \quad \delta F_{Rx} / \delta y = 0$

$0 = 0$  Por lo tanto la *fuerza elástica* (resorte u otro dispositivo) es conservativa, como cualquier otra fuerza unidimensional que depende de la posición.

*Fuerza del Ejemplo 57:*  $\mathbf{F} = (3x + 2y; 3x + 2y) \quad \therefore \quad \delta F_y / \delta x = 3 \quad \delta F_x / \delta y = 2$

$3 \neq 2$  Por lo tanto la *fuerza* del *Ejemplo 57* no es conservativa, como se había comprobado a través del cálculo del trabajo, que no daba lo mismo siguiendo distintos caminos.

.....

### POTENCIA

Al trabajo que es capaz de desarrollar una fuerza en la unidad de tiempo, se lo llama *potencia*, que formalmente se define así:

$$\text{Pot} = dW/dt$$

Es decir, potencia es la rapidez con que se realiza un trabajo. Uno puede aplicar una fuerza  $\vec{F}$  sobre un objeto (que se arrastra a velocidad constante bajo la acción de otras fuerzas también) durante un trecho determinado, con lo que  $\vec{F}$  realiza cierto trabajo, y puede acompañar a ese cuerpo el mismo trecho con la misma fuerza (igual  $\mathbf{W}_F$ ) a una velocidad mayor (menor tiempo empleado; pero en este último caso se requiere mayor potencia).

$$\text{Pot} = dW/dt = (\vec{F} \cdot d\vec{r})/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

La potencia es un valor instantáneo. En cada instante depende de la fuerza, de la velocidad, y del ángulo que estos dos vectores forman entre sí.

### Unidades de medida de Potencia

$[ \text{Pot} ] = [ F ] \cdot [ v ] = [ W ] / [ t ]$		$J / s = W$ (Watt) - Sistema Internacional ergio / s - Sistema c. g. s. kgm / s - Sistema Técnico
--	--	---

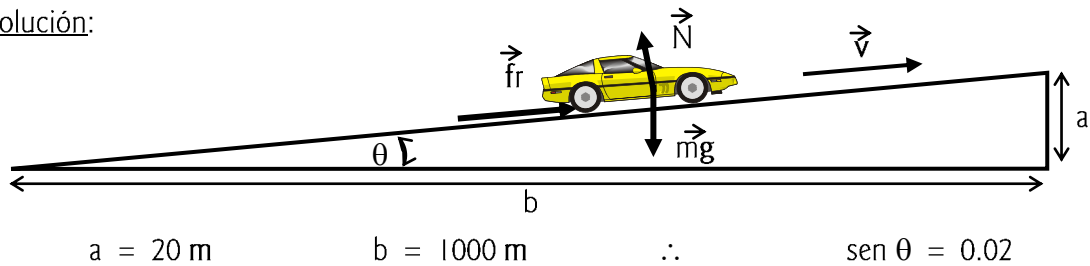
Además, todavía suelen usarse las unidades:

“Caballo Vapor”  $CV \approx 735 \text{ W}$  y “Horse Power”  $HP \approx 746 \text{ W}$

### Ejemplo 59

Un automóvil de  $800 \text{ kg}$  avanza sobre una carretera recta, de pendiente  $20 \text{ m}$  por cada kilómetro, a una velocidad de  $80 \text{ km/h}$ . Despreciando el trabajo de fricción en el motor y en el mecanismo de transmisión del auto, como así también el trabajo de la fuerza de roce con el aire, calcular la potencia que consume el motor en esa situación. (O sea, qué cantidad de energía consume por unidad de tiempo).

Solución:



$\vec{f}_r$  es la fuerza que suministra el piso, como producto de la acción del vehículo sobre el mismo. Si no hubiera roce, fuerza externa, el auto no podría subir (patinaría). Para que el auto marche a  $\vec{v} = \text{cte.}$  - (MRU) - debe cumplirse:

$$\left[ \text{Pot} = \vec{f}_r \cdot \vec{v} = f_r \cdot v \cdot \cos 0 = 156.8 \text{ N} \cdot 80 \text{ km/h} = 156.8 \text{ N} \cdot 22.22 \text{ m/s} = 3484.4 \text{ W} \right]$$

$$f_r = m \cdot g \cdot \text{sen } \theta = 800 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.02 = 156.8 \text{ N}$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{Pot} = 4.67 \text{ HP}}$$

Los artefactos domésticos consumen cierta energía eléctrica por unidad de tiempo, que se expresa en  $\text{W}$ . En el lenguaje popular se dice que a la empresa de electricidad se le pagan “tantos Watts”, lo que es incorrecto. La empresa nos cobra la energía eléctrica consumida en un bimestre, que se obtiene de multiplicar la potencia por el tiempo, y que se expresa en  $\text{kWh}$ .

$$1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \cdot \text{h} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

### Ejemplo 60

Si el costo de  $1 \text{ kWh}$  es de 22 centavos, en todo concepto, ¿cuánto costaría mantener encendidas 5 lámparas de  $60 \text{ W}$ , una estufa de  $200 \text{ W}$  y el motorcito de  $1/8$  de  $\text{HP}$  de una fuente decorativa, durante una noche de  $9 \text{ hs}$ , si la curva  $\text{costos} = f(\text{consumo})$  fuera lineal?

Solución:

$$\text{Energía eléctrica consumida (E)} = \text{Potencia (Pot)} \cdot \text{tiempo (t)}$$

$$\begin{aligned} \text{Pot} &= 5. ( 60 \text{ W} ) + 200 \text{ W} + (1/8) . 746 \text{ W} = \\ &= ( 300 + 200 + 93.25 ) \text{ W} = 593.25 \text{ W} \approx 0.593 \text{ kW} \\ E &= 0.593 \text{ kW} . 9 \text{ hs.} \approx 5.33 \text{ kWh} \end{aligned}$$

$$\text{Costo total} = ( \$ 0.22 / \text{kWh} ) . 5.33 \text{ kWh} = \$ 1.17$$

.....

Un cuerpo suspendido del techo, como un fluorescente, por ejemplo, “potencialmente” está en condiciones de adquirir energía cinética; bastará liberarlo y que comience a caer. Lo mismo podemos decir de otro cuerpo sujeto a un resorte comprimido: la energía acumulada se manifiesta como energía cinética del cuerpo cuando se descomprime el resorte. Un artefacto explosivo, un compuesto químico, nosotros mismos, bien alimentados, ... , son ejemplos de energía acumulada que puede transformarse en cinética.

Esta energía que se acumuló por efecto de transformaciones de otras energías o del trabajo de algunas fuerzas, se llama ...

*ENERGÍA POTENCIAL*

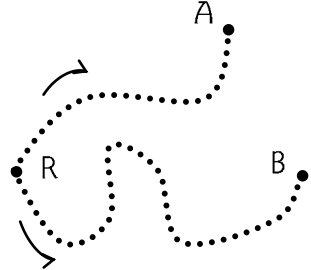
Se define como *Energía Potencial* ( $E_p$ ) de una partícula ubicada en un punto  $A$  del espacio, al trabajo (cambiado de signo) que una/s fuerza/s conservativa/s realiza/n para llevar dicha partícula a ese lugar desde otro punto  $R$  , al cual se asigna arbitrariamente el valor cero de energía potencial:

$$E_{p_R} = 0 \qquad E_{p_A} = - W_{F_{\text{cons}}} (R \rightarrow A)$$

No tiene ningún sentido físico la energía potencial definida de esta manera, dado que, por poder elegir en cualquier lugar el punto en el que  $E_p = 0$  , puede tener infinitos valores en  $A$  .

¿Para qué sirve, entonces? ... Sirve porque, para las fuerzas conservativas, tiene sentido la *variación* de energía potencial ( $\Delta E_p$ ) entre dos puntos:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{aligned} \Delta E_p &= E_{p_B} - E_{p_A} = ( - W_{F_{\text{cons}}} (R \rightarrow B) ) - ( - W_{F_{\text{cons}}} (R \rightarrow A) ) = \\ &= - ( W_{F_{\text{cons}}} (R \rightarrow B) - W_{F_{\text{cons}}} (R \rightarrow A) ) = - ( W_{F_{\text{cons}}} (A \rightarrow R) + W_{F_{\text{cons}}} (R \rightarrow B) ) = \\ &= - W_{F_{\text{cons}}} (A \rightarrow B) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$



Como se ve,  $\Delta E_p$  tiene un valor numérico único, dado que no depende de la referencia sino del trabajo que la fuerza conservativa realiza entre  $A$  y  $B$  , que es perfectamente determinable y no depende del camino recorrido.

¿ Y el signo “-” ? ... Se *impone* el signo “menos” para que algunas situaciones respondan a nuestras percepciones intuitivas. Por ejemplo, si nos referimos al fluorescente mencionado, tiene sentido decir que posee 10 J de energía potencial. No nos cae bien decir

- 10 J ó - 20 J , porque intuitivamente referimos la  $E_p$  al piso, debajo del techo que sujeta la luminaria.

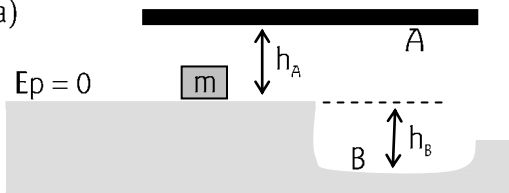
NOTA: Veremos a continuación ejemplos en los que se resuelven problemas teniendo en cuenta los conceptos y las definiciones vistas hasta aquí. Pero al final de este capítulo, antes de “Experiencias sencillas”, haremos consideraciones sobre la “energía” que la vincula a la masa y a la velocidad.

### Ejemplo 61

- a) Tomando  $E_p = 0$  en el piso en que nos hallamos, calcular la energía potencial gravitatoria de un cuerpo  $m$  ubicado sucesivamente en un punto  $A$  del cielorraso, y en otro punto  $B$  del fondo de un pozo.
- b) Calcular la energía potencial elástica de un cuerpo enganchado a un resorte de constante  $k$  : primero estirado y luego comprimido.

Solución:

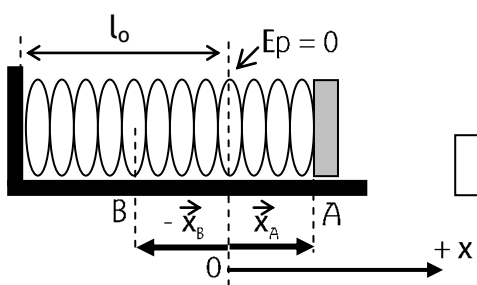
a)



$$E_{p_A} = - W_{P_{(0 \rightarrow A)}} = - [- m \cdot g \cdot h_A] = + m \cdot g \cdot h_A$$

$$E_{p_B} = - W_{P_{(0 \rightarrow B)}} = - [- m \cdot g \cdot h_B] = + m \cdot g \cdot h_B$$

b)



$$E_{p_A} = - W_{F_R_{(0 \rightarrow X_A)}} = - [- \frac{1}{2} k (x_A^2 - 0^2)] = \frac{1}{2} k \cdot x_A^2$$

$$E_{p_B} = - W_{F_R_{(0 \rightarrow X_B)}} = - [- \frac{1}{2} k ((-x_B)^2 - 0^2)] = \frac{1}{2} k \cdot x_B^2$$

Ya sabemos que para que tenga validez la expresión  $F_R = - k \cdot x$  , debe medirse  $x$  a partir de la longitud natural del resorte. Parece ser ese el punto conveniente para considerar a la energía potencial igual a cero. Sin embargo, bien puede tomarse cualquier otro punto para dicha referencia; si se hace esto, la  $E_p$  correspondiente a los puntos como el  $A$  y el  $B$  tendrá otra expresión. [ Sería bueno que intentaras deducirla ] .

Por otra parte, obsérvese cómo es “simétrico” el resorte: la  $E_p$  tiene el mismo valor con el resorte comprimido un  $\Delta x$  que con el resorte estirado el mismo  $\Delta x$  .

.....

Pero todavía podemos preguntarnos cuál es la utilidad de la aparición del concepto “energía potencial”, dado que, al fin y al cabo, nos remite al cálculo del trabajo que ya conocíamos.

Veamos:

El Teorema Trabajo-Energía y la clasificación de fuerzas que hicieramos nos permiten escribir:

$$W_{R_R} = W_{todas} = \underbrace{W_{F_{vinculo}} + W_{F_{disipativas}} + W_{otras}}_{W_{F_{nc}}} + W_{F_{conservativas}} = W_{F_{nc}} + W_{F_{cons.}}$$

Es decir, el trabajo total sobre una partícula puede ser provisto por fuerzas conservativas ( $W_{F_{cons.}}$ ) y por fuerzas no conservativas ( $W_{F_{nc}}$ ).

$$\therefore \quad T-E: \quad W_{F_{cons.}} + W_{F_{nc}} = \Delta E_c$$

Pero si de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula solo ejecutan trabajo las fuerzas conservativas, el Teorema T-E se resume a :

$$W_{F_{cons.}} = \Delta E_c$$

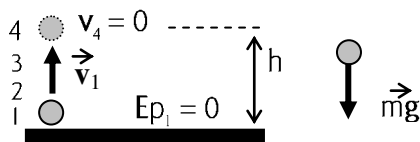
Y como  $\Delta E_p = - W_{F_{cons.}}$ , resulta:  $-\Delta E_p = \Delta E_c \iff 0 = \Delta E_p + \Delta E_c$

Lo que se puede escribir:  $\Delta(E_p + E_c) = 0 \iff E_p + E_c = \text{constante}$

A esta suma de energías se la llama *Energía Mecánica* ( $E_M$ ). De manera que hemos llegado a una nueva *Ley de Conservación* :

“Si solo ejecutan trabajo las fuerzas conservativas, la energía mecánica se conserva”

Es así como, para los siguientes casos, la energía mecánica es constante. Es decir, punto a punto de la trayectoria de la partícula, se cumple:  $E_p + E_c = \text{constante}$ .



Aquí la única fuerza que actúa sobre  $m$  es la del peso, que es conservativa.

$$\therefore E_{M_1} = E_{M_2} = E_{M_3} = E_{M_4}$$

$$E_{M_1} = E_{M_4} \iff E_{c_1} + E_{p_1}^0 = E_{c_4}^0 + E_{p_4} \iff \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = m \cdot g \cdot h$$

Lo mismo vale para un lanzamiento oblicuo, ya que solo actúa la fuerza conservativa peso a lo largo de toda la trayectoria de la partícula lanzada:

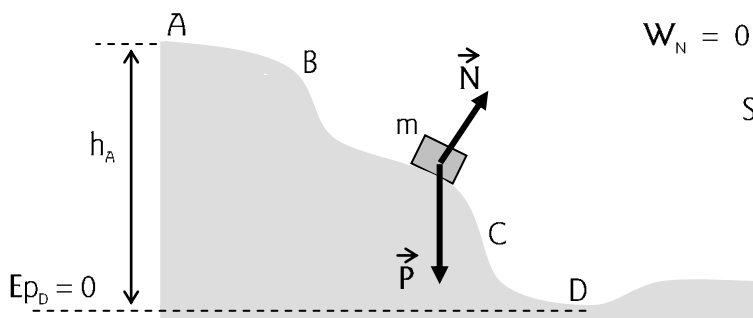


$$\begin{aligned} E_{c_1} + E_{p_1} &= E_{c_2} + E_{p_2} = \\ &= E_{c_3} + E_{p_3} = E_{c_4} + E_{p_4} = \\ &= E_{c_5} + E_{p_5} = \dots \end{aligned}$$

De:  $E_{c_1} + E_{p_1} = E_{c_2} + E_{p_2}$  se deduce que  $|v_1| = |v_5|$ , ya que  $E_{p_1} = E_{p_5}$ .

Pueden aparecer otras fuerzas, no conservativas, sobre una partícula. Pero si no ejecutan trabajo, la energía mecánica igualmente se conserva, como en el siguiente caso:





$$W_N = 0 \quad \therefore \quad E_{M_A} = E_{M_B} = E_{M_C} = E_{M_D}$$

Si  $m$  tiene velocidad 0 en  $A$  :

$$E_{M_A} = E_{p_A} = m \cdot g \cdot h$$

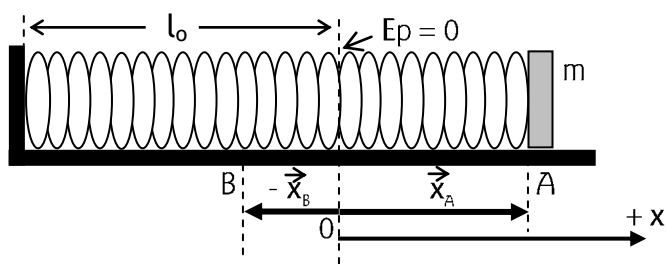
$$E_{M_D} = E_{c_D} = \frac{1}{2} m \cdot v_D^2$$

$$m \cdot g \cdot h_A = \frac{1}{2} m \cdot v_D^2$$

También se conserva la  $E_M$  cuando una partícula se encuentra bajo la acción de un resorte; o bajo la acción simultánea de un resorte y del peso, si el resto de las fuerzas no ejecuta trabajo.

### Ejemplo 62

Sobre una mesa horizontal, lisa, se encuentra un cuerpo de masa  $m$  enganchado a un resorte de constante  $k$ , como indica la figura. “Alguien” toma a  $m$  y estira al resorte hasta  $A$ , y luego libera al sistema que oscila indefinidamente (caso ideal, claro).



Demostrar que  $E_{M_B} = E_{M_A}$ , y que por lo tanto se conserva la energía mecánica en toda la trayectoria de la partícula  $m$ .

(Se imponen: la referencia  $+x$ , y  $E_p = 0$  en  $x = 0$ )

Solución:

$$\text{En } A: \quad E_{M_A} = E_{p_A} + E_{c_A}^0 = E_{p_A} = \frac{1}{2} k \cdot x_A^2$$

$$\text{En } B: \quad E_{M_B} = E_{p_B} + E_{c_B} = \frac{1}{2} k \cdot x_B^2 + \frac{1}{2} m \cdot v_B^2$$

Como se trata de un MAS, según viéramos:

$$v_B^2 = \omega^2 \cdot (x_A^2 - x_B^2) = \omega^2 \cdot x_A^2 - \omega^2 \cdot x_B^2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot x_A^2 - \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot x_B^2 = \frac{1}{2} k \cdot x_A^2 - \frac{1}{2} k \cdot x_B^2$$

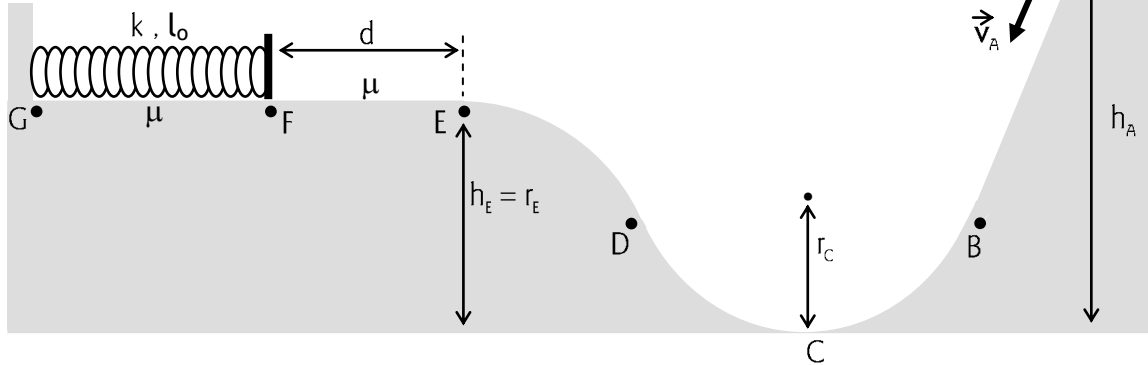
$$\text{Resulta:} \quad \left[ \underline{E_{M_B}} = \frac{1}{2} k \cdot x_B^2 + \frac{1}{2} k \cdot x_A^2 - \frac{1}{2} k \cdot x_B^2 = \frac{1}{2} k \cdot x_A^2 = \underline{E_{M_A}} \right] \quad \text{c.q.d.}$$

.....

### Ejemplo 63

Un vagón de masa  $m$  se desliza sobre rieles lisos, como se indica en la figura, hasta que se encuentra con un piso horizontal rugoso a partir del punto  $E$ . Sigue avanzando, y en  $F$  se topa con un resorte de constante  $k$ .

Si las curvas BCD y DE son tramos de circunferencias de radios como los que se indican, hallar: a) el módulo y el sentido de la fuerza que la pista ejerce sobre el móvil en C y E ; b) el punto sobre la circunferencia rugosa en el que se detiene este cuerpo.

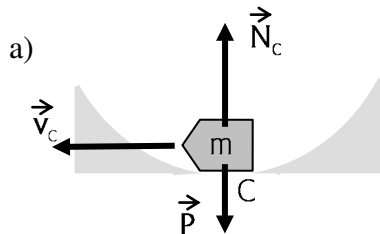


DATOS:  $m = 500 \text{ kg}$  ;  $v_A = 10 \text{ m/s}$  ;  $h_A = 45 \text{ m}$  ;  $r_C = 15 \text{ m}$  ;  $r_E = 20 \text{ m}$   
 $h_E = 20 \text{ m}$  ;  $d = 100 \text{ m}$  ;  $\mu = 0.1$  ;  $k = 2 \text{ N/m}$  ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$

Solución:

A lo largo de todo el recorrido de  $m$ , hasta el punto E, la única fuerza que ejecuta trabajo es el peso. En ese tramo, entonces, se conserva la energía mecánica.

A partir de E la superficie rugosa hace perder energía; la que posee el cuerpo en la máxima compresión del resorte es, pues, la que tenía en el punto E menos la que se pierde por roce dado que la fuerza del resorte es también conservativa.



$$E_{M_A} = E_{M_C}$$

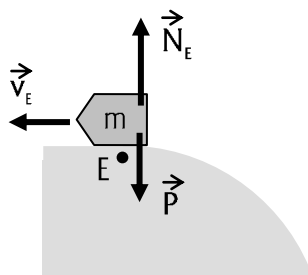
$$m \cdot g \cdot h_A + \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_C^2$$

Reemplazando valores:  $v_C^2 = 1000 \text{ m}^2/\text{s}^2$

$$N_C - P = m \cdot v_C^2 / r_C \implies N_C = m \cdot v_C^2 / r_C + P \implies \boxed{N_C \approx 38\,333 \text{ N}}$$

El sentido de  $N_C$  es el indicado en la figura, ya que su módulo despejado de una ecuación planteada en función de ese sentido supuesto, es de valor positivo.

Veamos ahora qué pasa en el punto E, suponiendo también que el piso empuja hacia arriba.



$$E_{M_A} = E_{M_E}$$

$$m \cdot g \cdot h_A + \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_E^2 + m \cdot g \cdot h_E$$

Reemplazando valores:  $v_E^2 = 600 \text{ m}^2/\text{s}^2$

$$P - N_E = m \cdot v_E^2 / r_E \implies N_E = P - m \cdot v_E^2 / r_E \implies \boxed{N_E = -10\,000 \text{ N}}$$

Aquí también ha sido despejado un módulo: el de  $N_E$ . Pero el resultado es negativo, lo que quiere decir que el sentido supuesto para la fuerza que los rieles ejercen sobre el vagón en el punto E, no es el que verdaderamente tiene; en ese punto, los rieles "tiran" hacia abajo, evitando que el vagón vuele.

b) Parte de la energía cinética que el vagón posee en E se pierde por roce en el camino rugoso. Podría suceder que se pierda toda antes de llegar al resorte; o que todavía el vagón esté en movimiento al tocarlo; o que se frene y el resorte lo devuelva hacia atrás...

La energía que el vagón posee en el punto F es:

$$Ec_f = Ec_E - W_{f_{(E \rightarrow F)}} = \frac{1}{2} m \cdot v_E^2 - \mu \cdot m \cdot g \cdot d = 150\,000 \text{ J} - 50\,000 \text{ J} = 100\,000 \text{ J}$$

Parte de esta energía se pierde por roce con el piso a medida que se va comprimiendo el resorte, a la vez que el resto de la energía se va acumulando en éste. Aplicando el Teorema Trabajo-Energía podemos calcular la longitud de la compresión (x) :

$$W_{\text{todas las fuerzas}} = -\frac{1}{2} k \cdot x^2 - \mu \cdot m \cdot g \cdot x ; \quad \Delta Ec = 0 - Ec_f$$

$$-\frac{1}{2} k \cdot x^2 - \mu \cdot m \cdot g \cdot x = - Ec_f = - 100\,000 \text{ J}$$

$\Downarrow$   
 $x \approx 153 \text{ m}$

Quiere decir que el punto F' en el que se detiene el vagón está a unos 153 m del punto F que señala la ubicación del extremo del resorte cuando tiene su longitud natural. Y allí se queda detenido porque el resorte no tiene capacidad para vencer la fuerza de roce máxima:

$$f_{\text{res}} = k \cdot x = 2 \text{ N/m} \cdot 153 \text{ m} = 306 \text{ N} ; \quad f_{\text{máx}} = \mu \cdot m \cdot g = 500 \text{ N}$$

Dado que la energía potencial tiene un valor arbitrario que depende de dónde está ubicado el punto de  $Ep = 0$ , la energía mecánica también tiene un valor arbitrario. Hasta se puede decir que  $EM$  vale cero a lo largo de todo el camino de una partícula.

### Ejemplo 64

Para el mismo caso del *Ejemplo 62* (véase su figura), demostrar que  $EM_B = EM_A$  tomando como  $Ep = 0$  el punto A (recuérdese:  $v_A = 0$ ).

Solución:

$$\text{En A: } EM_A = \cancel{Ep_A^0} + \cancel{Ec_A^0} = 0$$

$$\text{En B: } EM_B = Ep_B + Ec_B$$

$$Ep_B = -W_{f_{\text{res}}_{(A \rightarrow B)}} = - [ -\frac{1}{2} k \cdot (x_B^2 - x_A^2) ]$$

$$Ec_B = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot x_A^2 - \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot x_B^2 = \frac{1}{2} k \cdot x_A^2 - \frac{1}{2} k \cdot x_B^2$$

$$\text{ya que, tratándose de un MAS: } v_B^2 = \omega^2 \cdot (x_A^2 - x_B^2) = \omega^2 \cdot x_A^2 - \omega^2 \cdot x_B^2$$

$$\therefore E_{M_b} = \frac{1}{2} k \cdot (x_b^2 - x_a^2) + \frac{1}{2} k \cdot x_a^2 - \frac{1}{2} k \cdot x_b^2 = 0$$

y resulta:  $E_{M_b} = E_{M_a}$  , como queríamos demostrar.

Se ve en este ejemplo que  $E_M = 0$  , por haber tomado caprichosamente a  $E_p = 0$  en el punto de máxima amplitud del MAS . Pero esto no significa que no se pueda calcular la energía cinética o la energía potencial en cualquier punto de la trayectoria. Tómalo como un ejercicio, y calcula la velocidad de la partícula en  $x_b \neq x_a$  , por ejemplo, para *este caso* en que en todos lados la energía mecánica vale CERO.

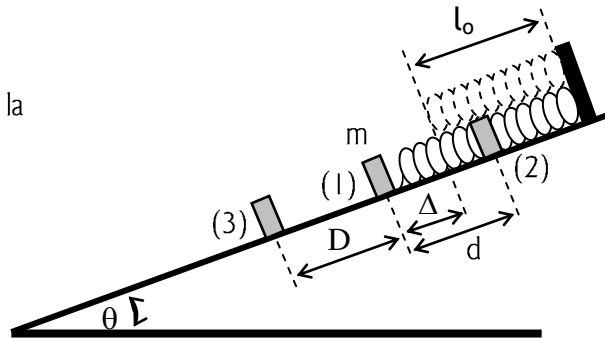
.....

Si realizan trabajo simultáneamente el *peso* y la fuerza de un *resorte*, para evitar confusiones se denomina  $E_{p_c}$  la energía potencial gravitatoria generada por el peso, y  $E_{p_r}$  la energía potencial debida al resorte. En ambos casos se asigna arbitrariamente, en cualquier lugar, el valor CERO correspondiente.

### Ejemplo 65

Sobre un plano inclinado liso, una partícula de masa  $m$  se encuentra en reposo enganchada a un resorte de constante  $k$  , como muestra la figura. Desde ese lugar (1) se lleva a  $m$  , comprimiendo al resorte más allá de su longitud natural  $l_0$  , hasta el punto (2) , y luego se la suelta.

Calcular la distancia  $D$  que corresponde a la posición (3) en que la partícula se detiene, considerando que  $E_{p_c} = E_{p_r} = 0$  en (2) .



Solución:

Dado que también  $E_c = 0$  en (2) , resulta  $E_{M_2} = 0$  . Y, como las únicas fuerzas que ejecutan trabajo son  $\vec{F}_R$  y  $\vec{P}$  , que son conservativas, la energía mecánica es la misma en cualquier punto de la trayectoria de  $m$  . Por lo cual puede escribirse:

$$E_{M_2} = E_{M_1} = E_{M_3} = 0$$

$$E_{M_3} = E_{p_{c3}} + E_{p_{r3}} + E_{c3}^0 = 0 = - m \cdot g \cdot \text{sen } \theta \cdot (D+d) - \left\{ - \frac{1}{2} k \cdot [(D+\Delta)^2 - (d-\Delta)^2] \right\}$$

$$0 = - m \cdot g \cdot \text{sen } \theta \cdot (D+d) + \frac{1}{2} k \cdot [D^2 + \Delta^2 + 2 \cdot D \cdot \Delta - d^2 + 2 \cdot d \cdot \Delta - \Delta^2]$$

Pero como  $m \cdot g \cdot \text{sen } \theta = k \cdot \Delta$  , porque esa es la posición de equilibrio de  $m$  , resulta:

$$\boxed{D = d}$$

lo que era de imaginarse tratándose de un MAS alrededor de (1) , con amplitud  $D$  .

.....

### Ejemplo 66

Calcular nuevamente  $D$  del *Ejemplo 65*, pero esta vez tomando  $E_{p_C} = 0$  en (1) y  $E_{p_R} = 0$  en (3).

Solución:

$$E_{M_2} = E_{p_{G_2}} + E_{p_{R_2}} + E_{C_2}^0 = 0 = m \cdot g \cdot \text{sen } \theta \cdot d - \left\{ -\frac{1}{2} k \cdot [(d-\Delta)^2 - (D+\Delta)^2] \right\}$$

$$E_{M_3} = E_{p_{G_3}} + E_{p_{R_3}} + E_{C_3}^0 = -m \cdot g \cdot \text{sen } \theta \cdot D$$

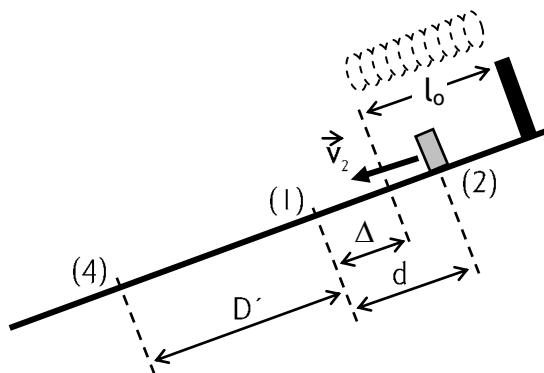
$$E_{M_3} = E_{M_2} - m \cdot g \cdot \text{sen } \theta \cdot D = m \cdot g \cdot \text{sen } \theta \cdot d - \left\{ -\frac{1}{2} k \cdot [(d-\Delta)^2 - (D+\Delta)^2] \right\}$$

Como  $m \cdot g \cdot \text{sen } \theta = k \cdot \Delta$ , según se viera, resulta:  $D = d$

.....

### Ejemplo 67

Si para el mismo plano inclinado y el mismo resorte de los ejemplos anteriores imaginamos ahora que el cuerpo  $m$  pasa por (2) con rapidez  $v_2$  (es decir, se comprimió más el resorte como para que, al liberarlo, suceda esto), ¿a qué distancia  $D'$  estará el punto (4) en el que se detendrá la partícula?



Solución:

Tomando a  $E_{p_{G_4}} = 0$ , y a  $E_{p_{R_1}} = 0$ , resulta:

$$E_{M_2} = E_{p_{G_2}} + E_{p_{R_2}} + E_{C_2} = m \cdot g \cdot \text{sen } \theta \cdot (D' + d) + \frac{1}{2} k \cdot [(d - \Delta)^2 - \Delta^2] + \frac{1}{2} m \cdot v_2^2$$

$$E_{M_4} = E_{p_{G_4}} + E_{p_{R_4}} + E_{C_4}^0 = E_{p_{R_4}} = \frac{1}{2} k \cdot [(D' + \Delta)^2 - \Delta^2]$$

Considerando que  $E_{M_2} = E_{M_4}$  =  $E_{M_1} = E_{M_2} = \dots$  queda:

$$m \cdot g \cdot \text{sen } \theta \cdot (D' + d) + \frac{1}{2} k \cdot [(d - \Delta)^2 - \Delta^2] + \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} k \cdot [(D' + \Delta)^2 - \Delta^2]$$

ecuación de la que surge:  $D'^2 = d^2 + (m/k) \cdot v_2^2$

Esta expresión nos indica que  $D' > D$ , como era de esperarse.

Por otra parte,  $v_2^2 = (k/m) \cdot (D'^2 - d^2)$ , deducida de la anterior, es idéntica a  $v^2 = \omega^2 \cdot (A^2 - x^2)$ , vista en el MAS, ya que  $\omega^2 = k/m$ .

.....

Nos hemos circunscripto a las inmediaciones del planeta en los ejemplos precedentes. La energía potencial gravitatoria era considerada tomando la referencia CERO de energía potencial cerca de la superficie terrestre, de manera que no hubo que tener en cuenta la variación de la aceleración de la gravedad con la distancia, como cuando nos alejamos significativamente de la Tierra. Pero hay una manera de involucrar esta variación, empero, usando las expresiones hasta aquí aplicadas. Veamos qué se obtiene.

Habíamos *definido* la energía potencial en un punto  $A$  como:  $E_{p_A} = -W_{F_{\text{cons.}}}^{(R \rightarrow A)}$  en donde  $R$  es un punto para el cual consideramos arbitrariamente que la energía potencial vale  $0$ .

Tomemos ahora a ese CERO en el infinito y calculemos cuál es la energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa  $m$  a una distancia  $x$  del centro del planeta, pero en un punto por encima de su superficie. A esa distancia la fuerza de atracción gravitatoria vale:

$$F_{g_x} = - G \cdot m_T \cdot m / x^2$$

con  $m_T$  como la masa de la Tierra; el signo “menos” aparece porque  $F_{g_x}$  apunta hacia el centro del planeta, mientras que  $x$  se mide hacia afuera.

$$\therefore E_{p_x} = -W_{F_{\text{cons.}}}^{(\infty \rightarrow x)} = - \left[ \int_{\infty}^x (-G \cdot m_T \cdot m / x^2) dx \right] = - G \cdot m_T \cdot m / x$$

Es correcto el signo “menos” en la expresión de la energía potencial en  $x$ , cuando se toma la referencia  $0$  en el infinito. Porque es positivo el trabajo de la fuerza de atracción gravitatoria, dado que a lo largo del camino esa fuerza “ayuda al movimiento”; y, si es positivo el trabajo, de acuerdo a su definición, la  $E_p$ , debe ser negativa.

En la superficie de la Tierra  $x$  equivale a  $R_T$ , con lo que la energía potencial es:

$$E_{p_s} = - G \cdot m_T \cdot m / R_T$$

Ahora estamos en condiciones de calcular la energía que nos insume despegar definitivamente del poder de atracción de la Tierra a un cuerpo lanzado al espacio, y qué velocidad mínima ha de tener para lograr este objetivo.

### Ejemplo 68

Se desea enviar una nave tripulada más allá de la influencia gravitatoria terrestre. Calcular: a) ¿ qué cantidad de energía insumirá la operación ? ; b) ¿ cuál debe ser la *velocidad de escape*, si el lanzamiento se realiza desde la superficie del planeta ?

Solución:

a) El trabajo que deberá realizarse para enviar la nave al “infinito” (teóricamente el lugar en el que el campo gravitatorio terrestre es CERO) equivale en módulo a la energía potencial sobre la superficie de la Tierra:  $W_{(RT \rightarrow \infty)} = G \cdot m_T \cdot m / R_T$ . Por lo tanto esta es la energía necesaria para alejar definitivamente a la nave de masa  $m$ . Es decir, la energía a invertir por unidad de masa, resulta:

$$E_{p_s} / m = G \cdot m_T / R_T \approx 6.2 \cdot 10^7 \text{ J / kg}$$

b) La velocidad mínima necesaria surge de igualar la energía mecánica total de la nave en el infinito con la que posee en la superficie terrestre:  $E_{M_\infty} = E_{M_s}$ . Como en el infinito la energía potencial es CERO y la energía cinética también, por suponer que la velocidad que se ha ido perdiendo llega a ser nula si la inicial en la Tierra es mínima, la energía mecánica total en el infinito es entonces cero. Por lo que debe ser 0 la energía mecánica total en la superficie.

$$E_{M_s} = 0 = E_{p_s} + E_{c_s} \quad ; \quad 0 = - G \cdot m_T \cdot m / R_T + \frac{1}{2} m \cdot v_{esc.}^2$$

$$\therefore \boxed{v_{esc.} = 11.2 \text{ km / s}}$$

.....

Veamos ahora cuál ha de ser la velocidad mínima para escapar de la influencia del Sol.

### Ejemplo 69

Se desea enviar un objeto más allá de la influencia gravitatoria solar. Calcular: a) ¿cuál debe ser la *velocidad de escape* ( $v'_{esc.}$ ) si el lanzamiento se realiza desde la superficie de la Tierra? b) ¿cuál debería ser la *velocidad de escape* ( $v''_{esc.}$ ) si el lanzamiento se realizara desde el Sol?

Solución:

$$a) \quad 0 = - G \cdot m_s \cdot m / d_{TS} + \frac{1}{2} m \cdot v'_{esc.}{}^2$$

$$\boxed{v'_{esc.} \approx 42.5 \text{ km / s}}$$

$$b) \quad 0 = - G \cdot m_s \cdot m / R_s + \frac{1}{2} m \cdot v''_{esc.}{}^2$$

$$\boxed{v''_{esc.} \approx 617 \text{ km / s}}$$

$d_{TS}$  = distancia Tierra-Sol

$R_s$  = radio del Sol

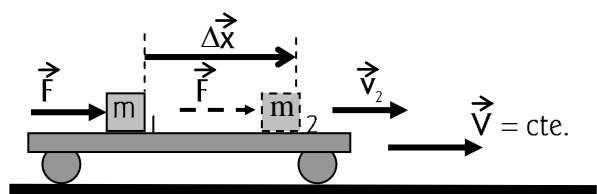
.....

A tener en cuenta: cuando se aplica el Teorema Trabajo-Energía, tanto el Trabajo como la Energía Cinética o la Energía Potencial se deben calcular en el mismo sistema de referencias. Es decir, no es lo mismo observar un suceso desde un carro que marcha a velocidad constante (S.I.), que desde Tierra (considerada también un S.I.), como puede apreciarse en el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 70

Un cuerpo de masa  $m$  yace sobre el piso de un carro que se mueve horizontalmente con velocidad constante. En  $t = 0$  se aplica a  $m$  una fuerza horizontal  $\vec{F}$  que genera al cuerpo un desplazamiento  $\Delta\vec{x}$ , medido sobre el carro, mientras éste se desliza respecto al suelo una distancia  $d$ .

Expresar el Teorema Trabajo-Energía para dos observadores: uno ubicado arriba del carro, y el otro mirando el suceso desde Tierra.



Solución:

Para un Sistema *fijo al carro* :  $F \cdot \Delta x = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$  ( “v minúscula” : respecto del carro)

Para un Sistema *fijo a Tierra* :  $F \cdot (\Delta x + d) = \frac{1}{2} m \cdot (v_2 + V)^2 - \frac{1}{2} m \cdot (v_1 + V)^2$

.....

Los comentarios que siguen son para reafirmar una vez más que lo que vemos en Mecánica Clásica es tan solo una realidad parcial, la más “intuible” de las que se comprobó que constituyen nuestro Universo.

La masa, para nosotros inmutable, ya hemos dicho en *DINÁMICA* ... que no será ni muy grande ni viajará a velocidades considerables frente a la de la luz, por las razones expuestas: estamos estudiando la física correspondiente a la Mecánica Clásica.

Digamos ahora que la *masa es una forma de energía* . Cualquier cuerpo, inclusive alguno de los más pequeños y en reposo, tiene contenida una enorme cantidad de energía que puede calcularse con la expresión  $E = m \cdot c^2$  , en la que *E* es la energía que contiene el cuerpo de masa *m* , y *c* es un factor de conversión equivalente numéricamente a la velocidad de la luz.

En las reacciones químicas se combinan las sustancias para formar nuevas. Se ha medido las masas de los componentes antes y después de la reacción y se comprobó que no coinciden; la diferencia está justamente en la energía involucrada. Y es mucho más notable la diferencia de masas antes y después de una reacción nuclear, dado que es mucho mayor la energía que se libera en estas reacciones. En todos los casos la expresión  $E = m \cdot c^2$  ha sido verificada cuantitativamente.

Inclusive la ecuación de Einstein vale para otras situaciones. Por ejemplo, un ladrillo calentado o un resorte tensionado tienen más masa que cuando están fríos o en estado natural, respectivamente. Pero como la diferencia de masa es tan despreciable, no es fácil medirla, por lo que éstos no resultan buenos ejemplos para verificar la relación entre masa y energía.

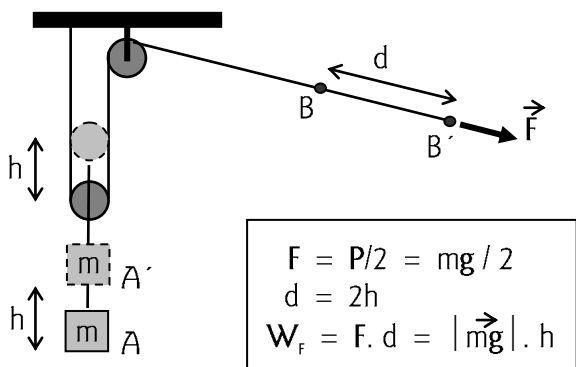


### Experiencias sencillas

\* Puedes observar cómo se desplaza un objeto cualquiera lanzado sobre una mesa horizontal con la que tiene roce: avanza más si se le imprimió una velocidad inicial grande; casi ni avanza si se lo lanza con poca velocidad.

Lo anterior verifica el teorema T-E: la energía cinética inicial es modificada por la única fuerza horizontal que aparece sobre el objeto, que es la fuerza de roce; su módulo, en cualquier caso, mientras el cuerpo se mueve, es constante y vale  $\mu \cdot N$ . Pero necesita “trabajar” más para frenar a un cuerpo que viene con apreciable velocidad, con mayor energía cinética, y por eso el desplazamiento antes de parar es mayor.

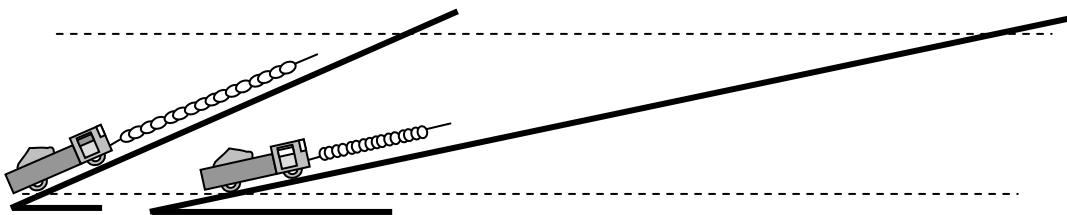
\* También se puede observar cómo no se ahorra trabajo para realizar algunas tareas con el uso de dispositivos que nos reducen “esfuerzos”. Es fácil montar un aparejo con un par de poleas, como el de la figura, y comprobar que se gana comodidad para izar un cuerpo (se necesita la mitad de la fuerza), pero no se gana en “trabajo”. Por el contrario, éste resulta levemente mayor si se tienen en cuenta roces y el peso de la polea móvil.



Se puede comprobar con un resorte (o dinamómetro) que  $F$  equivale a la mitad de  $mg$  cuando se levanta al cuerpo  $m$  con velocidad constante.

Pero el recorrido de la mano que sujeta la soga es el doble.

\* Con un resorte puedes arrastrar por un plano inclinado un objeto hacia arriba. Si lo haces siempre despacito, sin pegar tirones ni intentar acelerar el cuerpo que arrastras, observarás que el resorte se estira más si el plano se inclina más respecto de la horizontal; es decir, estás haciendo más fuerza. Pero si mides esa fuerza precisamente a través del estiramiento del resorte, verás que el trabajo realizado en todos los casos, cualquiera sea la inclinación del plano, es el mismo: a mayor fuerza, menor longitud del recorrido y como consecuencia de ello, el producto “*distancia x fuerza*” se mantiene constante. Piensa si esto es coherente con el teorema “trabajo-energía”.



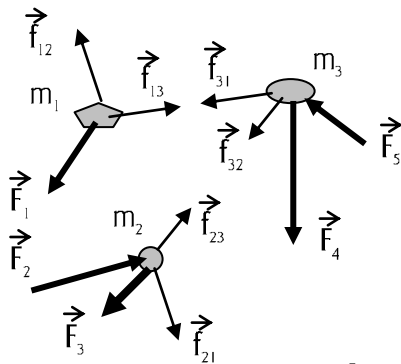
# **SISTEMAS de PARTÍCULAS**



## SISTEMAS de PARTÍCULAS

Hasta ahora hemos visto qué cosas y por qué le suceden a una partícula: cómo se acelera por la acción de fuerzas que actúan sobre ella, cómo varía su energía de movimiento y de posición, cómo es su trayectoria, etc. Pero hay veces en que es conveniente observar a un conjunto de partículas que tienen cosas en común, como por ejemplo dar vueltas en torno a un mismo punto del espacio, acelerar simultáneamente, o chocar entre sí. A ese conjunto lo llamaremos “sistema” y lo analizaremos interactuando con el medio que lo rodea, el que le aporta “fuerzas externas”.

Tomemos a las partículas de masas  $m_1$ ,  $m_2$ , y  $m_3$  como conjunto. Su interacción con el medio que las rodea generó las fuerzas  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5$ , que se observan en la figura, y que son las externas al “sistema”. Las partículas se influyen mutuamente a través de los pares de fuerzas señalados con “ $\vec{f}$ ”, provenientes de atracciones o repulsiones debidas a fenómenos gravitatorios, eléctricos, o sencillamente a dispositivos que las vinculan, tipo resorte, por ejemplo; estas fuerzas son las “internas” del sistema.



Sabemos que  $\sum \vec{F} = d\vec{p}/dt$ . Por lo tanto, para estas partículas, puede escribirse:

$$\vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1 = d\vec{p}_1/dt$$

$$\vec{f}_{23} + \vec{f}_{21} + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = d\vec{p}_2/dt$$

$$\vec{f}_{32} + \vec{f}_{31} + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = d\vec{p}_3/dt$$

Sumando las ecuaciones miembro a miembro se anulan los pares acción-reacción de las fuerzas internas, con lo cual queda:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = d\vec{p}_1/dt + d\vec{p}_2/dt + d\vec{p}_3/dt = d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)/dt = d(\vec{p}_{\text{sis}})/dt$$

$\vec{p}_{\text{sis}}$  es el ímpetu lineal del sistema; es la suma vectorial de los ímpetus lineales de cada partícula. Pero es, como veremos más adelante, una magnitud física más significativa desde el punto de vista del conjunto.

En la ecuación precedente se deduce que cuando no actúan fuerzas externas sobre el sistema, o cuando, actuando, su suma vectorial es cero, el ímpetu lineal del sistema se conserva. Dicho de otra manera, si solo actúan las fuerzas internas del sistema, se mantiene constante el ímpetu lineal del mismo:

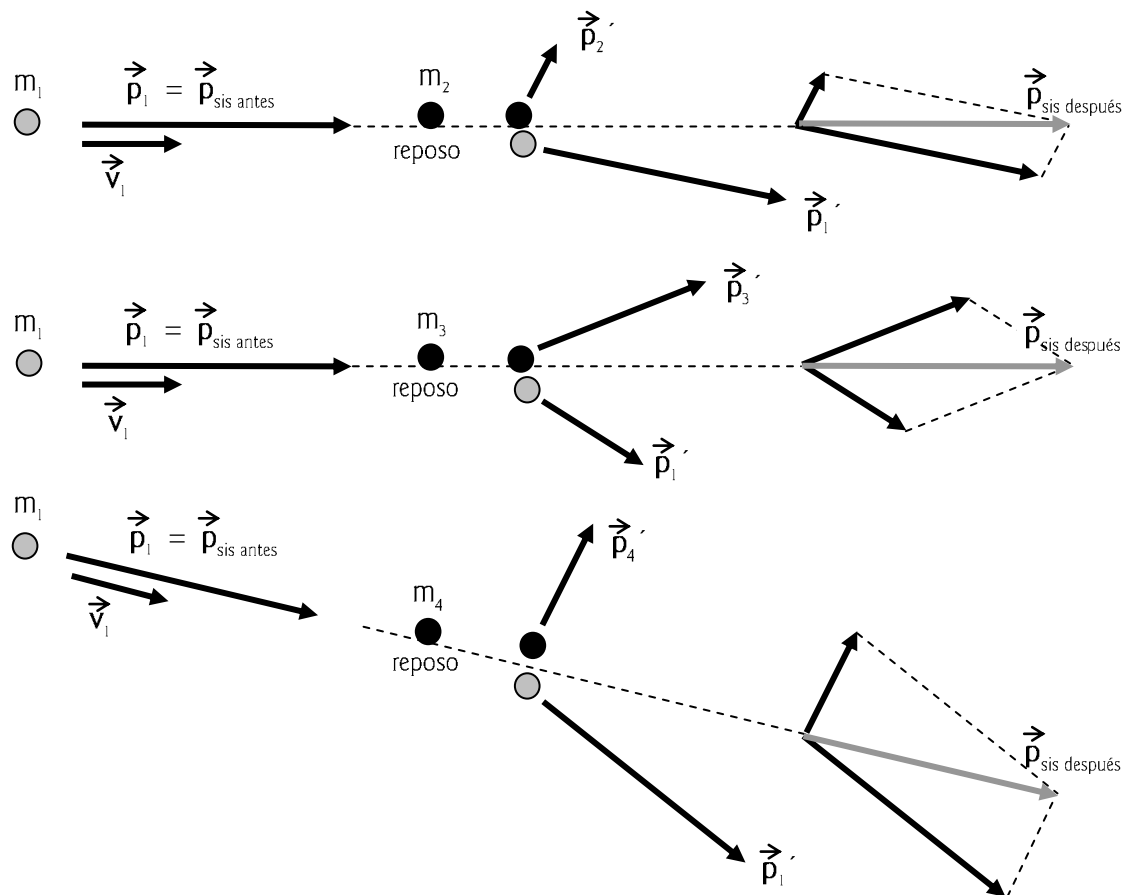
$$\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \iff \vec{p}_{\text{sis}} = \text{cte.}}$$

[ Pero las fuerzas internas, con las correspondientes *fuerzas externas*, pueden modificar el ímpetu de cada una de las partículas en forma individual. ]

Esta *ley de conservación* es utilísima y muy práctica para resolver infinidad de problemas físicos, alguno de los cuales se tratarán en este texto. Es válida para sistemas macroscópicos como para los microscópicos. La masa de las partículas subatómicas, por ejemplo, se obtiene haciendo colisionar la partícula de masa desconocida con una de masa conocida y midiendo sus velocidades antes y después del choque. Parece muy complicado, tratándose de entes tan

pequeños y veloces. Sin embargo se logran las medidas con mucha precisión observando las trazas que dejan las partículas en un detector. En todo caso, con el uso del principio de conservación del ímpetu lineal de un sistema se determinan las masas midiendo velocidades, lo que siempre es más sencillo que medir aceleraciones.

En una cámara de niebla o de burbujas, se aprecia perfectamente el carácter vectorial de  $\vec{p}_{\text{sis}} = \text{cte.}$  Las fotografías de una colisión entre el núcleo de un átomo en movimiento ( $m_1$ ) y el de otro en reposo ( $m_2, m_3, m_4$ , sucesivamente), permiten verificar lo antedicho:



Si un cuerpo está en reposo, su ímpetu lineal es cero. Pero si de pronto estalla y se fracciona en dos partes, la suma vectorial de los ímpetus lineales de cada parte debe ser también cero, si es que durante la explosión no han actuado las fuerzas externas (o si la suma vectorial de éstas es cero). Se escribe:

$$\vec{p}_{\text{sis}} = \text{cte.} \implies \vec{p}_{\text{sis antes}} = \vec{p}_{\text{sis después}} \quad \text{Pero: } \vec{p}_{\text{sis antes}} = 0 \quad \therefore \vec{p}_{\text{sis después}} = 0$$

Por lo tanto, en este ejemplo del cuerpo en reposo fraccionado en dos:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

Si no apareciera otra ecuación, no podrían determinarse las masas. En cambio sí se puede conocer con precisión su cociente, porque son medibles los módulos de las velocidades:  $m_1/m_2 = v_2/v_1$ .

Veamos ahora aquello del significado físico de  $\vec{p}_{\text{sis}}$ . Si una partícula aislada conserva su ímpetu, significa que se mueve con MRU. Lo que invita a pensar que, en el sistema, si se conserva el ímpetu del conjunto, “algo” se mueve con velocidad constante. Haremos unos

desarrollos para ver si lo descubrimos.

$$\vec{p}_{\text{sis}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \Sigma \vec{p}_i = \Sigma (m_i \cdot \vec{v}_i)$$

Si  $M$  es la masa total del sistema ( $M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots = \Sigma m_i$ ), y multiplicamos y dividimos la expresión anterior por  $M$ , resulta:

$$\vec{p}_{\text{sis}} = M \cdot (\Sigma (m_i \cdot \vec{v}_i) / M)$$

El ímpetu lineal del sistema es, entonces, equivalente al de una partícula de masa  $M$ , que se mueve a la velocidad  $\Sigma (m_i \cdot \vec{v}_i) / M$  que llamaremos  $\vec{v}_{\text{CM}}$  (velocidad del "centro de masas" - CM -). Si se conserva el  $\vec{p}_{\text{sis}}$ , porque es nula la influencia de las fuerzas externas sobre sistema, entonces el centro de masas se mueve con MRU :

$$\vec{p}_{\text{sis}} = M \cdot (\Sigma (m_i \cdot \vec{v}_i) / M) = M \cdot \vec{v}_{\text{CM}} \quad \vec{p}_{\text{sis}} = \text{cte.} \implies \vec{v}_{\text{CM}} = \text{cte.}$$

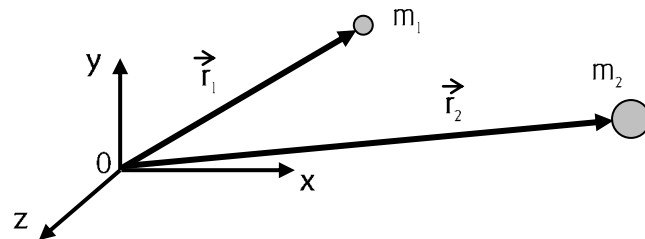
¿Cómo hallar la ubicación del CM ? .....

$$\text{Si } \vec{v}_{\text{CM}} = \Sigma (m_i \cdot \vec{v}_i) / M, \text{ entonces } \vec{v}_{\text{CM}} = \Sigma m_i \cdot (d\vec{r}_i/dt) / M = (d/dt) (\Sigma (m_i \cdot \vec{r}_i) / M)$$

El último paréntesis contiene un término que tiene dimensiones de *posición*. Por lo tanto, viendo que su derivada respecto del tiempo es la  $\vec{v}_{\text{CM}}$ , esta posición es la del centro de masas.

$$\boxed{\vec{r}_{\text{CM}} = \Sigma (m_i \cdot \vec{r}_i) / M} \quad \begin{cases} x_{\text{CM}} = \Sigma (m_i \cdot x_i) / M \\ y_{\text{CM}} = \Sigma (m_i \cdot y_i) / M \\ z_{\text{CM}} = \Sigma (m_i \cdot z_i) / M \end{cases}$$

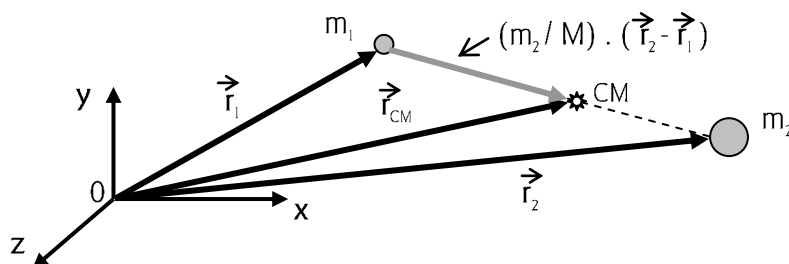
Si tomamos como sistema a dos cuerpos puntuales, demostraremos a continuación que su CM se encuentra en la recta que une a estas partículas.



Se elige el sistema de referencias, como siempre, en forma arbitraria. En este caso se toman las posiciones de las partículas  $m_1$  y  $m_2$  respecto del punto "0". El vector posición del centro de masas,  $\vec{r}_{\text{CM}}$ , deberá estar dado, pues, respecto del mismo punto.

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\text{CM}} &= \Sigma m_i \cdot \vec{r}_i / M = (m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2) / M = (m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_2 \cdot \vec{r}_1 - m_2 \cdot \vec{r}_1) / M = \\ &= [\vec{r}_1 \cdot (m_1 + m_2) + m_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] / M = \vec{r}_1 + (m_2 / M) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \end{aligned}$$

El vector  $\vec{r}_{\text{CM}}$  se obtiene de la suma de los vectores  $\vec{r}_1$  y una fracción de  $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ . Por lo que, como queríamos demostrar, el CM se encuentra en la línea imaginaria que une a  $m_1$  y  $m_2$  :

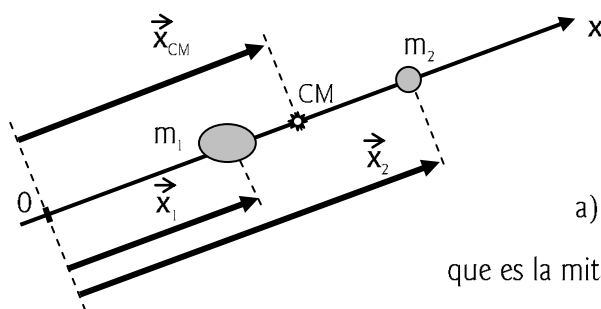


### Ejemplo 71

Hallar el CM de dos partículas de masas puntuales  $m_1$  y  $m_2$ , y analizar dónde estaría el mismo si: a) las partículas tuviesen masas iguales; b) una de ellas tuviera una masa muchísimo mayor que la otra.

Solución:

Por lo visto anteriormente, sabemos que el CM estará en la recta que pasa por esas dos masas. De manera que se hace coincidir un eje de referencias ( $\mathbf{x}$ , por ejemplo) con dicha recta y entonces es suficiente con calcular  $\mathbf{x}_{CM}$ .



$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{CM} &= \Sigma m_i \cdot \mathbf{x}_i / M = \\ &= (m_1 \cdot \mathbf{x}_1 + m_2 \cdot \mathbf{x}_2) / (m_1 + m_2) \end{aligned}$$

a) Si  $\underline{m_1 = m_2}$ :  $\boxed{\mathbf{x}_{CM} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) / 2}$ ,  
que es la mitad de la distancia que separa a  $m_1$  de  $m_2$ .

b) Si  $\underline{m_1 \gg m_2}$ ,  $\boxed{\mathbf{x}_{CM} \approx (m_1 \cdot \mathbf{x}_1 + m_2 \cdot \mathbf{x}_2) / m_1 = \mathbf{x}_1 + (m_2/m_1) \cdot \mathbf{x}_2 \approx \mathbf{x}_1}$

Es decir, el CM se ubica del lado de la partícula de mayor masa.

.....

Antes de seguir calculando posiciones de centros de masas, veamos si los resultados obtenidos responden a nuestro conocimiento intuitivo.

Imaginemos a dos pelotitas de golf, unidas por una varilla delgada, sin masa, apoyadas sobre una mesa con la que casi no tienen roce. Si empujamos a este sistema para que avance girando a lo largo de la mesa, ¿cómo lo hace? ... “Vemos” que giran las pelotitas alrededor del centro geométrico, centro de la varilla, mientras el mismo avanza en línea recta. El centro geométrico es, en este caso, el CM del sistema, el que está ubicado en el lugar calculado en el inciso a) del *Ejemplo 71*. Y avanza en línea recta, con MRU, porque no hay fuerzas externas, horizontales, sobre alguna de las partículas del conjunto.

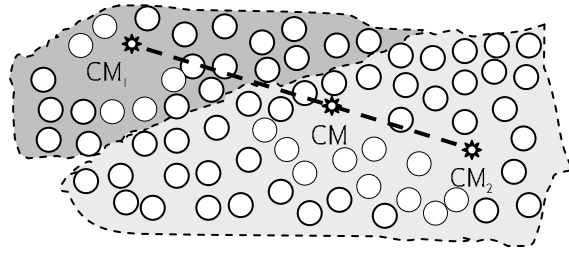
Por otra parte, si a una de las pelotitas de golf la reemplazamos por una de ping-pong y realizamos la misma experiencia, el conjunto avanza girando alrededor de un punto muy próximo a la pelotita de golf, casi coincidiendo con ella, mientras el centro de ese “giro” se mueve con rapidez constante, siguiendo una dirección recta.

Una experiencia más sencilla es la de lanzar un lápiz sobre la mesa sin roce, girando. También aquí se observa que da vueltas alrededor de su centro geométrico, en donde seguramente estará su CM. Pero esto lo demostraremos más adelante.

Continuando con el cálculo de ubicaciones de centros de masas, tomemos el caso genérico de

muchas partículas sueltas integrando un sistema. Imaginemos, como lo indica la figura, que calculamos la ubicación del CM de una parte de ese conjunto ( $CM_1$ ), y luego el centro de masas de la otra parte ( $CM_2$ ).

Demostraremos que el CM del total de las partículas se puede calcular a partir de estos dos, como si se tratara de dos partículas ubicadas en  $CM_1$  y  $CM_2$ .



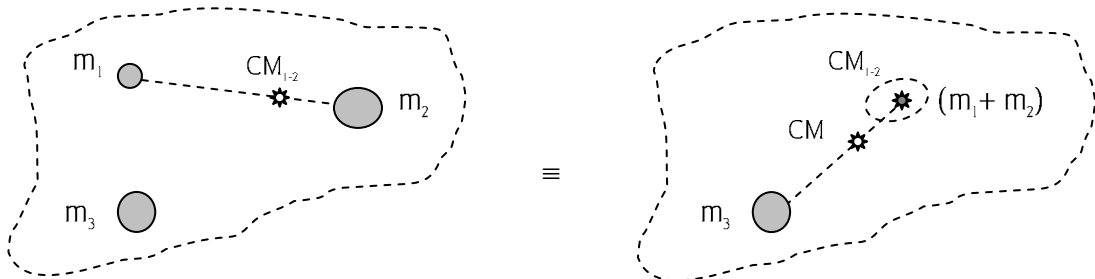
Si  $n$  es el número de partículas para las que calculamos la posición de  $CM_1$ , y  $m$  el número total de partículas del sistema, pueden escribirse las ecuaciones:

$$\vec{r}_{CM_1} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \qquad \vec{r}_{CM_2} = \frac{\sum_{j=n+1}^m m_j \cdot \vec{r}_j}{\sum_{j=n+1}^m m_j}$$

$$\vec{r}_{CM} = \left[ \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \cdot \vec{r}_{CM_1} + \left( \sum_{j=n+1}^m m_j \right) \cdot \vec{r}_{CM_2} \right] / \left[ \sum_{i=1}^n m_i + \sum_{j=n+1}^m m_j \right] \qquad ; \qquad \sum_{i=1}^n m_i + \sum_{j=n+1}^m m_j = \sum_{i=1}^m m_{ij}$$

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \left[ \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \cdot \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right) / \left[ \sum_{i=1}^m m_{ij} \right] + \left[ \left( \sum_{j=n+1}^m m_j \right) \cdot \left( \frac{\sum_{j=n+1}^m m_j \cdot \vec{r}_j}{\sum_{j=n+1}^m m_j} \right) / \left[ \sum_{i=1}^m m_{ij} \right] \right]} = \left[ \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i + \sum_{j=n+1}^m m_j \cdot \vec{r}_j \right] / \left[ \sum_{i=1}^m m_{ij} \right] = \frac{\sum_{i=1}^m m_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}}{\sum_{i=1}^m m_{ij}}}$$

Esto quiere decir que, para el caso de tres partículas, por ejemplo, se puede calcular primero el  $CM_{1-2}$  de dos cualesquiera de ellas, ubicar allí a la partícula equivalente, y luego calcular el CM del conjunto, con la partícula restante:



Se deduce entonces que el CM de un sistema de partículas siempre estará confinado por la línea que une a las partículas periféricas.

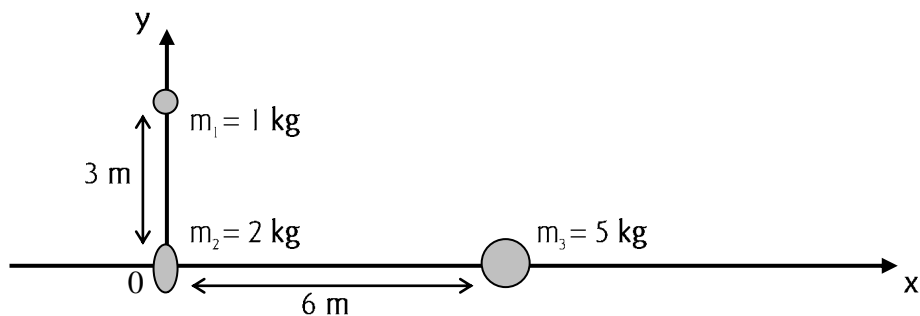
Veamos ahora dos ejemplos de  $\vec{p}_{sis} = cte.$ , por ausencia de fuerzas externas.

**Ejemplo 72**

Hallar el CM de tres partículas de 1 kg, 2 kg, y 5 kg, respectivamente, distanciadas 3 m las de menor masa, y 6 m las de 2 kg y 5 kg, formando entre las líneas que las unen un triángulo rectángulo. Resolver el problema de dos maneras distintas, y verificar que el resultado obtenido es el mismo: a) aplicando las ecuaciones  $y_{CM} = \sum m_i \cdot y_i / M$  y  $x_{CM} = \sum m_i \cdot x_i / M$ ; b) utilizando el criterio de calcular el CM entre dos de ellas y con esto hallar el que corresponde a las tres.



Solución:



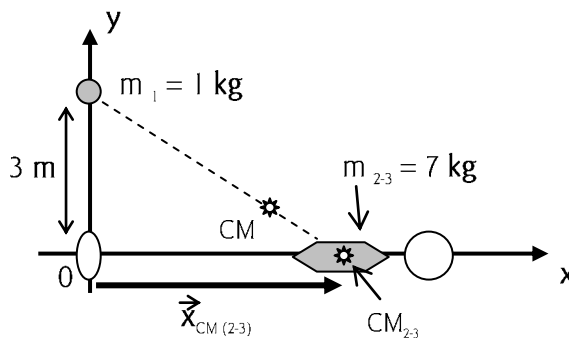
a) 
$$\overline{x_{CM}} = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{M} = \frac{m_3 \cdot 6 \text{ m}}{(m_1 + m_2 + m_3)} = \frac{5 \text{ kg} \cdot 6 \text{ m}}{8 \text{ kg}} = \underline{3.750 \text{ m}}$$

$$\overline{y_{CM}} = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{M} = \frac{m_1 \cdot 3 \text{ m}}{(m_1 + m_2 + m_3)} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m}}{8 \text{ kg}} = \underline{0.375 \text{ m}}$$

b) Hallaremos primero el CM entre  $m_2$  y  $m_3$  :

$$x_{CM(2-3)} = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{M} = \frac{m_3 \cdot 6 \text{ m}}{(m_2 + m_3)} = \frac{5 \text{ kg} \cdot 6 \text{ m}}{7 \text{ kg}} = 4.2857 \text{ m}$$

$$y_{CM(2-3)} = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{M} = 0 \text{ m}$$



$$\overline{x_{CM(1-2-3)}} = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{M} = \frac{m_{2-3} \cdot x_{CM(2-3)}}{(m_1 + m_2 + m_3)} = \frac{7 \text{ kg} \cdot 4.2857 \text{ m}}{8 \text{ kg}} = \underline{3.750 \text{ m}}$$

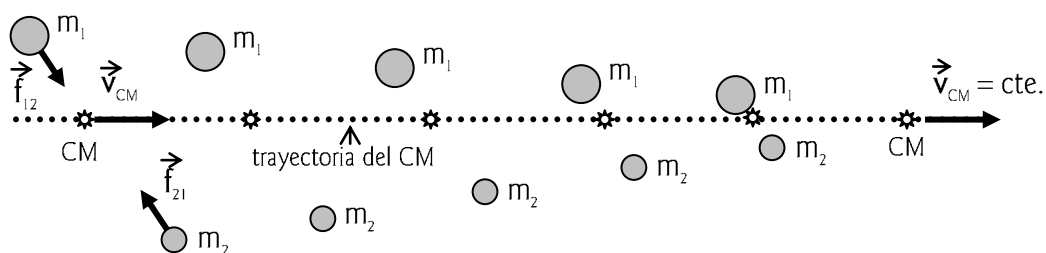
$$\overline{y_{CM(1-2-3)}} = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{M} = \frac{m_1 \cdot 3 \text{ m}}{(m_1 + m_2 + m_3)} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m}}{8 \text{ kg}} = \underline{0.375 \text{ m}}$$

.....

### Ejemplo 73

Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  se atraen mutuamente, mientras avanzan por el espacio libre. En distintas secuencias dibujar sus posiciones relativas al CM entre ambas, y un tramo de la trayectoria de éste.

Solución:



Nada se dice en este enunciado sobre cómo es la fuerza de atracción entre  $m_1$  y  $m_2$ . Podría ser constante, proporcional a la posición, proporcional a la distancia que las separa al cuadrado, ... , por ejemplo. Como las masas son distintas, pero las fuerzas internas son iguales en módulo por ser parte de un par acción-reacción, las aceleraciones de las partículas son distintas en cada caso. La ubicación instantánea no tendría por qué ser la indicada en cada secuencia, para cada partícula. Sin embargo, la ubicación del CM es como se indica, en la recta que las une, y su movimiento no deja de ser rectilíneo uniforme.

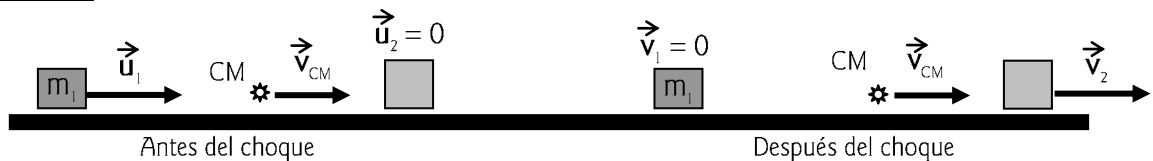
Es más: hasta se podría dar el caso en que un resorte ideal (claro, si es ideal, se podría dar solo a nivel teórico) fuese el enlace entre las partículas. Si estiráramos al resorte con las masas enganchadas en sus extremos, y largáramos al sistema entre las estrellas, las partículas se acercarían y alejarían una de otra indefinidamente, mientras su CM avanzaría con MRU.

.....

**Ejemplo 74**

Un cuerpo de masa  $m_2$  está en reposo, mientras otro de masa  $m_1$  se dirige a él, con velocidad constante  $\vec{u}_1$ , y lo choca. Después del choque,  $m_1$  queda en reposo y  $m_2$  se mueve con la velocidad que traía  $m_1$  (este tema se desarrollará mejor más adelante). Si la experiencia se realiza sobre una mesa sin roce, calcular la velocidad del CM antes y después del choque.

Solución:



$$\vec{v}_{CM} = \Sigma m_i \cdot \vec{v}_i / M$$

Antes del choque:  $\vec{v}_{CMi} = m_1 \cdot \vec{u}_1 / (m_1 + m_2)$

Luego del choque:  $\vec{v}_{CMf} = m_2 \cdot \vec{v}_2 / (m_1 + m_2)$

Ahora, como veremos más adelante, para que se de la situación planteada en el enunciado el choque debe ser elástico y las masas iguales. Por lo que, si  $\vec{v}_2 = \vec{u}_1$  y  $m_1 = m_2$ , resulta:

$$\vec{v}_{CMi} = \vec{v}_{CMf} = \text{cte.}$$

.....

Pero, ¿qué sucede cuando sí tienen influencia las fuerzas externas sobre el sistema?

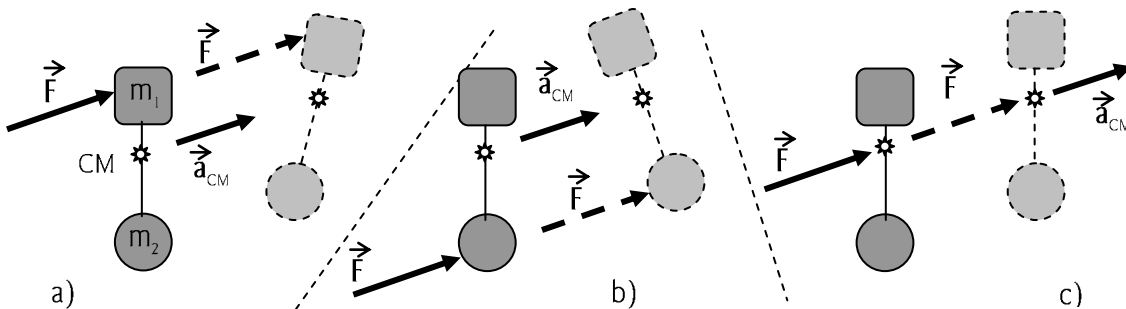
Recordemos que  $\Sigma \vec{F}_{ext} = d(\vec{p}_{sis})/dt$ . De manera que, ahora que sabemos que  $\vec{p}_{sis} = M \cdot \vec{v}_{CM}$ , y cuál es el significado del CM, podemos escribir:

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = d(\vec{p}_{sis})/dt = d(M \cdot \vec{v}_{CM})/dt = M \cdot \vec{a}_{CM}$$

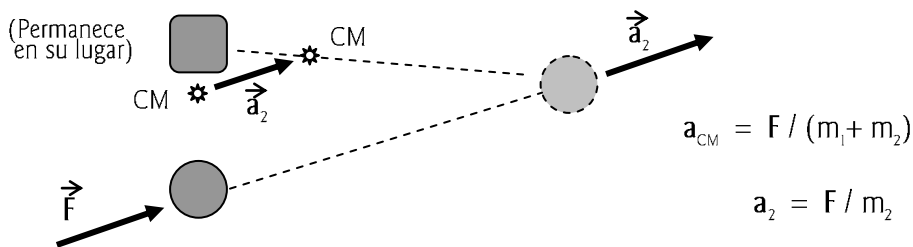
¡ Bajo la influencia de fuerzas externas, el CM se acelera !

¡ Si las fuerzas externas se mantienen constantes mientras actúan, el CM se acelera con aceleración constante, por lo cual desarrolla un movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV) !

Para ilustrar esto, imaginemos a un par de masas puntuales unidas por una barra sin masa, sobre las que actúa una fuerza  $\vec{F}$  aplicada sucesivamente en distintos puntos de ese sistema. Por último, quitemos la barra de unión y veamos qué pasa con  $\vec{F}$  aplicada sobre una de las masas.



Se observa en a), b), y c) cómo la aceleración del sistema (es decir, la aceleración del centro de masas), bajo la acción de la misma fuerza  $\vec{F}$  aplicada en distintos puntos, tiene la misma dirección, el mismo sentido, y, naturalmente, la misma intensidad:  $a_{CM} = F / (m_1 + m_2)$ . Para un mismo intervalo de tiempo  $\Delta t$  el desplazamiento del CM es el mismo, mientras que los de las partículas varían, según el caso. Y, de no existir la barra de unión, sucedería lo mismo:



A nivel personal, vivimos las consecuencias de nuestra interacción con el medio y la influencia de las fuerzas externas acelerando nuestro CM, diariamente, sin darnos cuenta.

Cada ser humano puede considerarse como un sistema de partículas, en el que el CM se encuentra aproximadamente a la altura del ombligo. Si saltamos es porque la fuerza externa "piso" ejerce su influencia para que podamos elevar (acelerar hacia arriba) nuestro CM; pero ni bien nos despegamos del piso, la fuerza externa "peso" nos hace caer. Es el peso la causa por la que los acróbatas o los que realizan saltos ornamentales solo puedan realizar movimientos en torno de su "ombligo", mientras éste, su CM, describe una parábola como la que describiría cualquier partícula sometida a la acción de la gravedad.

Un plato que se lanza al aire girando, sigue una trayectoria parabólica. Sí, pero, ¿qué cosa del plato?... Gira, por lo tanto cada particulita que lo compone tiene una trayectoria "enrulado" respecto del piso. Cada particulita, menos el punto por donde pasa el eje alrededor del cual gira el plato, y que es el CM del mismo. A este CM le pasa lo que al del señor del párrafo anterior: se acelera con  $\vec{g}$  y describe una parábola bajo la acción de la única fuerza externa, que es la del peso del plato.

**Ejemplo 75**

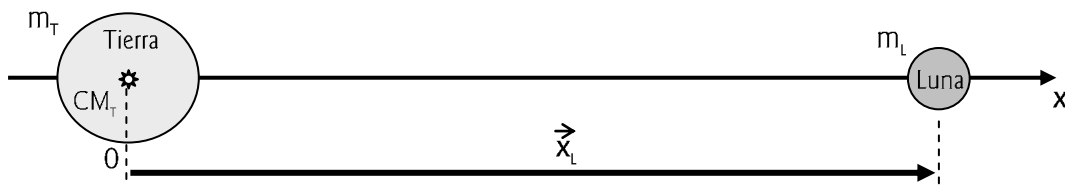
Calcular la posición del centro de masas del sistema Tierra-Luna considerando los siguientes DATOS:

$$m_T \text{ (masa de la Tierra)} = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad ; \quad m_L \text{ (masa de la Luna)} = 7.36 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

$$d_{TL} \text{ (distancia entre los centros de masas de la Tierra y de la Luna)} = 3.84 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Solución:

Dibujaremos fuera de escala, naturalmente, los cuerpos Tierra y Luna para fijar el CERO de referencias en el centro de masas de la Tierra y observar gráficamente dónde se sitúa el  $CM_{TL}$  que estamos buscando:

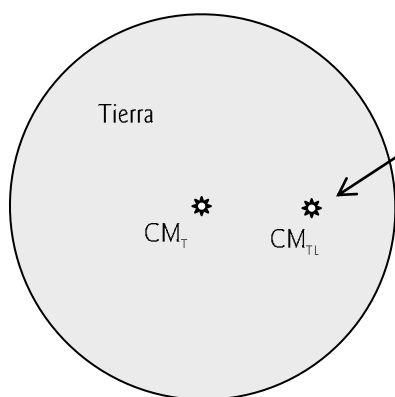


$$x_{CM} = \sum m_i \cdot x_i / M = (m_L \cdot x_L + m_T \cdot 0) / (m_L + m_T)$$

$$x_{CM} = 7.36 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 3.84 \cdot 10^8 \text{ m} / 7.36 \cdot 10^{22} \text{ kg} + 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \approx 4668 \text{ km}$$

Quiere decir que, desde el centro de la Tierra, el centro de masas T-L se encuentra a menos del radio de la Tierra. ¡ El  $CM_{TL}$  se encuentra en el interior de nuestro planeta !

En otra escala:



Es éste el punto que sigue una trayectoria elíptica alrededor del Sol, puesto que la fuerza gravitatoria de esta estrella actúa sobre el sistema Tierra-Luna pasando su dirección por el centro de masas del mismo. Mientras esto sucede, la Tierra y su satélite natural giran unas doce veces por año alrededor del centro de masas que establecen; tantas veces como vemos girar la Luna alrededor del planeta, con un periodo de aproximadamente 29 días.

Las aguas de la Tierra son afectadas por la presencia de la Luna, la que produce las mareas conocidas, dos veces por día. En el tema Sistemas No Inerciales al final del capítulo de CUERPO RÍGIDO se explican las causas que originan este fenómeno.

.....

Calcularemos ahora la ubicación del centro de masas en cuerpos rígidos de distintos tamaños y formas. Supondremos a estos cuerpos compuestos por partículas de dimensiones muy pequeñas,  $dm$ , por lo cual la “sumatoria” de esas particulitas se expresará a través de una

integral:

$$\vec{r}_{CM} = \int dm \cdot \vec{r} / \int dm$$

$$x_{CM} = \int dm \cdot x / \int dm \quad y_{CM} = \int dm \cdot y / \int dm \quad z_{CM} = \int dm \cdot z / \int dm$$

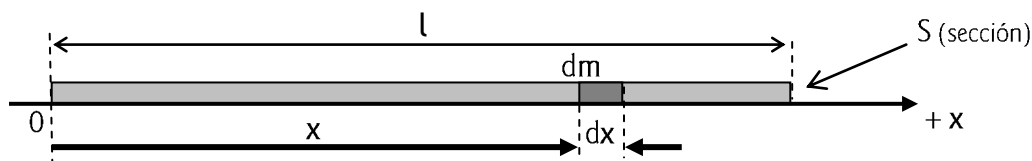
A  $dm$  la definiremos como la mínima cantidad homogénea de masa del cuerpo rígido. Vale escribir, entonces:  $dm = \delta \cdot d(\text{vol.})$ , en la que  $\delta$  es la densidad de la materia que compone a dicho cuerpo y  $d(\text{vol.})$  es su pequeño volumen - "diferencial de volumen" -. Es obvio que esta densidad tiene sentido físico hasta los niveles moleculares. Por debajo de ellos no tiene sentido definirla, a pesar de que los cálculos integrales suponen una  $dm$  infinitesimal.

### Ejemplo 76

Calcular la ubicación del CM de una varilla delgada y homogénea, considerando los siguientes DATOS: longitud  $l$ , densidad  $\delta$ , masa  $m$ , sección  $S$ .

Solución:

Es el caso de un lápiz nuevo, sin afilar, por ejemplo. Sabemos intuitivamente que el CM está en su centro geométrico. Pero lo demostraremos, para lo cual tomaremos su delgadez para suponerlo unidimensional y poder usar solo la expresión correspondiente a  $x_{CM}$ .



Hallar el CM implica realizar sumatorias de los productos  $dm \cdot x$  a lo largo de toda la longitud  $l$  de la varilla, y el resultado dividirlo por la masa total de la misma, considerada como una sumatoria (integral) de las "masitas"  $dm$ :

$$x_{CM} = \int_0^l dm \cdot x / \int_0^l dm$$

$$dm = \delta \cdot d(\text{vol.}) \quad ; \quad d(\text{vol.}) = S \cdot dx \quad \therefore \quad dm = \delta \cdot S \cdot dx$$

$$x_{CM} = \int_0^l dm \cdot x / \int_0^l dm = \int_0^l \delta \cdot S \cdot x \cdot dx / \int_0^l \delta \cdot S \cdot dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right] / \left[ x \right]_0^l = l/2$$

El resultado obtenido es el esperado: el CM coincide con el centro geométrico, lo que justifica el comportamiento del lápiz cuando lo lanzamos al aire girando.

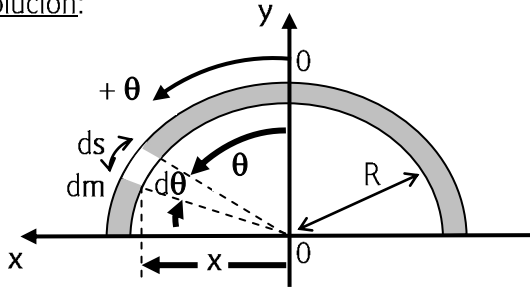
.....

Ahora, si la varilla delgada no tiene una densidad constante, sino, por ejemplo, variable de un extremo a otro siguiendo la ley:  $\delta = \delta_0 \cdot (1 + x/l)$ , se plantea la ecuación de  $x_{CM}$  como en el *Ejemplo 76* y se integra teniendo en cuenta la dependencia de  $\delta$  con la posición. Para este caso el resultado es:  $x_{CM} = 5/9 l$ . (¡Verificalo!).

**Ejemplo 77**

Calcular el CM de una varilla delgada semicircular, de densidad  $\delta$ , sección  $S$ , y longitud igual a la mitad de una circunferencia de radio  $R$ .

Solución:



Este es un caso en que hay que calcular  $y_{CM}$  y  $x_{CM}$ , por tratarse de una figura en el plano. Si bien se puede anticipar que, para los ejes elegidos, seguro que  $x_{CM} = 0$ .

$$\begin{aligned} \overline{x_{CM}} &= \int dm \cdot x / \int dm = \int \delta \cdot d(\text{vol.}) \cdot x / \int \delta \cdot d(\text{vol.}) = \int \delta \cdot ds \cdot S \cdot x / \int \delta \cdot ds \cdot S = \\ &= \int ds \cdot x / \int ds = \int R \cdot d\theta \cdot x / \int R \cdot d\theta = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} R \cdot d\theta \cdot R \cdot \sin \theta / \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} R \cdot d\theta = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{y_{CM}} &= \int dm \cdot y / \int dm = \int \delta \cdot d(\text{vol.}) \cdot y / \int \delta \cdot d(\text{vol.}) = \int \delta \cdot ds \cdot S \cdot y / \int \delta \cdot ds \cdot S = \\ &= \int ds \cdot y / \int ds = \int R \cdot d\theta \cdot y / \int R \cdot d\theta = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} R \cdot d\theta \cdot R \cdot \cos \theta / \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} R \cdot d\theta = \boxed{R \cdot 2/\pi} \end{aligned}$$

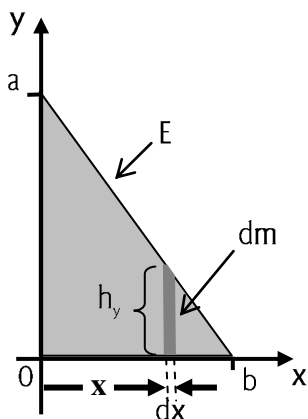
.....

**Ejemplo 78**

Hallar el CM de una chapa homogénea con forma de triángulo rectángulo de catetos  $a$  y  $b$ , densidad  $\delta$ , y espesor  $E$ .

Solución:

Tratándose de una figura plana, desde ya que habrá que calcular las coordenadas del CM en  $x$  y en  $y$ . Para ello hay que definir la “masita”  $dm$  y vincularla con las dimensiones  $a$  y  $b$  del triángulo:

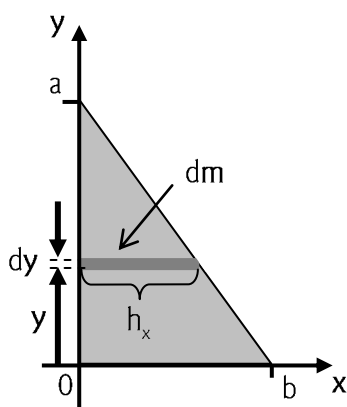


$$\begin{aligned} x_{CM} &= \int dm \cdot x / \int dm = \int \delta \cdot d(\text{vol.}) \cdot x / \int \delta \cdot d(\text{vol.}) = \\ &= \int \delta \cdot h_y \cdot dx \cdot E \cdot x / \int \delta \cdot h_y \cdot dx \cdot E = \end{aligned}$$

Por semejanza de triángulos:  $h_y / a = (b - x) / b$

$$h_y = a \cdot (b - x) / b$$

$$\overline{x_{CM}} = \int_0^b [a \cdot (b - x) / b] \cdot dx \cdot x / \int_0^b [a \cdot (b - x) / b] \cdot dx = \boxed{b/3}$$



$$y_{CM} = \int dm \cdot y / \int dm = \int \delta \cdot d(\text{vol.}) \cdot y / \int \delta \cdot d(\text{vol.}) =$$

$$= \int \delta \cdot h_x \cdot dy \cdot E \cdot y / \int \delta \cdot h_x \cdot dy \cdot E$$

Por semejanza de triángulos:  $h_x / b = (a - y) / a$

$$h_x = b \cdot (a - y) / a$$

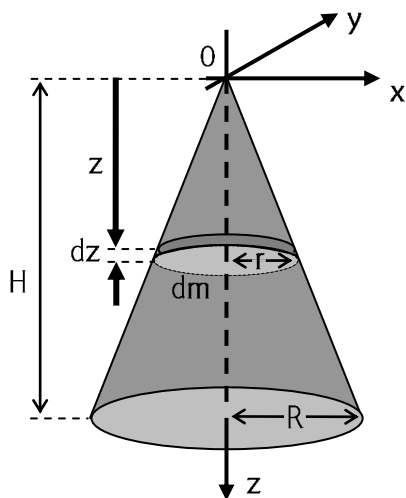
$$y_{CM} = \int_0^a [b \cdot (b - y) / a] \cdot dy \cdot y / \int_0^a [b \cdot (a - y) / a] \cdot dy = \boxed{a/3}$$

### Ejemplo 79

Hallar el CM de un *cono macizo* de masa  $m$ , altura  $H$ , y base circular de radio  $R$ .

Solución:

Si la base es perpendicular al eje de simetría del cono, está claro que el CM se encontrará sobre la línea de este eje, por lo que, si elegimos a un sistema de coordenadas  $x, y, z$ , como el que se indica en la figura, solo quedará por calcular  $z_{CM}$ .



$$z_{CM} = \int_0^H dm \cdot z / \int_0^H dm$$

$$dm = \delta \cdot d(\text{vol.}) = \delta \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dz$$

Por semejanza de triángulos:  $r = (R/H) \cdot z$

$$\int_0^H dm = m = \delta \cdot \text{vol.} = \delta \cdot \pi \cdot R \cdot H/3$$

$$z_{CM} = \int_0^H dm \cdot z / \int_0^H dm =$$

$$= \int_0^H \delta \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dz \cdot z / \delta \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H/3 = \boxed{3/4 H}$$

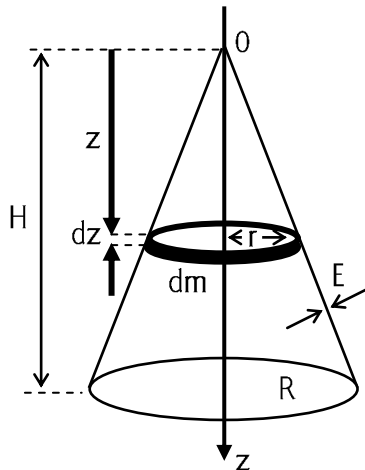
[ Obsérvese que el CM del cono macizo se encuentra a  $1/4 H$  de la base ]

### Ejemplo 80

Hallar el CM de un *cono hueco, abierto* ("cucurucho"), de masa  $m$ , altura  $H$ , espesor  $E$ , y radio mayor  $R$ .

Solución:

$$z_{CM} = \int_0^H dm \cdot z / \int_0^H dm$$



$$dm = \delta \cdot d(\text{vol.}) = \delta \cdot 2\pi \cdot r \cdot E \cdot dz$$

Como en el ejemplo anterior:  $r = (R/H) \cdot z$

$$\therefore \boxed{z_{CM} = 2/3 H}$$

¡ Obsérvese que el CM del cono hueco se encuentra a  $1/3 H$  de la base !

IMPULSO Y VARIACIÓN DE ÍMPETU LINEAL

Veamos ahora cómo es conveniente transformar la ley de Newton para resolver algunos problemas en los que aparece la necesidad de conocer el cambio cuantitativo del ímpetu lineal de una partícula o de un sistema de partículas, bajo fuerzas cuya variación con el tiempo no siempre es conocida.

Tomemos una partícula de masa  $m$  sobre la que actúa un conjunto de fuerzas.

La ecuación  $\sum \vec{F} = \vec{R} = d\vec{p}/dt$  puede transformarse en:  $\vec{R} \cdot dt = d\vec{p}$ .

Si en el instante  $t_1$  la partícula tiene un ímpetu lineal  $\vec{p}_1$ , y llamamos  $\vec{p}_2$  al que adquiere en  $t_2$ , la anterior puede escribirse:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{R} \cdot dt = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p}$$

El último miembro es la variación del ímpetu lineal,  $\Delta\vec{p}$ , producida en el intervalo  $t_2 - t_1$ . El primero es la causa de esa variación, y se lo llama *impulso resultante*,  $\vec{J}_R$ , de la/s fuerza/s actuante/s sobre la partícula.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{R} \cdot dt = \vec{J}_R = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$$

Sintéticamente:  $\boxed{\vec{J}_R = \Delta\vec{p}}$   $[J] = [F] \cdot [t] = N \cdot s$

Quiere decir que, como  $\vec{R}$  es la resultante o sumatoria de todas las fuerzas,  $\vec{J}_R$  es el impulso de la resultante o el *impulso resultante* o suma de todos los impulsos:

$$\vec{J}_R = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \vec{J}_3 \dots = \sum \vec{J}_i$$

Esta es otra manera de expresar la ley de conservación del ímpetu lineal de la *partícula*:  $\vec{p}$  se conserva si no existe sobre la misma un impulso neto de fuerzas (pueden existir impulsos, pero su suma vectorial debe ser cero para que  $\vec{p}$  se conserve).

La ecuación vectorial  $\vec{J}_R = \Delta\vec{p}$  implica las respectivas igualdades de componentes:

$$J_x = \Delta p_x \qquad J_y = \Delta p_y \qquad J_z = \Delta p_z$$



### Ejemplo 81

Entre los instantes  $t_0 = 0$  y  $t_1 = 1$  s se aplica una fuerza  $\vec{F}$  a una partícula  $m$ , de 1 kg de masa, que en  $t_0 = 0$  pasaba por el origen de un sistema de coordenadas con una velocidad  $\vec{v}_0$ . Para los datos que se dan a continuación, calcular la velocidad de la partícula para el instante  $t = 1$  s.

$$\vec{F} \equiv (F_x = 3 \text{ N} ; F_y = 1.5 t \text{ N}) \qquad \vec{v}_0 \equiv (v_{0x} = 10 \text{ m/s} ; v_{0y} = 0)$$

Solución:

Durante 1 s la fuerza  $\vec{F}$  aplicó a  $m$  un impulso que modificó el ímpetu lineal de la partícula:

$$J_{Fx} = \Delta p_x \quad ; \quad J_{Fy} = \Delta p_y$$

$$J_{Fx} = \int_0^t F_x \cdot dt = \int_0^t 3 \cdot dt = 3.00 \text{ Ns} \qquad J_{Fy} = \int_0^t F_y \cdot dt = \int_0^t 1.5 t \cdot dt = 0.75 \text{ Ns}$$

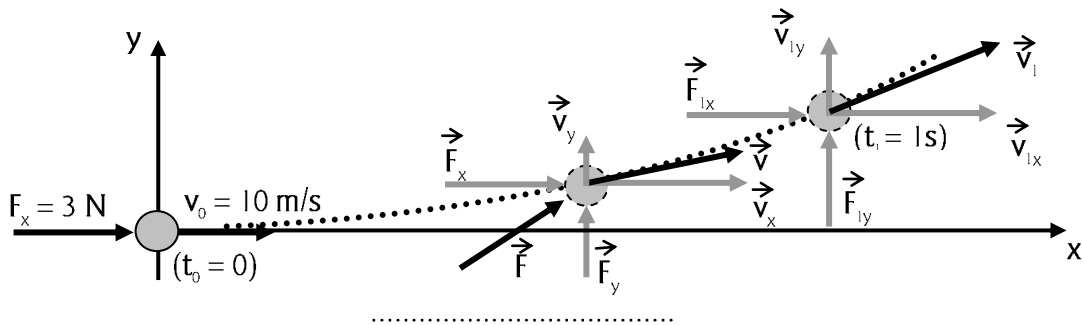
$$\Delta p_x = p_{1x} - p_{0x} = m \cdot v_{1x} - m \cdot v_{0x} = 1 \text{ kg} \cdot v_{1x} - 1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}$$

$$\Delta p_y = p_{1y} - p_{0y} = m \cdot v_{1y} - m \cdot v_{0y} = 1 \text{ kg} \cdot v_{1y} - 0$$

Igualando los impulsos con las variaciones de ímpetu lineal:

$$\left. \begin{aligned} 3.00 \text{ Ns} &= 1 \text{ kg} \cdot v_{1x} - 1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s} \\ 0.75 \text{ Ns} &= 1 \text{ kg} \cdot v_{1y} \end{aligned} \right\} \quad \boxed{\begin{aligned} v_{1x} &= 13.00 \text{ m/s} \\ v_{1y} &= 0.75 \text{ m/s} \end{aligned}}$$

Significado físico:



Esto que le sucede a una partícula le sucede a un sistema de partículas cuando sobre una (o unas cuantas) de ellas actúa alguna fuerza externa:

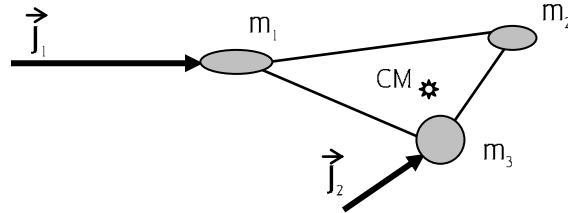
$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{R}_{\text{ext}} = d(\vec{p}_{\text{sis}})/dt \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_{\text{ext}} \cdot dt = d\vec{p}_{\text{sis}}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{R}_{\text{ext}} \cdot dt = \sum \vec{J}_{\text{ext}} \qquad \int_{p_{\text{sis } 1}}^{p_{\text{sis } 2}} d\vec{p}_{\text{sis}} = \vec{p}_{\text{sis } 2} - \vec{p}_{\text{sis } 1} = \Delta \vec{p}_{\text{sis}} \quad \therefore \quad \boxed{\sum \vec{J}_{\text{ext}} = \vec{J}_{R \text{ ext}} = \Delta \vec{p}_{\text{sis}}}$$

$$\boxed{\text{Si } \sum \vec{J}_{R \text{ ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\text{sis}} = \text{cte.} \quad (M \cdot \vec{v}_{\text{CM}} = \text{cte.}) \quad \therefore \quad \vec{v}_{\text{CM}} = \text{cte.})}$$

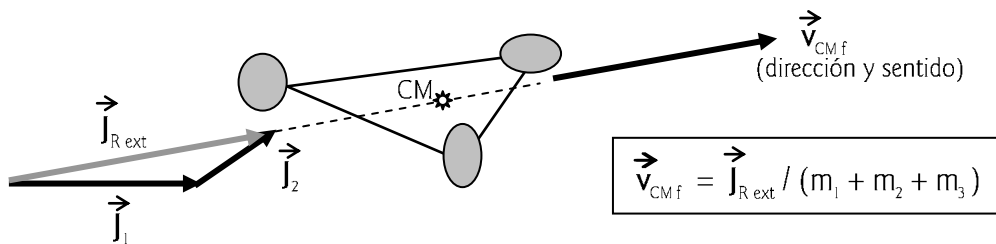
**Ejemplo 82**

Sobre el sistema de la figura, en reposo, compuesto por tres partículas unidas por barras muy livianas, se aplican simultáneamente dos impulsos que actúan durante un tiempo  $t$ . Calcular la dirección, el sentido, y el módulo de la velocidad del CM del sistema, al cabo de esos impulsos.



Solución:

$$\Sigma \vec{J}_{ext} = \Delta \vec{p}_{sis} \quad \Sigma \vec{J}_{ext} = \vec{J}_{R ext} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \quad \Delta \vec{p}_{sis} = \vec{p}_{sis f} - \vec{p}_{sis i}^0 = M \cdot \vec{v}_{CM}$$



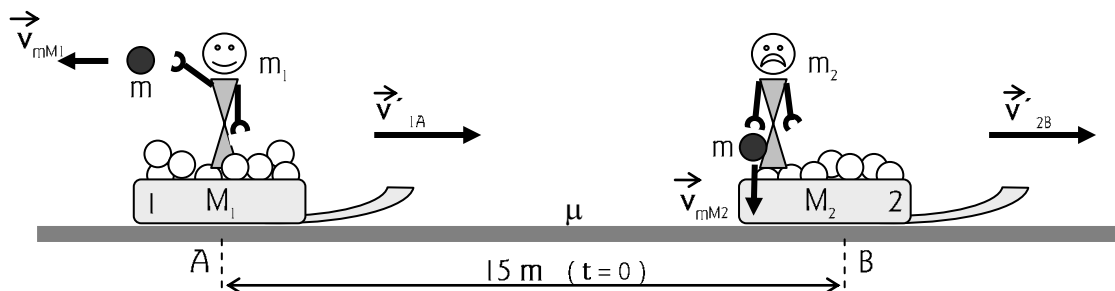
Con los datos del problema, podemos asegurar que esa será la  $\vec{v}_{CM}$ . Pero no podemos asegurar cuál será la posición de las masas, ya que, como veremos, estos impulsos generan una rotación en torno del CM. Es la razón por la que, en esta última figura, no se nominan las partículas.

.....

**Ejemplo 83**

Dos niños se desplazan horizontalmente sobre un piso nevado, con sendos trineos que avanzan en la misma dirección, el mismo sentido y con la misma rapidez cuando pasan por los puntos A y B, como indica la figura. Con la intención de alcanzar al que marcha adelante, el niño de masa  $m_1$  comienza a tirar bolas de nieve de masa  $m$  hacia atrás, con una velocidad  $\vec{v}_{mM1}$  respecto de su trineo; y con la intención de no dejarse alcanzar, el niño de adelante deja caer al suelo bolas de nieve de la misma masa  $m$  que caen verticalmente respecto del trineo y del suelo.

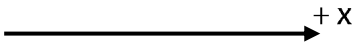
Si los lanzamientos se realizan simultáneamente en esas condiciones con intervalos de 3 s, calcular a qué distancia se encontrarán uno de otro al cabo de tres segundos después de tirada la tercer bola por cada uno. En el instante que lanzan su primera bola están a 15 m, deslizando sobre una nieve con la que los trineos tienen un coeficiente de roce  $\mu$ .



DATOS:

$m_1 = m_2 = 40 \text{ kg}$        $m = 0.5 \text{ kg}$        $v_{mM1} = 10 \text{ m/s}$        $v_{mM2x} = 0$        $\mu = 0.1$   
 $M_1$  (trineo con las bolas de nieve) = 12 kg       $M_2$  (trineo con las bolas de nieve) = 10 kg  
 En  $t = 0$ ,  $v_{1A} = 4 \text{ m/s} = v_{2B}$ .      Considérese, además,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

Solución:

Sistema del trineo 1 : 

Primer lanzamiento

$$\begin{aligned}
 & \text{P}_{\text{sis antes del lanz.}} = \text{P}_{\text{sis después del lanz.}} \\
 & (M_1 + m_1) \cdot v_{1A} = (M_1 + m_1 - m) \cdot v'_{1A} + m \cdot v_{mT1} \\
 & v_{mT1} = v_{mM1} + v_{1A} = -10 \text{ m/s} + 4 \text{ m/s} = -6 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

Reemplazando valores:  $v'_{1A} = [52 \cdot 4 + (0.5 \cdot 6)] / 51.5 = 4.097 \text{ m/s}$

Con esta rapidez inicial el trineo 1 recorre durante 3 s :  $\Delta x_1 = v'_{1A} \cdot t - \frac{1}{2} a_1 \cdot t^2$ ,  
 en donde el módulo de la aceleración  $a_1$  se calcula con:  $a_1 = f_{r1} / (M_1 + m_1 - m) = \mu \cdot g$

Resulta:  $\Delta x_1 = 7.791 \text{ m}$  - desplazamiento en los primeros 3 s -

Segundo lanzamiento

$$\begin{aligned}
 & \text{P}_{\text{sis antes del lanz.}} = \text{P}_{\text{sis después del lanz.}} \\
 & (M_1 + m_1 - m) \cdot v'_{1A} = (M_1 + m_1 - 2m) \cdot v''_{1A} + m \cdot v'_{mT1} \\
 & v'_{mT1} = v_{mM1} + v'_{1A} = -10 \text{ m/s} + 4.097 \text{ m/s} = -5.903 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

Reemplazando valores:  $v''_{1A} = [51.5 \cdot 4.097 + (0.5 \cdot 5.903)] / 51 = 4.195 \text{ m/s}$

Con este dato se calcula el desplazamiento durante los siguientes 3 s :

$$\Delta x_1' = v''_{1A} \cdot t - \frac{1}{2} a_1 \cdot t^2 = 8.085 \text{ m}$$

Tercer lanzamiento

$$\begin{aligned}
 & \text{P}_{\text{sis antes del lanz.}} = \text{P}_{\text{sis después del lanz.}} \\
 & (M_1 + m_1 - 2m) \cdot v''_{1A} = (M_1 + m_1 - 3m) \cdot v'''_{1A} + m \cdot v''_{mT1} \\
 & v''_{mT1} = v_{mM1} + v''_{1A} = -10 \text{ m/s} + 4.195 \text{ m/s} = -5.805 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

Reemplazando valores:  $v'''_{1A} = [51 \cdot 4.195 + (0.5 \cdot 5.805)] / 49.5 = 4.380 \text{ m/s}$

Con este dato se calcula el desplazamiento durante los siguientes 3 s :

$$\Delta x_1'' = v'''_{1A} \cdot t - \frac{1}{2} a_1 \cdot t^2 = 8.642 \text{ m}$$

El desplazamiento total del trineo 1 durante 9 s es:

$$\underline{\Delta x_{\text{total}}} = \Delta x_1 + \Delta x_1' + \Delta x_1'' = 7.791 \text{ m} + 8.085 \text{ m} + 8.642 \text{ m} = \underline{24.518 \text{ m}}$$

Sistema del trineo 2 : 

Primer lanzamiento

$$P_{\text{sis antes del lanz.}} = P_{\text{sis después del lanz.}}$$

$$(M_2 + m_2) \cdot v_{2B} = (M_2 + m_2 - m) \cdot v'_{2B} + m \cdot v_{mT2}$$

$$v_{mT2} = v_{mM2x} + v_{2B} = 0 + 4 \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}$$

Reemplazando valores:  $v'_{2B} = [50 \cdot 4 - (0.5 \cdot 4)] / 49.5 = 4.0 \text{ m/s}$

Como era de esperarse, el trineo 2 no cambia su rapidez porque los lanzamientos de las bolas de nieve son verticales y no hay impulsos con componente horizontal. Ver sistemas de masa variable en las páginas siguientes.

Con esta rapidez inicial el trineo 2 recorre durante 3 s :  $\Delta x_2 = v'_{2B} \cdot t - \frac{1}{2} a_2 \cdot t^2$  , en donde el módulo de la aceleración  $a_2$  se calcula con:  $a_2 = f_{r2} / (M_1 + m_1 - m) = \mu \cdot g$

Resulta:  $\Delta x_2 = 7.5 \text{ m}$

Pero dado que la aceleración y la velocidad son invariables, independientes de la masa, durante cada intervalo de 3 s el trineo 2 se desplaza lo mismo:  $\Delta x_2 = \Delta x_2' = \Delta x_2''$  .

Luego:  $\Delta x_{\text{total}} = \Delta x_2 + \Delta x_2' + \Delta x_2'' = 7.5 \text{ m} + 7.5 \text{ m} + 7.5 \text{ m} = \underline{22.5 \text{ m}}$

Por lo tanto, al cabo de tres lanzamientos y 9 s la distancia entre los trineos se ha acortado en:

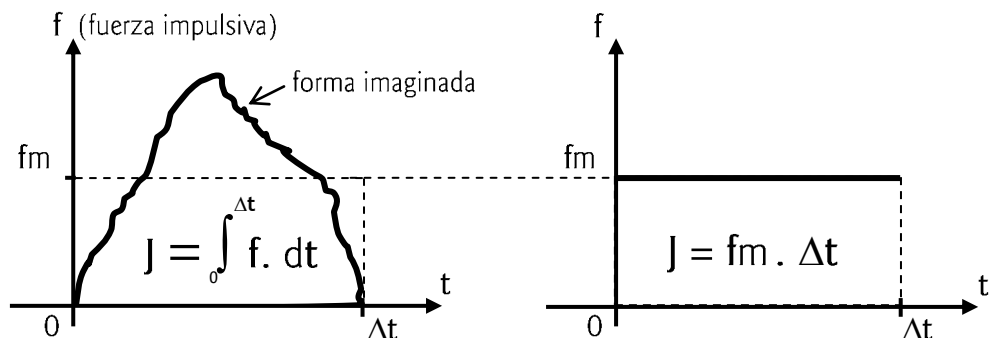
$$24.518 \text{ m} - 22.5 \text{ m} = 2.018 \text{ m}$$

.....

### FUERZAS IMPULSIVAS

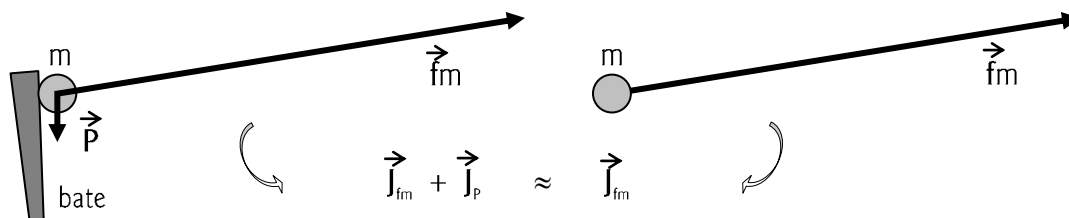
Las fuerzas de muy corta duración, de comportamiento indeterminado en este lapso, como las que aparecen en los choques o en los golpes tipo trompada o paletazo o algo que cae al piso, etc., se llaman fuerzas impulsivas. No se conoce cómo son esas fuerzas durante el corto tiempo  $\Delta t$  en que actúan, pero sí suelen conocerse sus efectos sobre los cuerpos.

Una representación gráfica de  $f = f(t)$  es, por lo tanto, imposible de realizar. Pero es útil tener en cuenta que el área encerrada por dicha curva representa al impulso, el que podría lograrse también suponiendo que la fuerza se mantiene constante desde  $t = 0$  a  $t = \Delta t$  :



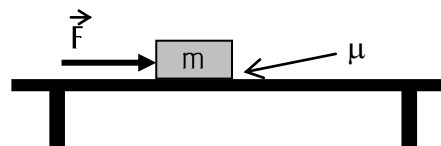
Se acostumbra llamar “fuerza media”,  $\vec{f}_m$ , a esta fuerza impulsiva constante que lograría el mismo impulso que la real.

Las fuerzas impulsivas medias son generalmente muy intensas, por lo cual se suelen despreciar los impulsos de las demás fuerzas en el intervalo en el que intervienen las impulsivas. Por ejemplo, cuando un bate o una raqueta golpean una pelota, el diagrama aislado debería contemplar la fuerza peso; sin embargo, solo se tiene en cuenta el impacto del bate, dada la magnitud de  $\vec{f}_m$  frente al peso de la pelota:



**Ejemplo 84**

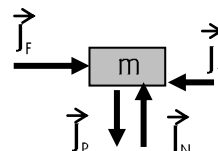
Un cuerpo de masa  $m = 2 \text{ kg}$ , se encuentra en reposo apoyado sobre una mesa con la que tiene un coeficiente de roce  $\mu = 0.25$ . En  $t = 0$  se le aplica una fuerza impulsiva  $\vec{F}$  horizontal, como indica la figura, cuyo impulso vale  $3 \text{ Ns}$ .



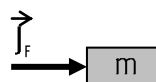
Calcular la velocidad con la que sale  $m$  inmediatamente después del golpe.

Solución:

Los impulsos actuantes simultáneamente con el de  $\vec{F}$ , son:



Este diagrama equivale aproximadamente a:



dado que  $\vec{J}_p$  y  $\vec{J}_N$  se cancelan, mientras que  $\vec{J}_{fr}$  se desprecia frente a  $\vec{J}_F$ .

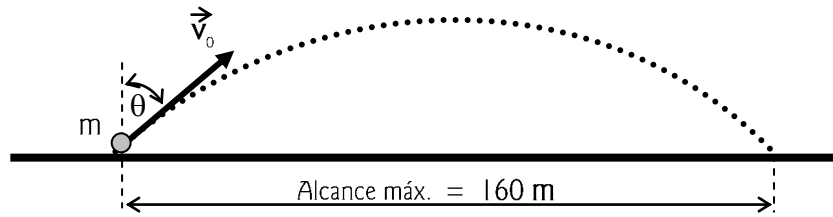
$$\therefore J_F = \Delta p = m \cdot v \quad \Longleftrightarrow \quad v = J_F / m = 3 \text{ Ns} / 2 \text{ kg} = 1.5 \text{ m/s}$$

**Ejemplo 85**

Un golfista lanza una pelotita de golf a  $160 \text{ m}$ , en el plano horizontal. Se estima que el palo que golpea a la pelotita permanece en contacto con ella mientras ésta se desplaza  $\Delta x$ , el equivalente a su radio. Para los datos que se dan a continuación, calcular la  $\vec{f}_m$  que aplica el palo y el tiempo en que éste y la pelotita estuvieron en contacto.

DATOS: ángulo de lanzamiento:  $\theta = 45^\circ$  ; masa de la pelotita:  $m = 45 \text{ gr}$  ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$   
 radio de la pelotita:  $R = 2 \text{ cm}$

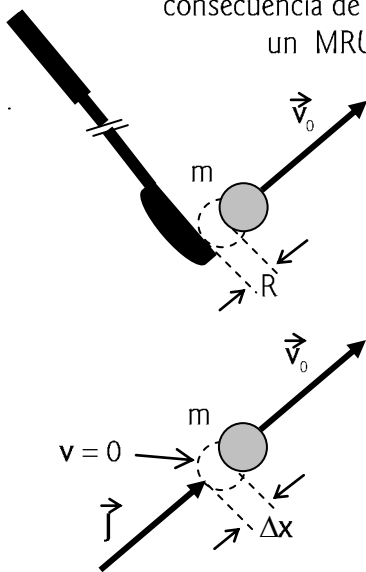
Solución:



De las ecuaciones correspondientes a *tiro oblicuo* (ver *CINEMÁTICA ...*) :

$$\text{Alcance máx.} = 160 \text{ m} = (v_0^2 \cdot \text{sen } 2\theta) / g \quad \Longleftrightarrow \quad v_0 = 40 \text{ m/s}$$

La velocidad  $\vec{v}_0$  es la que adquiere la pelotita una vez despedada del palo, y como consecuencia de haber recibido una fuerza impulsiva media,  $f_m$ , que le imprimió un MRUV desde que estaba en reposo hasta que salió despedida, libre.



$$\vec{f}_m = m \cdot \vec{a}_m$$

$$a_m = v_0^2 / 2\Delta x = v_0^2 / 2R = 1600 / 0.04 = 40\,000 \text{ m/s}^2$$

$$\therefore \boxed{f_m = 1800 \text{ N} \approx 183.6 \text{ Kgr}}$$

$$\vec{J} = \Delta \vec{p}$$

$$\underline{J} = \Delta p = m \cdot v_0 - 0 = 0.045 \text{ kg} \cdot 40 \text{ m/s} = \underline{1.8 \text{ Ns}}$$

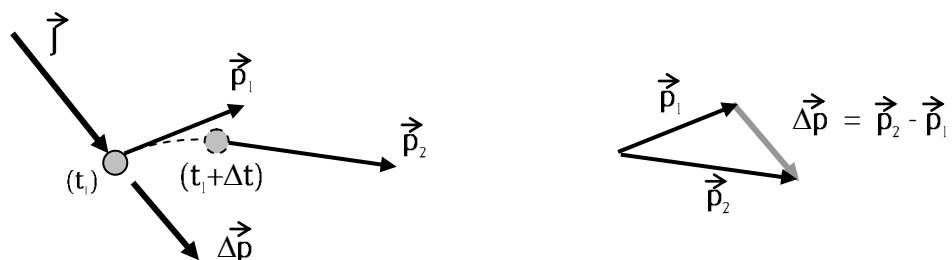
$$J = f_m \cdot \Delta t \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\Delta t = 1.8 \text{ Ns} / 1800 \text{ N} = 0.001 \text{ s}}$$

Puede observarse en este ejemplo, cuantitativamente, qué quiere decir aquello de “apreciación del impulso”, calculando cuánto es el impulso del peso de la pelotita en el intervalo  $\Delta t$  :

$$J_p = P \cdot \Delta t = 0.045 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.001 \text{ s} = 0.000441 \text{ Ns}$$

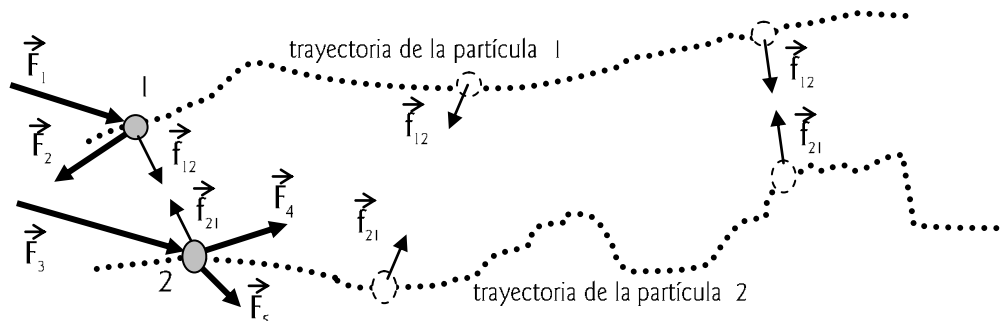
¡ Comparar este valor con el de 1.8 Ns , de J !

En la mayoría de los ejemplos precedentes aparecían impulsos sobre partículas en reposo. En el caso de que un impulso aparezca sobre una partícula en movimiento, destaquemos que la dirección y el sentido del impulso fijan la dirección y el sentido de la *variación del ímpetu lineal*; no del *ímpetu final*. Asunto que se puede ver mejor si tratamos con fuerzas impulsivas, como se ilustra a continuación:



TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA APLICADO A UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Supongamos que las partículas 1 y 2, consideradas como sistema, describen las trayectorias que se muestran en la figura, bajo la acción de fuerzas externas  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5$  e internas  $\vec{f}_{12}, \vec{f}_{21}$ :



Las fuerzas externas varían a lo largo de las trayectorias, lo que justifica que éstas sean así de intrincadas y que las partículas no se encuentren siempre a la misma distancia. El par de fuerzas de atracción entre ellas,  $\vec{f}_{12} - \vec{f}_{21}$ , se encuentra en una dirección que no siempre es perpendicular a las trayectorias de las partículas; incluso, si en algún instante lo está respecto de la trayectoria de una de ellas, no tiene por qué estarlo respecto de la otra.

En resumen, es obvio que sobre cada partícula la fuerza interna puede realizar trabajo, y que la suma de los trabajos sobre las dos partículas no tiene por qué ser *cero*.

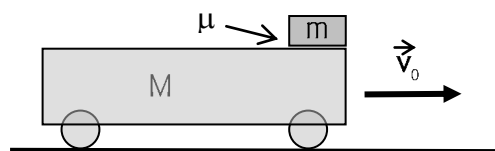
Si con  $\vec{F}_{e1}$  y  $\vec{F}_{e2}$  simbolizamos el conjunto de las fuerzas externas sobre las partículas 1 y 2 respectivamente, puede escribirse:

$$\begin{aligned}
 + \quad & W_{Fe1} + W_{f12} = Ec_{f1} - Ec_{o1} && \text{para la partícula 1} \\
 & W_{Fe2} + W_{f21} = Ec_{f2} - Ec_{o2} && \text{para la partícula 2} \\
 \hline
 & \underbrace{W_{Fe1} + W_{Fe2}}_{W_{F_{ext}}} + \underbrace{W_{f12} + W_{f21}}_{W_{f_{int}}} = \underbrace{(Ec_{f1} + Ec_{f2})}_{Ec_{sis f}} - \underbrace{(Ec_{o1} + Ec_{o2})}_{Ec_{sis i}} && \text{para el sistema}
 \end{aligned}$$

Teorema Trabajo-Energía para un Sistema de Partículas:  $W_{F_{ext}} + W_{f_{int}} = \Delta Ec_{sis}$

Ejemplo 86

Un carro de masa  $M$  viene moviéndose a velocidad  $\vec{v}_0$  constante, hasta que, en  $t = 0$ , se deposita una masita  $m$  sobre uno de sus extremos, como se aprecia en la figura (con  $v_i = 0$  respecto de Tierra). Si existe un coeficiente de roce  $\mu$  entre  $m$  y  $M$  (lo que frena al carro mientras  $m$  se desliza por su superficie), calcular:

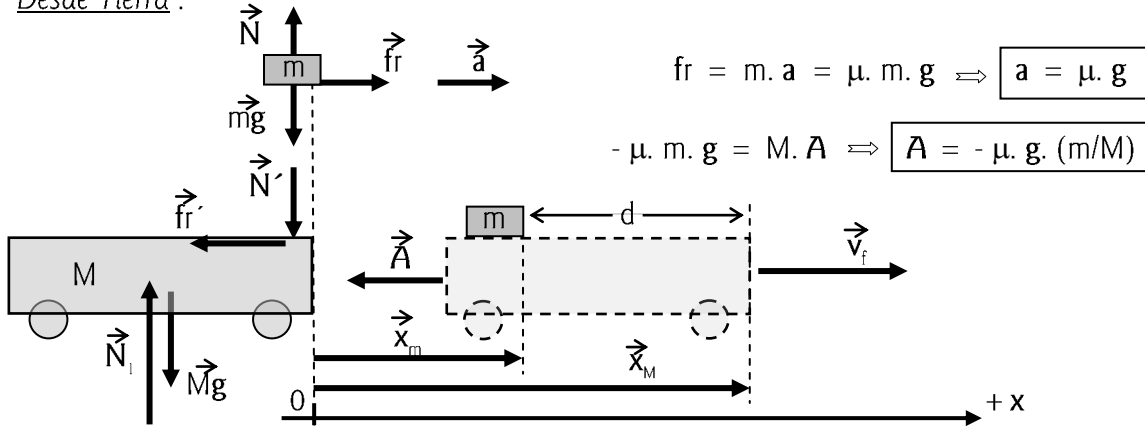


- a) La distancia recorrida por  $m$  sobre el carro hasta detenerse sobre el carro.
- b) La velocidad final del sistema.

- c) Las energías cinéticas inicial y final del sistema.
- d) El trabajo de todas las fuerzas (internas y externas), y luego verificar el Teorema Trabajo-Energía.

Solución:

Desde Tierra :



a)  $d = x_M - x_m = [v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \mu \cdot g \cdot (m/M) \cdot t^2] - [\frac{1}{2} \mu \cdot g \cdot t^2]$  (1)

$v_m = \mu \cdot g \cdot t$  ;  $v_M = v_0 - \mu \cdot g \cdot (m/M) \cdot t$

Cuando m se detiene sobre M :  $v_m = v_M \therefore t = v_0 / [\mu \cdot g (1 + m/M)]$

Volviendo a (1):  $\boxed{d = v_0^2 / [2 \mu g \cdot (1 + m/M)]}$

b)  $v_f = v_m = \mu \cdot g \cdot t = \mu \cdot g \cdot v_0 / [\mu \cdot g (1 + m/M)]$   $\boxed{v_f = M \cdot v_0 / (m + M)}$

c)  $\boxed{Ec_{sis\ i} = \frac{1}{2} M \cdot v_0^2}$

$Ec_{sis\ f} = \frac{1}{2} (m + M) \cdot v_f^2$   $\boxed{Ec_{sis\ f} = \frac{1}{2} (m + M) \cdot v_0^2 / (1 + m/M)^2}$

Las únicas fuerzas externas al sistema “m, M” son las debidas a los “pesos” y al “piso” sobre el que se desplaza el carro; son fuerzas perpendiculares a la trayectoria de cada partícula, por lo que no generan trabajo. Quedan las fuerzas de roce sobre m y M , que son internas; éstas, en su conjunto, producirán un trabajo negativo, dado que su acción es disipativa. Veamos (siempre “desde Tierra”):

Trabajo de la  $\vec{fr}$  sobre el bloque:  $W_{frb} = fr \cdot x_m = fr \cdot [\frac{1}{2} \mu \cdot g \cdot t^2] = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 / (1 + m/M)$   
(0  $\rightarrow$   $x_m$ )

Trabajo de la  $\vec{fr}$  sobre el carro:  $W_{frc} = fr \cdot x_M = fr \cdot [v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \mu \cdot g \cdot (m/M) \cdot t^2]$   
(0  $\rightarrow$   $x_M$ )  
 $= - m \cdot v_0^2 (1 + \frac{1}{2} m/M) / (1 + m/M)^2$

Trabajo total de  $\vec{fr}$  :  $\boxed{W_{fr} = W_{frb} + W_{frc} = - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 / (1 + m/M)}$   
(a lo largo de “d”) (0  $\rightarrow$   $x_m$ ) (0  $\rightarrow$   $x_M$ )



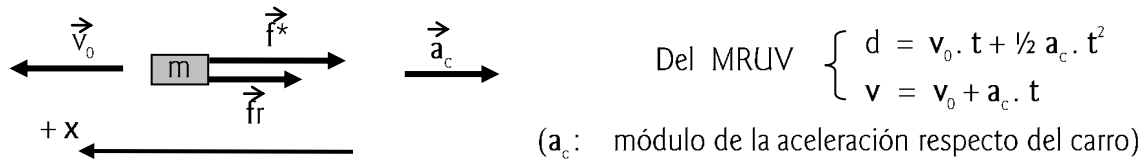
$$\therefore \left( \underline{W}_{\text{todas}} = W_{fr} = - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 / (1 + m/M) \right)$$

(a lo largo de "d")

Por otra parte: 
$$\left[ \begin{aligned} \underline{\Delta Ec}_{\text{sis}} &= Ec_{\text{sis f}} - Ec_{\text{sis i}} = \frac{1}{2} (m + M) \cdot v_0^2 / (1 + m/M)^2 - \frac{1}{2} M \cdot v_0^2 = \\ &= [ \frac{1}{2} M \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} M \cdot v_0^2 (m + M) ] / (m + M) = \\ &= - \frac{1}{2} M \cdot v_0^2 \cdot [ M - (m + M) ] / (m + M) = - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 / (1 + m/M) \end{aligned} \right]$$

$$\therefore \boxed{\text{¡ Se verifica ! : } W_{\text{todas}} = \Delta Ec_{\text{sis}}}$$

Desde Carro (SNI) :



$$a_c = - (f^* + fr) / m = - [ \mu \cdot g \cdot (m/M) \cdot m + \mu \cdot m \cdot g ] / m$$

$$0 = v_0 + a_c \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = v_0 / [ \mu \cdot g \cdot (1 + m/M) ]$$

$$\therefore \boxed{d = v_0^2 / [ 2 \mu g \cdot (1 + m/M) ]}$$

Otra manera para resolver problemas, muy útil por lo simple, es utilizando los criterios de la conservación de magnitudes físicas.

Se conserva el ímpetu lineal del sistema "m, M", dado que no hay impulsos de fuerzas externas sobre el mismo. Mejor dicho, el impulso neto de fuerzas externas es cero.

$$\sum \vec{J}_{\text{ext}} = \Delta \vec{p}_{\text{sis}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\text{sis}} = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\text{sis f}} = \vec{p}_{\text{sis i}} \quad \Rightarrow \quad p_{\text{sisx f}} = p_{\text{sisx i}}$$

$$p_{\text{sisx f}} = (m + M) \cdot v_f \quad ; \quad p_{\text{sisx i}} = M \cdot v_0 \quad ; \quad \boxed{v_f = M \cdot v_0 / (m + M)}$$

$$W_{\text{todas}} = \cancel{W_{\text{Fext}}}^0 + W_{\text{Fint}} = W_{\text{Fint}} = W_{fr} = \Delta Ec = Ec_{\text{sis f}} - Ec_{\text{sis i}}$$

Viendo el "sistema", directamente:  $W_{fr} = - fr \cdot d = - \mu \cdot m \cdot g \cdot d$

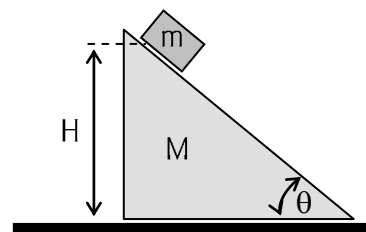
Igualando a  $\Delta Ec = - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 / (1 + m/M)$ , calculado anteriormente, queda:

$$\boxed{d = v_0^2 / [ 2 \mu \cdot g \cdot (1 + m/M) ]}$$

.....

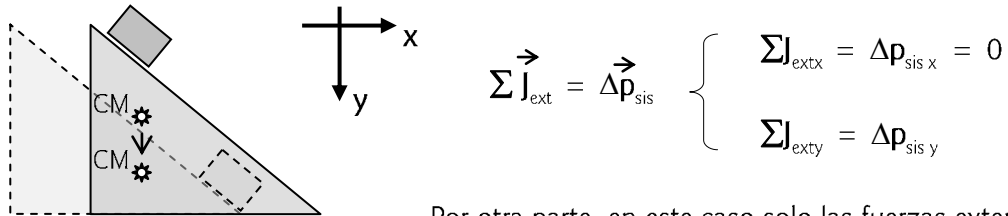
### Ejemplo 87

Un bloque de masa  $m$  se apoya sobre una cuña lisa de masa  $M$  que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal también lisa. Si  $m$  parte desde la altura  $H$ , calcular su velocidad y la de la cuña en el instante en que llega al suelo.

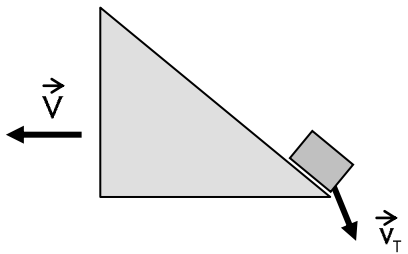


Solución:

Tomando a “m, M” como sistema, se ve que las únicas fuerzas externas son las de los pesos de m y M, y la que el piso ejerce sobre M (la llamaremos  $\vec{N}$ ). Siendo éstas verticales, no habrá variación en el ímpetu lineal del sistema en la dirección horizontal; durante el trayecto de m sobre el plano inclinado, el CM del sistema descenderá verticalmente.



Por otra parte, en este caso solo las fuerzas externas pueden aportar variación de energía cinética al sistema, dado que la fuerza de interacción entre m y M no genera trabajo. Aunque, en realidad, tampoco generan trabajo  $\vec{Mg}$  y  $\vec{N}$ , porque su desplazamiento es perpendicular a la trayectoria de M.



Con estas consideraciones, visto desde Tierra:

$$p_{sis\ x\ i} = 0 \quad ; \quad p_{sis\ x\ f} = m \cdot v_{Tx} - M \cdot V$$

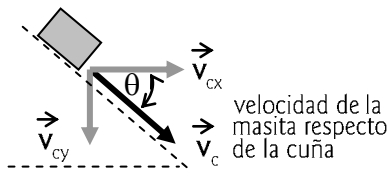
$$\therefore m \cdot v_{Tx} - M \cdot V = 0 \tag{1}$$

$$W_{todas} = W_{mg} = \Delta Ec_{sis} = Ec_{sis\ f} - Ec_{sis\ i}$$

$$W_{mg} = m \cdot g \cdot H \quad ; \quad \Delta Ec_{sis} = \frac{1}{2} m \cdot v_T^2 + \frac{1}{2} M \cdot V^2 - 0$$

$$\therefore m \cdot g \cdot H = \frac{1}{2} m \cdot v_T^2 + \frac{1}{2} M \cdot V^2 = \frac{1}{2} m \cdot (v_{Tx}^2 + v_{Ty}^2) + \frac{1}{2} M \cdot V^2 \tag{2}$$

Las ecuaciones (1) y (2) contienen las incógnitas V, v<sub>Tx</sub>, y v<sub>Ty</sub>, pero son insuficientes. Ahora, si tenemos en cuenta que la componente vertical de la velocidad de la masita respecto de la cuña es la misma respecto de Tierra que respecto de la cuña, (porque ésta se desplaza en un plano horizontal), entonces, agregando las consideraciones siguientes (adición de velocidades en x), se puede resolver el problema:



$$v_{cy} = v_{Ty} \quad v_{cx} = v_{Tx} + V$$

$$tg\ \theta = v_{cy}/v_{cx} = v_{Ty}/(v_{Tx} + V) \tag{3}$$

Resulta:

$$V^2 = m \cdot g \cdot H / [ M^2/2m + (M^2/2m) \cdot tg^2\theta + tg^2\theta \cdot M + tg^2\theta \cdot m/2 + M/2 ]$$

Observa que V es grande si es grande m y chicas M y  $\theta$ . Ahora, a partir de esta ecuación y de la (2), deduce cuánto vale v<sub>T</sub>.

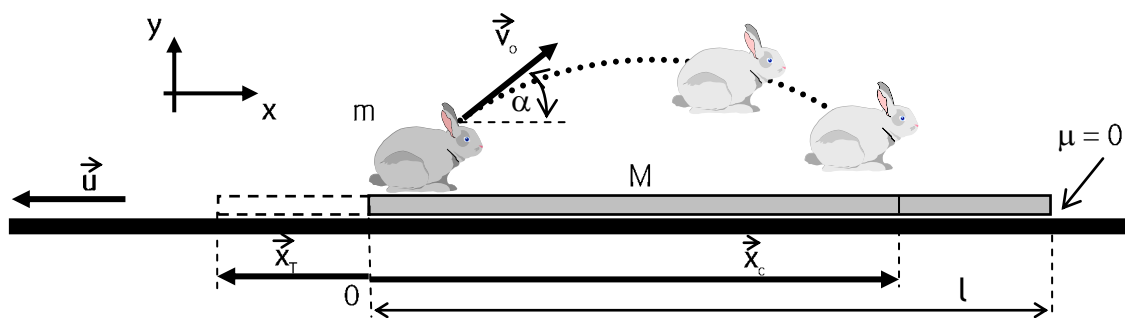
.....

**Ejemplo 88**

Un conejo de masa m está sentado en el extremo de una tabla de masa M y de longitud l. La tabla está apoyada en reposo sobre una superficie lisa. El conejo salta a lo largo de la tabla,

formando un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. ¿Qué rapidez inicial  $v_0$  respecto de Tierra debe tener el conejo para que al dar un salto se encuentre en el otro extremo de la tabla?

Solución:



$$x_T = -u \cdot t \qquad x_c = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

$$\vec{p}_{\text{sis}} = \text{cte.} \implies 0 = m \cdot v_0 \cdot \cos \alpha - M \cdot u \implies u = m \cdot v_0 \cdot \cos \alpha / M$$

De la figura, y por ser un MRU el del conejo en la dirección horizontal, vale la ecuación:

$$x_c = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t = l - u \cdot t \qquad (1)$$

Por otra parte, por ser un MRUV en el sentido vertical, se puede determinar  $t$ , tiempo de "vuelo" del conejo, con la expresión:

$$y_c = 0 = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

de donde: 
$$t = (2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha) / g$$

Introduciendo  $t$  en (1), y despejando  $v_0$ , se obtiene:

$$v_0 = [l \cdot M \cdot g / [(M+m) \cdot \sin 2\alpha]]^{1/2}$$

### COLISIONES

Definimos como colisión o "choque" a la interacción violenta entre partículas que se encuentran, y que no significa precisamente que se "toquen" (dos imancitos que van al encuentro con sus polos del mismo nombre, p. ej., pueden o no tocarse; pero al estar muy próximos actúa una fuerte fuerza que los detiene y luego repele).

En estas colisiones las fuerzas de interacción entre las partículas del sistema son internas. El choque generalmente se realiza en presencia de medios ambientes que influyen sobre este sistema con fuerzas *externas*, que son despreciables por lo general frente a las internas.

Se puede escribir, entonces: 
$$\sum \vec{J}_{\text{ext}} = 0 \quad \therefore \quad \vec{p}_{\text{sis}} = \text{cte.}$$

Por ejemplo, en el choque de dos autos se desprecia la fuerza de roce con el pavimento (fuerza externa), durante la colisión, frente a las fuerzas que los deforman (internas). Este

ejemplo plantea también una variación de la energía cinética de las partículas colisionantes. Pero, ... ¿esto es siempre así? ...

¿Qué sucede con la energía cinética del sistema en los choques?

Puede conservarse, puede disminuir, y hasta puede aumentar en el caso de las colisiones “al revés” (casos explosivos, en que se parte un cuerpo tipo granada, por ejemplo).

$$E_{c_{sis f}} = E_{c_{sis i}} + \Delta Q \quad (\Delta Q \equiv \Delta E_{c_{sis}})$$

En función del valor de  $\Delta Q$  las colisiones se denominan así:

Caso explosivo:	$\Delta Q > 0$	$E_{c_{sis f}} > E_{c_{sis i}}$
Colisión elástica:	$\Delta Q = 0$	$E_{c_{sis f}} = E_{c_{sis i}}$
Colisión inelástica:	$\Delta Q < 0$	$E_{c_{sis f}} < E_{c_{sis i}}$

Si en la colisión intervienen  $n$  partículas, pueden escribirse las siguientes ecuaciones independientes:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot u_{1x} + m_2 \cdot u_{2x} + m_3 \cdot u_{3x} + \dots + m_n \cdot u_{nx} &= m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} + m_3 \cdot v_{3x} + \dots + m_n \cdot v_{nx} \\ m_1 \cdot u_{1y} + m_2 \cdot u_{2y} + m_3 \cdot u_{3y} + \dots + m_n \cdot u_{ny} &= m_1 \cdot v_{1y} + m_2 \cdot v_{2y} + m_3 \cdot v_{3y} + \dots + m_n \cdot v_{ny} \\ m_1 \cdot u_{1z} + m_2 \cdot u_{2z} + m_3 \cdot u_{3z} + \dots + m_n \cdot u_{nz} &= m_1 \cdot v_{1z} + m_2 \cdot v_{2z} + m_3 \cdot v_{3z} + \dots + m_n \cdot v_{nz} \end{aligned}$$

$$\Delta Q + \frac{1}{2} m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot u_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n \cdot u_n^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n \cdot v_n^2$$

Aplicación a un choque unidimensional:



$$\vec{p}_{sis} = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 \quad (1)$$

$$\Delta Q + E_{c_{sis i}} = E_{c_{sis f}} \quad \Rightarrow \quad \Delta Q + \frac{1}{2} m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 \quad (2)$$

Lo que interesa conocer en estas colisiones es la velocidad de cada partícula después del choque, ( $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ ), y la energía perdida por ambas,  $\Delta Q$ . (Granada, si fuese el caso, como veremos). Se podría resolver el sistema de ecuaciones (1) y (2) si se conociese  $\Delta Q$ , pero aún así sería complicado por la ecuación cuadrática.

Para resolver el problema se define el coeficiente de restitución  $r$ , que suele medirse con cierta facilidad y permite plantear un par de ecuaciones más sencillas.

$$\boxed{r = - (v_2 - v_1) / (u_2 - u_1)} \quad \left[ - (\text{Veloc. relativa "después"}) / (\text{Veloc. relativa "antes"}) \right]$$

Está claro que  $r$  se vincula a  $\Delta Q$  (o  $\Delta E_{c_{sis}}$ ), por cuanto relaciona a velocidades relativas que, naturalmente, varían en función del cambio de energía cinética del sistema. Puede



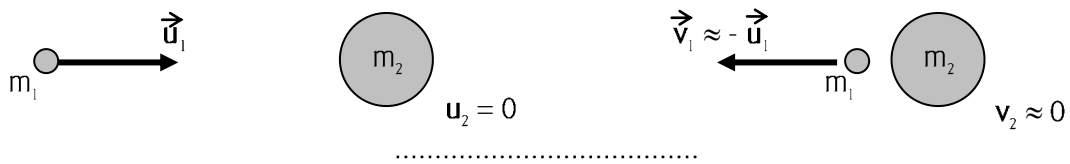
**Ejemplo 91**

Si una bolita choca a otra detenida, de masa enormemente mayor a la que viene moviéndose, calcular las velocidades de una y otra luego de este choque, supuesto *elástico*.

Solución:

$$\left( \begin{array}{l} \mathbf{v}_1 \approx [(-1 \cdot m_2) / (m_2)] \cdot \mathbf{u}_1 + [m_2 \cdot (1 + 1) / (m_2)] \cdot \mathbf{u}_2 \approx -\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_2 \approx [0 \cdot (1 + r) / (m_2)] \cdot \mathbf{u}_1 + [m_2 / (m_2)] \cdot \mathbf{u}_2 \approx 0 \end{array} \right)$$

El resultado es razonable, porque es como si  $m_1$  chocara contra una pared, rebotando con la rapidez que traía dado que no hubo pérdida de energía en la colisión:



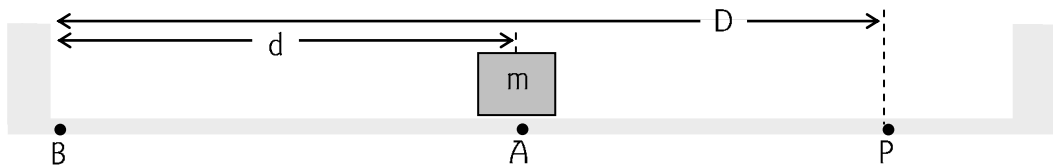
Es fácil demostrar también que si en un choque elástico  $m_1 \gg m_2$ , con  $m_2$  inicialmente detenida, la partícula  $m_1$  *ni se da por enterada* de la presencia de  $m_2$ , y continúa prácticamente con la velocidad que traía; por otro lado, la partícula  $m_2$  adquiere el doble de la velocidad inicial de  $m_1$ .

**Ejemplo 92**

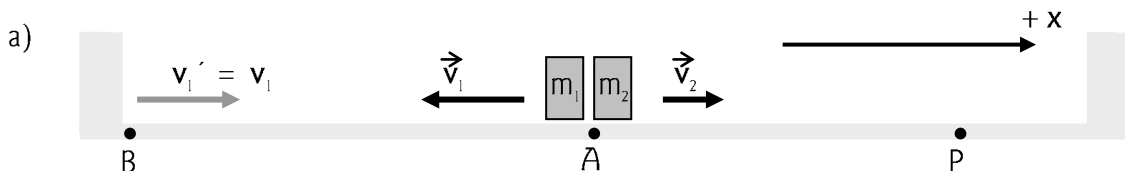
Sobre un piso liso yace en el punto  $A$ , en reposo, un bloque de masa  $m$ . En un determinado instante el bloque explota y se fracciona en dos partes de masas  $m_1$  y  $m_2$ . El trozo de masa  $m_1$  sale despedido en dirección perpendicular a la pared, con la que choca en  $B$  para luego retroceder por el mismo camino. El trozo de masa  $m_2$  sale despedido en la misma dirección, pero en sentido inverso, hacia la pared opuesta.

Si ambos trozos llegan simultáneamente al punto  $P$ , hallar la expresión de la relación entre  $m_1$  y  $m_2$  en función de los datos que se indican en la figura, en los casos:

- a) El choque contra la pared es elástico.
- b) El choque contra la pared es inelástico, con un valor del coeficiente  $r$  conocido.



Solución:



Dado que  $r = 1$ , la masa  $m_1$  recorre el camino  $D + d$  con la rapidez  $v_1$ . En el mismo tiempo,  $m_2$  recorre la distancia  $D - d$  con la rapidez  $v_2$ .

$$\therefore (D + d) / v_1 = (D - d) / v_2 \quad (1)$$

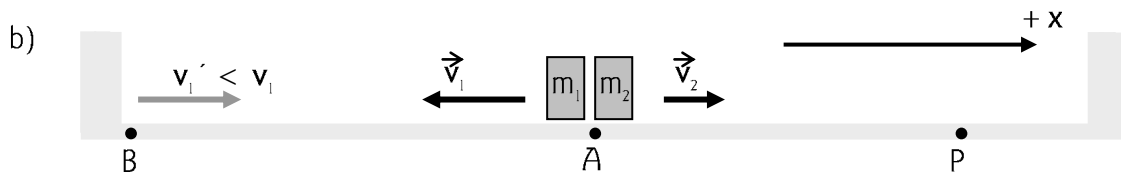
Por otro lado, el impulso de las fuerzas externas durante la explosión es nulo. Se puede escribir entonces:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{sis}} &= \text{cte.} & \Rightarrow & \begin{cases} p_{\text{sis } x}(\text{antes}) = p_{\text{sis } x}(\text{después}) \\ p_{\text{sis } y}(\text{antes}) = p_{\text{sis } y}(\text{después}) \end{cases} \\ \left. \begin{aligned} p_{\text{sis } x}(\text{antes}) &= 0 \\ p_{\text{sis } x}(\text{después}) &= m_2 \cdot v_2 - m_1 \cdot v_1 \end{aligned} \right\} & m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v_1 \quad (2) \end{aligned}$$

Combinando (1) y (2):

$$\boxed{m_2 / m_1 = (D + d) / (D - d)}$$

Es conveniente analizar éste como todos los demás resultados que se obtienen en los ejercicios de física. Aquí vemos: 1°) Los dos miembros son adimensionales. Bien. 2°) Si  $d \Rightarrow 0$ ,  $m_2 / m_1 \Rightarrow 1$  y  $m_2 \Rightarrow m_1$ . Bien, porque entonces ambas partículas partirían desde el mismo punto B, con la misma masa y por lo tanto con la misma rapidez. 3°) Si  $d \Rightarrow D$ , a  $m_2$  le queda poco camino para recorrer hasta P, mientras que  $m_1$  debe recorrer prácticamente  $2D$ . Luego, debe ser  $m_2 \gg m_1$  para que  $v_2 \ll v_1$ .



$v_1' = r \cdot v_1$ . El tiempo que invierte  $m_1$  en llegar a P es:  $(d / v_1) + (D / v_1')$ . El tiempo que invierte  $m_2$  es  $(D - d) / v_2$ , y debe ser igual que el de la otra partícula para que ambas puedan encontrarse simultáneamente en P.

Combinando las ecuaciones se llega a:

$$\boxed{m_2 / m_1 = [d + (D / r)] / (D - d)}$$

[ Trata de hacer un análisis como el del inciso a) para ver cómo influye r en el resultado ]

.....

Desde el punto de vista de la conservación de la energía cinética, vemos que la *colisión elástica* es aquella en la que la  $E_{c_{\text{sis}}}$  = cte. Pero, ¿cómo es la  $E_{c_{\text{sis } f}}$  en relación a la  $E_{c_{\text{sis } i}}$  en la *colisión plástica* (caso particular de *choque inelástico*)?

Veamos:

$$E_{c_{\text{sis } i}} = \frac{1}{2} m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot u_2^2$$

$$E_{c_{\text{sis } f}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot v^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot \left[ (m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2) / (m_1 + m_2) \right]^2$$

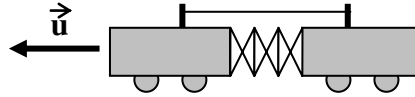
Por otro lado:  $m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v$ , dado que:  $v_1 = v_2 = v$

$$\therefore v = (m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2) / (m_1 + m_2)$$

Combinando las ecuaciones anteriores:

$$\Delta E_{c_{sis}} = E_{c_{sis f}} - E_{c_{sis i}} = - \frac{1}{2} \left[ \frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)} \right] \cdot (u_2 - u_1)^2 < 0 \quad \text{¡ se perdió } E_c !$$

En los choques inelásticos o plásticos se pierde energía por deformación o calentamiento de las partículas involucradas. Justamente lo contrario de lo que sucede en los *casos explosivos*, que entregan energía:



Entre los carritos hay un resorte comprimido. El conjunto se mueve con velocidad  $\vec{u}$ . Pero al cortar el hilo que une a los carritos, se libera el resorte y se incrementa la energía de movimiento del sistema como producto del trabajo de las fuerzas internas:

$$m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2$$

$$\text{Pero: } u_1 = u_2 = u \quad \therefore \quad u = (m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2) / (m_1 + m_2)$$

$$\text{Entonces: } E_{c_{sis i}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot \left[ (m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2) / (m_1 + m_2) \right]^2$$

$$E_{c_{sis f}} = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2$$

$$\Delta E_{c_{sis}} = E_{c_{sis f}} - E_{c_{sis i}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)} \right] \cdot (v_2 - v_1)^2 > 0 \quad \text{¡ se ganó } E_c !$$

### Relación entre $r$ y la pérdida o ganancia de energía - Caso general

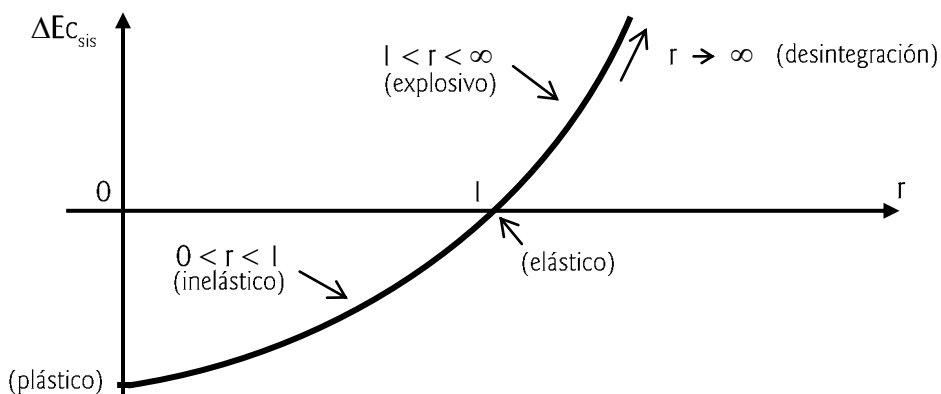
$$\begin{aligned} \Delta E_{c_{sis}} &= E_{c_{sis f}} - E_{c_{sis i}} = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 \cdot u_1^2 - \frac{1}{2} m_2 \cdot u_2^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 \cdot (v_1^2 - u_1^2) + \frac{1}{2} m_2 \cdot (v_2^2 - u_2^2) \end{aligned}$$

Desarrollando ahora  $(v_2 - v_1)^2 - (u_2 - u_1)^2$ , como  $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ , y teniendo en cuenta que la ecuación  $m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2$  se puede escribir como  $m_1 \cdot (v_1 - u_1) = -m_2 \cdot (v_2 - u_2)$ , resulta:

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot (v_1^2 - u_1^2) + \frac{1}{2} m_2 \cdot (v_2^2 - u_2^2) = \frac{1}{2} \left[ \frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)} \right] \cdot [(v_2 - v_1)^2 - (u_2 - u_1)^2]$$

Y como  $r \cdot (u_2 - u_1) = -(v_2 - v_1)$ , queda:

$$\Delta E_{c_{sis}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)} \right] \cdot (u_2 - u_1)^2 \cdot (r^2 - 1)$$





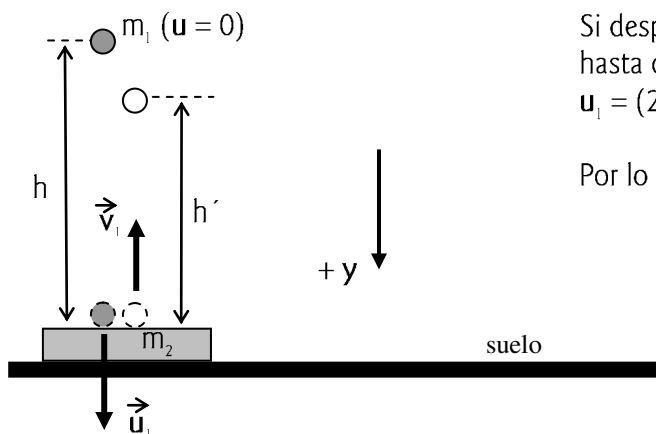
Con esto queda claro que conocer “r” implica el conocimiento de la pérdida o ganancia de energía en estos casos de interacción unidimensional de dos partículas. De manera que sólo resta ver cómo calcular a este coeficiente de restitución.

### Cálculo de r

El coeficiente de restitución r se da para distintos materiales. Se toma una bolilla de cierto material y se la deja caer desde una altura h determinada, sobre un cuerpo de otro material (o el mismo) apoyado sobre el suelo. Al impactar la bolilla sobre este cuerpo, es como si lo hiciera contra uno de masa prácticamente infinita (o, al menos, equivalente a la de la Tierra), con lo que  $u_2 = v_2 = 0$ . De la definición de r resulta, entonces:

$$r = - (v_2 - v_1) / (u_2 - u_1) = - v_1 / u_1$$

en la que  $u_1$  y  $v_1$  son, respectivamente, la rapidez de la partícula que se deja caer, justo antes, y justo después del impacto.



Si después del choque  $m_1$  asciende  $h'$  hasta detenerse, se deduce fácilmente que  $u_1 = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2}$  y que  $v_1 = - (2 \cdot g \cdot h')^{1/2}$ .

Por lo que:

$$r = (h' / h)^{1/2}$$

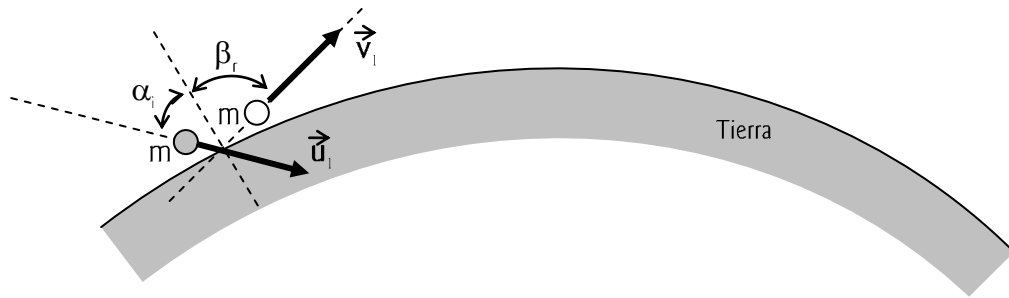
Si  $h' = h$ , significa que se conservó la energía de  $m_1$ , y por lo tanto no hubo pérdidas de energía ( $\Delta Q = 0$ ); se trata de un choque elástico en el que  $r = 1$ . Si  $h' < h$ , r es menor que 1 y el caso corresponde a un choque inelástico en el que hubo pérdida de energía:  $\Delta E_{c_{sis}} \equiv \Delta Q < 0$ . Obviamente, si al tocar a  $m_2$  apoyada sobre el suelo, se desencadena una explosión,  $m_1$  puede ser devuelta por encima de  $h$ , y en tal caso habría ganancia de energía y r sería mayor que 1.

Ahora, si el cuerpo de masa  $m_2$  fuera una lámina de hierro, por ejemplo, en vez de un taco o bloque de hierro, ¿qué pasaría? ¿Crees que el cuerpo de masa  $m_1$  rebotaría hasta la misma altura  $h'$ ? ...

Veamos a continuación cómo se resuelven los casos en que los choques de dos partículas no son unidimensionales.

### Ejemplo 93

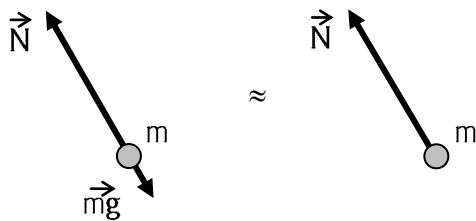
Una pelota de masa  $m$ , lanzada oblicuamente, choca contra un piso de la Tierra considerado liso en esa zona (coeficiente de roce igual a cero). Calcular el ángulo  $\beta_r$  de “reflexión” de la pelota en función del ángulo  $\alpha_i$  de “incidencia”, para distintos pisos (distintos coeficientes de restitución).



Solución:

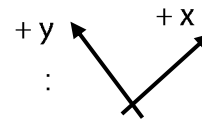
Para estos casos de choques oblicuos, se define al coeficiente de restitución como el cociente entre las componentes verticales de las velocidades:  $r = -v_{fy} / u_{iy}$ , teniendo el signo “-” el mismo significado que antes: que sea  $r$  siempre mayor que 0.

El diagrama de cuerpo aislado correspondiente a  $m$  en el momento en que está impactando con el suelo, es:



dado que el impulso del piso es mucho mayor que el del peso.

Luego, tomando el siguiente sistema de referencias:



$$\vec{J} = \Delta \vec{p} \quad \left\{ \begin{array}{l} J_N = m \cdot v_{fy} - m \cdot u_{iy} \\ 0 = m \cdot v_{fx} - m \cdot u_{ix} \end{array} \right. \iff \boxed{v_{ix} = u_{ix}}$$

$$\operatorname{tg} \beta_r = v_{fx} / v_{fy} = u_{ix} / v_{fy} = u_{ix} / (-r \cdot u_{iy}) = (u_{ix} / u_{iy}) \cdot (-1/r) = (1/r) \operatorname{tg} \alpha_i$$

Esta expresión es fácil verificarla con un par de experiencias muy sencillas:

a) Si tiramos contra el suelo liso un huevo, se establece un choque plástico ( $r = 0$ ) porque se rompe y no se despega del suelo; sus partes se desparraman, patinando y formando  $90^\circ$  con la vertical. En la ecuación obtenida vemos que  $\operatorname{tg} \beta_r = \infty$ , con lo que  $\beta_r = \pi/2$ .

b) Si tiramos contra el suelo liso una pelotita de ping pong, se establece un choque prácticamente elástico ( $r = 1$ ) y vemos que la pelotita rebota con el mismo ángulo respecto de la vertical con el que llega al suelo. En la ecuación se obtiene  $\operatorname{tg} \beta_r = \operatorname{tg} \alpha_i$ , con lo que  $\beta_r = \alpha_i$ .

En cuanto a la variación de energía cinética del sistema en este caso, la misma equivale a la variación de energía cinética solamente de la partícula lanzada contra el suelo, dado que el planeta no se altera:

$$\Delta E_{c_{\text{sis}}} = \Delta E_{c_i} = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 \cdot u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot [(v_{ix}^2 + v_{iy}^2) - (u_{ix}^2 + u_{iy}^2)]$$

Como  $v_{ix} = u_{ix}$  (suponemos  $f_{\text{roce}} = 0$  en este ejemplo), y  $r = -v_{fy} / u_{iy}$ , resulta:

$\Delta E_{c_1} = \frac{1}{2} m_1 \cdot \mathbf{u}_{1y}^2 \cdot (r^2 - 1)$ , que es equivalente a lo que se hubiese obtenido a partir de la ecuación  $\Delta E_{c_{\text{sis}}} = \frac{1}{2} [m_1 \cdot m_2 / (m_1 + m_2)] \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)^2 \cdot (r^2 - 1)$  ya conocida, haciendo  $m_2 \gg m_1$  y  $\mathbf{u}_2 = 0$ .

.....

### Ejemplo 94

Una pelota de masa  $m$ , lanzada oblicuamente, choca contra un piso de la Tierra con el que tiene un coeficiente de roce  $\mu$ . Calcular el ángulo  $\beta_r$  de "reflexión" de la pelota en función del ángulo  $\alpha_i$  de "incidencia", y de  $r$  (coeficiente de restitución), suponiendo que la pelota patina durante el contacto y que por lo tanto la fuerza de roce vale  $\mu N$ .

Solución:

Tomando el mismo sistema de referencias y los mismos símbolos utilizados en el *Ejemplo 93*, y suponiendo también despreciable el impulso de la fuerza peso durante la interacción, puede escribirse:

$$J_N = m \cdot v_{1y} - m \cdot u_{1y} \qquad J_x = m \cdot v_{1x} - m \cdot u_{1x}$$

Como  $J_N = \int_0^{\Delta t} N \cdot dt$  y  $J_x = - \int_0^{\Delta t} \mu N \cdot dt$ , resulta:  $J_x / J_N = -\mu$ .

$$\begin{aligned} \text{tg } \beta_r = v_{1x} / v_{1y} &= [(J_x + m \cdot u_{1x}) / m] / [(J_N + m \cdot u_{1y}) / m] = \\ &= [-\mu + [u_{1x} / (v_{1y} - u_{1y})]] / [1 + [u_{1x} / (v_{1y} - u_{1y})]] \end{aligned}$$

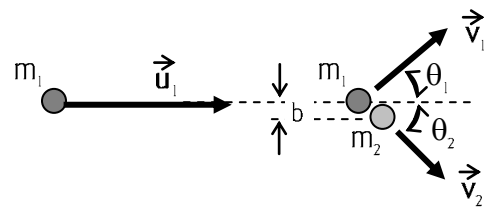
Combinando estas expresiones, y teniendo en cuenta que  $r = -v_{1y} / u_{1y}$  y que  $u_{1x} / v_{1y} = (1/r) \text{tg } \alpha_i$  (ver ejercicio anterior), se llega a:

$$\text{tg } \beta_r - (1/r) \text{tg } \alpha_i = -\mu \cdot (1+r) / r$$

.....

### Ejemplo 95

Una bola de masa  $m_2$  se encuentra detenida sobre una mesa. Otra bola de masa  $m_1$  va a su encuentro y produce un choque no lineal, como muestra la figura.



Plantear la ecuación de conservación del ímpetu

lineal del sistema, y calcular con qué ángulo  $(\theta_1 + \theta_2)$

salen despedidas las bolas, si el choque es elástico y las masas son iguales.

DATOS:  $m_1$ ;  $m_2$ ;  $\vec{u}_1$ ;  $\vec{u}_2 = 0$

Solución:

Independientemente del parámetro  $b$ , puede escribirse siempre:

$$m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 \quad (1)$$

$$\Delta Q + \frac{1}{2} m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 \quad (2)$$

$$\therefore m_1 \cdot u_{1x} + m_2 \cdot u_{2x} = m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} \quad ; \quad m_1 \cdot u_{1y} + m_2 \cdot u_{2y} = m_1 \cdot v_{1y} + m_2 \cdot v_{2y}$$

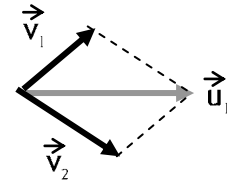
En este caso particular, en que  $u_2 = 0$ ,  $m_1 = m_2$ , y  $\Delta Q = 0$ , se obtiene:

de (1) :

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

de (2) :

$$u_1^2 = v_1^2 + v_2^2$$



Como  $\vec{u}_1$  es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lados  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ , resulta:

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$$

.....

Hemos visto cómo únicamente los elementos externos a un sistema de partículas pueden modificar el estado de equilibrio (reposo o MRU) de su centro de masas. Cabe preguntarse entonces cómo un cohete tripulado puede desviarse de su trayectoria rectilínea, alejado de planetas y estrellas, alejado de medios externos que le provean fuerzas externas.

Si consideramos como sistema a un cohete tripulado, el CM de este sistema compuesto por la masa del cohete, los tripulantes, los alimentos, los combustibles, etc., no podrá ser acelerado por otras fuerzas que no sean externas a este conjunto; si el cohete con su contenido viaja con MRU, parece que irremediablemente debería continuar haciéndolo hasta toparse con planetas, cometas o estrellas. Lo que se hace entonces es desprender parte del contenido (gases) mediante fuerzas internas, con el objeto de lograr sobre el resto (parte útil) una fuerza de reacción que lo acelere. ¡Pero el CM del sistema (gases + parte útil) sigue sobre su trayectoria rectilínea, con velocidad constante!

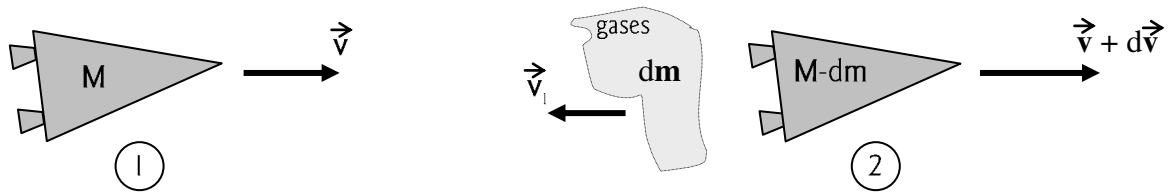
Lo mismo sucedería con alguien parado sobre un piso horizontal absolutamente liso. Existirían sobre él fuerzas externas (peso y normal) pero no habría componente horizontal de estas fuerzas externas que pueda acelerarlo. La persona estaría condenada a quedarse en el mismo lugar, sin poder avanzar hacia la orilla de ese piso liso; tan solo podría brincar en el sentido vertical, y hasta realizar con sus fuerzas internas todo tipo de contorsiones, logrando únicamente modificar la posición de su CM (ubicado en la zona del ombligo) en la dirección vertical. No le quedaría otro remedio a esta persona estancada que desprenderse de alguna prenda, para avanzar en sentido contrario al lanzamiento de la misma.

Analicemos entonces, con un poco más de detalles, estas cuestiones.

*SISTEMAS DE MASAS VARIABLES*

Imaginemos a un cohete de masa total  $M$  moviéndose en el espacio con velocidad constante  $\vec{v}$  (tomada respecto de alguna referencia espacial). En determinado momento se desprende de este cohete una masita de gases  $dm$ , con velocidad  $\vec{v}_1$  respecto de la misma referencia. Veamos qué fuerzas aceleran a la parte útil en esas condiciones, a partir de la variación del

ímpetu lineal.



En (1) :  $\vec{p}_{\text{sis } 1} = M \cdot \vec{v}$

En (2) :  $\vec{p}_{\text{sis } 2} = (M - dm) \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) + dm \cdot \vec{v}_1$

$$\left[ \begin{aligned} \underline{d\vec{p}_{\text{sis}}} &= \vec{p}_{\text{sis } 2} - \vec{p}_{\text{sis } 1} = (M - dm) \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) + dm \cdot \vec{v}_1 - M \cdot \vec{v} \\ &= M \cdot d\vec{v} - \underbrace{dm \cdot \vec{v}}_0 - \underbrace{dm \cdot d\vec{v}}_0 + dm \cdot \vec{v}_1 = \underline{M \cdot d\vec{v} + dm \cdot \vec{v}_r} \end{aligned} \right]$$

en donde  $\vec{v}_r$  es la velocidad relativa de los gases respecto del cohete:  $\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}$

Derivando respecto del tiempo:  $d\vec{p}_{\text{sis}}/dt = M \cdot d\vec{v}/dt + dm \cdot \vec{v}_r/dt$

se obtiene la ecuación:  $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = M \cdot \vec{a} + q \cdot \vec{v}_r$

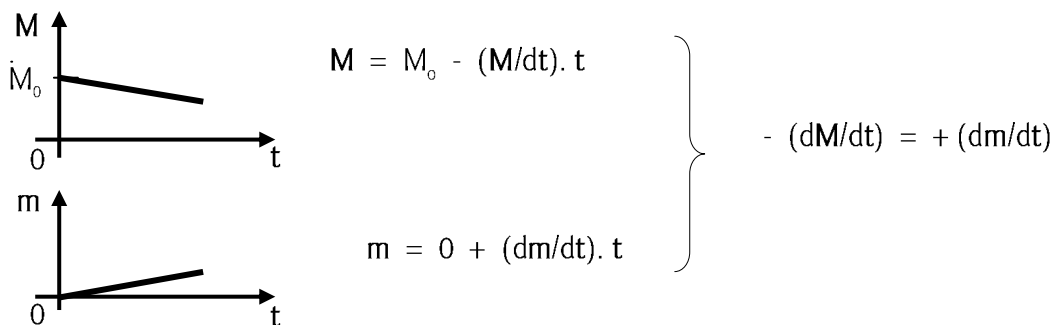
en la que  $q$  es el caudal de combustible consumido en la unidad de tiempo ( $q = dm/dt$ ) y el producto  $q \cdot v_r$  tiene dimensiones de fuerza.

La aceleración del cohete,  $\vec{a}$ , está sujeta, entonces, a las fuerzas externas que pudiesen existir provenientes de planetas, etc., y a la fuerza originada por la expulsión de gases llamada “fuerza de retropropulsión” o “fuerza de empuje”, cuyo módulo es  $q \cdot v_r$ :

$$(\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} - q \cdot \vec{v}_r) / M = \boxed{\vec{a} = (\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{f}_{\text{retro}}) / M}$$

El cambio de signo en el término de la fuerza de retropropulsión se debe a que se está considerando la fuerza de los gases sobre el cohete, mientras que en el desarrollo previo se tuvo en cuenta la fuerza de empuje sobre  $dm$  (ver sentido de  $\vec{v}_r$ ).

Por otra parte, la masa que pierde el cohete es la misma que la que ganan los gases, por unidad de tiempo:



De manera que:

$$(\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} - \mathbf{q} \cdot \vec{v}_r) / M = [\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} - (dm/dt) \cdot \vec{v}_r] / M = [\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} + (dM/dt) \cdot \vec{v}_r] / M$$

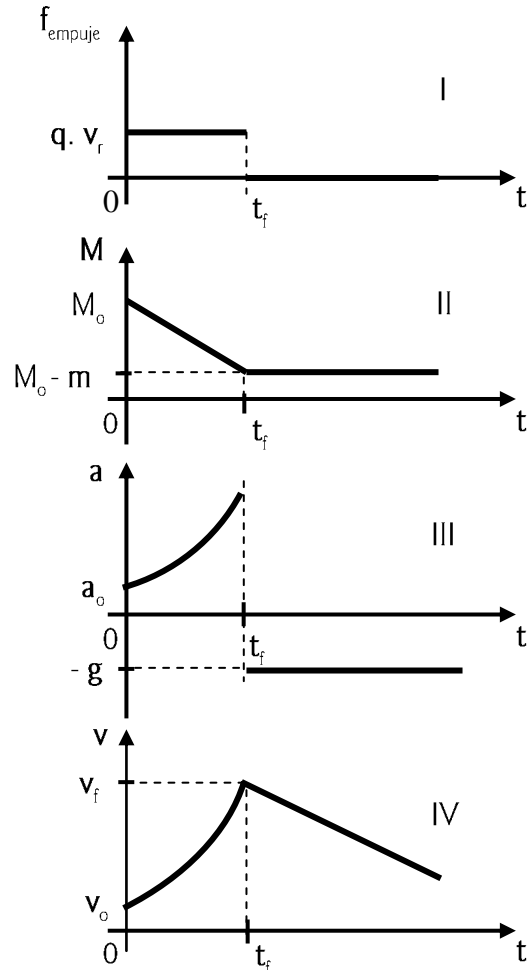
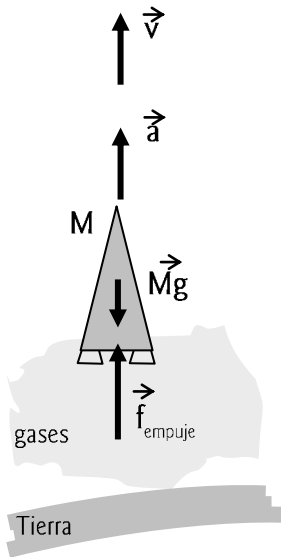
**Ejemplo 96**

Un cohete de masa inicial  $M_0$  se eleva verticalmente desde la superficie del planeta Tierra, eyectando un caudal  $\mathbf{q}$  de gases con una velocidad relativa  $\vec{v}_r$  constante. Trazar cualitativamente las curvas  $\mathbf{a} = f(t)$ ,  $\mathbf{M} = f(t)$ ,  $f_{\text{retro}} = f(t)$ ,  $\mathbf{v} = f(t)$ , considerando constante la aceleración de la gravedad terrestre y tomando a  $t_f$  como el instante en el que se termina la eyección de los gases.

Solución:

$$M = M_0 - \mathbf{q} \cdot t \quad ; \quad \mathbf{a} = (\Sigma F_{\text{ext}} + f_{\text{empuje}}) / M \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = -(\mathbf{M} \cdot \mathbf{g}) / M + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_r) / (M_0 - \mathbf{q} \cdot t)$$

A pesar de que la fuerza de retropropulsión es constante, la aceleración del cohete es hiperbólica, porque su masa no es constante. (Ver figuras I, II, y III).



$$\boxed{\mathbf{a} = dv/dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^v dv = \int_0^t \mathbf{a} \cdot dt$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t (-\mathbf{g}) \cdot dt + \int_0^t [(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_r) / (M_0 - \mathbf{q} \cdot t)] \cdot dt$$

Para un instante  $t$  cualquiera, la velocidad del cohete vale:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{g} \cdot t + \mathbf{v}_r \cdot \ln [1 / (1 - \mathbf{q} \cdot t / M_0)]$$

El gráfico horario de la velocidad es logarítmico mientras existe eyección de gases entre  $t = 0$  y  $t = t_f$ . En ese instante el cohete de masa  $M_0 - m$  (fig. II) tiene una rapidez  $v_f$  y comienza a moverse con MRUV ( $\mathbf{g} = \text{cte.}$ ; ver fig. IV).

Como llamamos  $m$  al combustible perdido en el tiempo  $t_f$  (fig.II), resulta  $t_f = m/q$  y la

velocidad en ese instante es:

$$v_f = v_0 - g \cdot m / q + v_r \cdot \ln [ 1 / ( 1 - m / M_0 ) ]$$

El último término en la expresión anterior indica que se puede lograr una elevadísima velocidad al cabo de  $t_f$  si la masa  $m$  de gases eyectados es del orden de  $M_0$ . Esta es la razón por la cual el 95% del peso inicial del cohete corresponde al combustible y por la que los tanques de combustible que se van vaciando se desprenden para que la misma fuerza de empuje tenga que acelerar una masa residual menor.

Por otra parte, también es conveniente expulsar los gases a la máxima velocidad posible (elevada  $v_r$ ), por lo cual la idea es utilizar motores a propulsión iónica que expulsan átomos cargados a velocidades próximas a la de la luz.

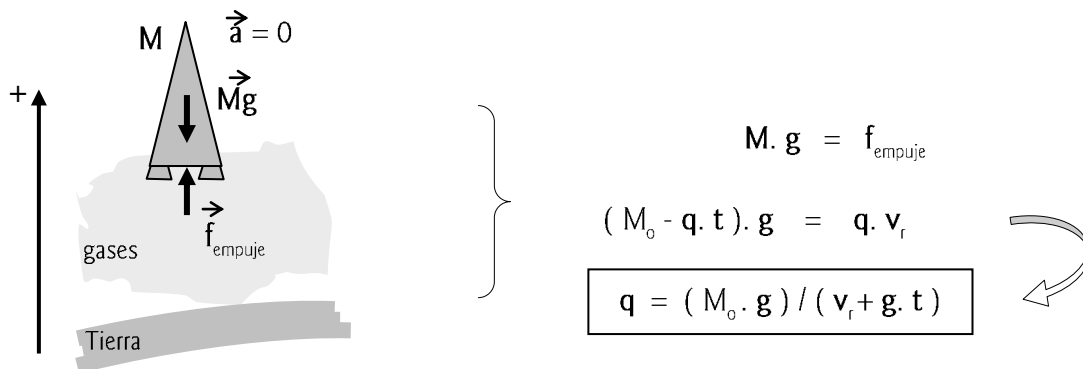
La necesidad de obtener grandes velocidades en cohetaría es obvia si se tienen en cuenta los objetivos humanos de poblar algún planeta o algún satélite de uno de los planetas de nuestro sistema solar, a mediano plazo. Y ni hablar si se nos ocurriera visitar otras estrellas. (Recordar que la más cercana, después del Sol, es la "Próxima Alfa Centauro", a más de 4 años-luz de distancia).

.....

### Ejemplo 97

Un cohete, que soltó amarras y ya comenzó a eyectar gases, por una razón técnica se ve obligado a mantenerse suspendido en el aire en la rampa de lanzamiento, durante el tiempo  $t$  (algunos segundos). Deducir cómo debe variar con el tiempo el caudal de gases, si éstos salen expelidos siempre a la misma velocidad relativa al cohete.

Solución:



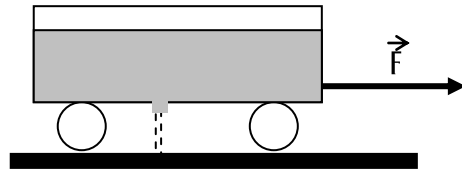
Se observa que el caudal debe disminuir instante a instante para lograr el efecto requerido, ya que se necesita cada vez menos fuerza para sostener un cuerpo que va perdiendo masa.

.....

### Ejemplo 98

Un carro que contiene arena avanza en sentido horizontal bajo la acción de una fuerza  $\vec{F}$ . El carro tiene un orificio en su piso por el que se escurre arena a razón de  $q$  gr/s. Si en el instante  $t_0 = 0$  la masa total es  $M_0$  y el carro tiene una velocidad  $\vec{v}_0$ , calcular:

$a = f(t)$  y  $v = f(t)$  para el caso en que  $\vec{F}$  se mantenga constante.



Solución:

Para cualquier instante  $t$ :  $a = F/M = F / (M_0 - q \cdot t)$ .

Por otra parte, de  $a = dv/dt \implies a \cdot dt = dv \implies \int_0^t a \cdot dt = \int_{v_0}^v dv$

$$\therefore \int_{v_0}^v dv = \int_0^t [F / (M_0 - q \cdot t)] \cdot dt = - \int_0^t [F \cdot [d(M_0 - q \cdot t)] / (M_0 - q \cdot t)] \cdot 1/q$$

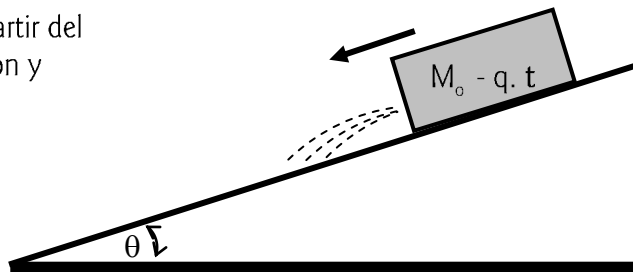
$$v - v_0 = - (F/q) \cdot \ln [(M_0 - q \cdot t)]_0^t \implies$$

$$\implies \boxed{v = v_0 - (F/q) \cdot \ln [(M_0 - q \cdot t) / M_0]}$$

**Ejemplo 99**

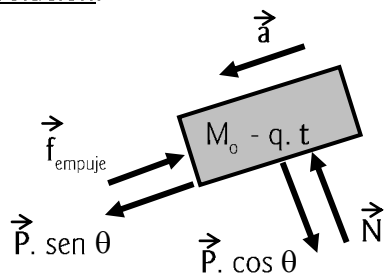
Por un plano inclinado desliza hacia abajo un depósito lleno de agua, según se indica en la figura. A través de un orificio sale agua a razón de  $q$  kg/s con velocidad  $\vec{v}_0$  (constante) relativa a la caja, y con dirección paralela al plano. La masa de la caja vacía es despreciable y llena de agua es  $M_0$ .

Si el depósito inicia el desplazamiento a partir del reposo en  $t = 0$ , determinar su aceleración y calcular durante cuánto tiempo se moverá con dicha aceleración.



¿Qué pasa después de ese tiempo?

Solución:



$$(M_0 - q \cdot t) \cdot g \cdot \text{sen } \theta - v_0 \cdot q = (M_0 - q \cdot t) \cdot a$$

$$\boxed{a = g \cdot \text{sen } \theta - (v_0 \cdot q) / (M_0 - q \cdot t)}$$

Al cabo del tiempo  $t_v$  (tiempo de vaciado) queda la caja vacía con su masa  $M$ :

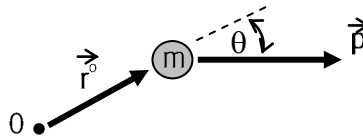
$$M = M_0 - q \cdot t_v \implies \boxed{t_v = (M_0 - M) / q}$$

A partir de  $t_v$  la aceleración es  $g \cdot \text{sen } \theta$ .



Hemos visto hasta aquí cómo la definición de algunas magnitudes físicas era útil para la resolución de problemas. Tal es el caso del ímpetu lineal  $\vec{p}$ , por ejemplo. Pero veremos ahora que se pueden definir otras magnitudes cuya conservación, o no, es necesario tener en cuenta para facilitar cálculos que tienen que ver con partículas o con sistemas de partículas.

Sea una partícula  $m$  con ímpetu lineal  $\vec{p}$ , en la posición  $\vec{r}^o$ :



Se define como *ímpetu angular de una partícula respecto de un punto "0"* al producto vectorial :

$$\vec{L}^o = \vec{r}^o \wedge \vec{p}$$

en donde  $\vec{L}^o$  es un "vector" perpendicular al plano formado por  $\vec{r}^o$  y  $\vec{p}$ , de módulo:

$$L^o = r^o \cdot p \cdot \text{sen } \theta .$$

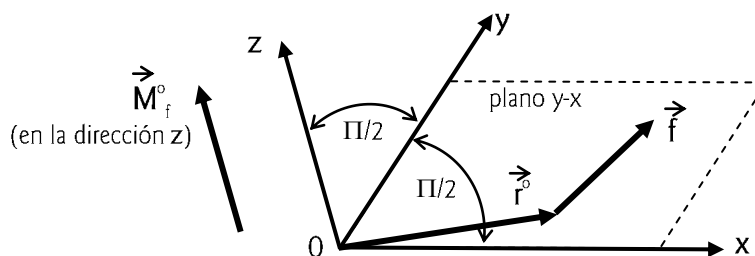
Para entender de dónde surge la necesidad de definir esta nueva magnitud, presentaremos a la causa que es capaz de modificar al ímpetu angular.

Se define como *momento de una fuerza  $\vec{f}$  respecto de un punto "0"* al producto vectorial :

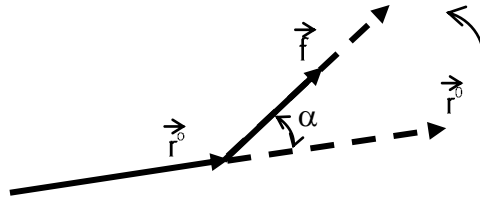
$$\vec{M}_f^o = \vec{r}^o \wedge \vec{f}$$

en donde  $\vec{M}_f^o$  es un "vector" perpendicular (como sucede en todos los productos vectoriales) al plano formado por los vectores  $\vec{r}^o$  y  $\vec{f}$ .

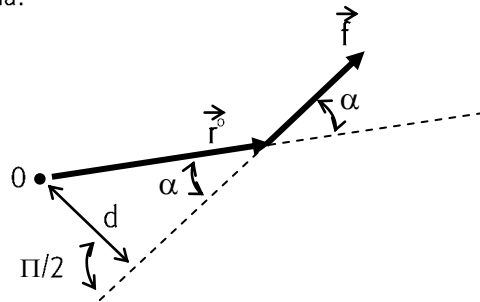
[ Las comillas se deben a que  $\vec{M}_f^o$  y  $\vec{L}^o$  también se llaman *pseudovectores* ya que sus sentidos dependen caprichosamente de una convención ]



Suele tomarse al sentido de la figura como positivo; surge de la aplicación de la "Ley del Tirabuzón": la fuerza  $\vec{f}$  tiende a girar alrededor de 0 en el plano  $y - x$  haciendo avanzar al tirabuzón en la dirección  $y$  el sentido de  $z$ . Por otra parte, si se "rebate" al vector posición sobre el vector fuerza, también se obtiene el sentido del vector  $\vec{M}_f^o$ , aplicando la misma ley:

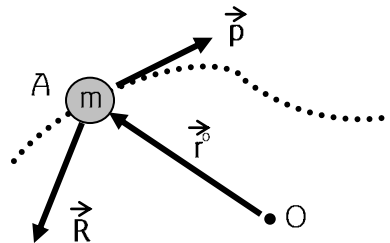


El módulo del vector  $\vec{M}_f^o$  se obtiene haciendo:  $r^o \cdot f \cdot \text{sen } \alpha$ . Obsérvese que  $r^o \cdot \text{sen } \alpha$  equivale a  $d$ , distancia tomada desde  $O$  a la recta de acción de la fuerza  $\vec{F}$ , en la dirección perpendicular a la misma:



Esto es importante a tener en cuenta porque justifica que ninguna fuerza genera momento (o tendencia al giro) respecto a algún punto ubicado sobre su recta de acción.

Imaginemos ahora que sobre una partícula actúan varias fuerzas variables, bajo las cuales la partícula describe una trayectoria curva. En el instante en que la partícula pasa por  $A$ , posee un ímpetu lineal  $\vec{p}$  y la suma de las fuerzas que actúan sobre ella es  $\vec{R}$ :



En este caso podemos escribir:

$$\vec{R} = d\vec{p}/dt$$

$$\vec{M}_R^o = \vec{r}^o \wedge \vec{R} = \vec{r}^o \wedge (d\vec{p}/dt) = d(\vec{r}^o \wedge \vec{p})/dt$$

La última igualdad surge de:  $d(\vec{r}^o \wedge \vec{p})/dt = (d\vec{r}^o/dt) \wedge \vec{p} + \vec{r}^o \wedge (d\vec{p}/dt) = \vec{r}^o \wedge (d\vec{p}/dt)$

dado que:  $(d\vec{r}^o/dt) \wedge \vec{p} = 0$ , porque  $d\vec{r}^o/dt = \vec{v}$   $\therefore \vec{v} \wedge m \cdot \vec{v} = 0$

Ahora, justificando la definición  $\vec{r}^o \wedge \vec{p} = \vec{L}^o$ , finalmente resulta:

$$\vec{M}_R^o = d\vec{L}^o/dt$$

Y aquí aparece la nueva ley de conservación: si no hay momento de fuerzas (o si la suma vectorial de los momentos es igual a 0), el ímpetu angular de la partícula se conserva - la derivada de una constante es cero -

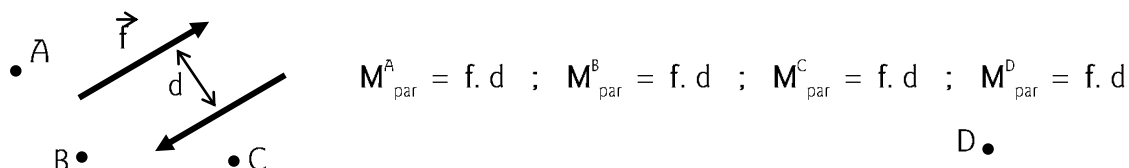
Habría que demostrar que:

$$\vec{M}_R^0 = \vec{M}_{F_1}^0 + \vec{M}_{F_2}^0 + \vec{M}_{F_3}^0 + \dots + \vec{M}_{F_n}^0, \text{ si } \vec{R} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \dots + \vec{f}_n$$

Pero esto es sencillo a partir de un diagrama de fuerzas y de un punto "0" cualquiera.

*¡Inténtalo!*

También puedes demostrar que el momento de un "par" (o "cupla") de fuerzas paralelas, de igual módulo pero de distinto sentido, equivale al producto del módulo de una de ellas por la distancia que las separa, cualquiera que sea el punto respecto del que se tome el momento:



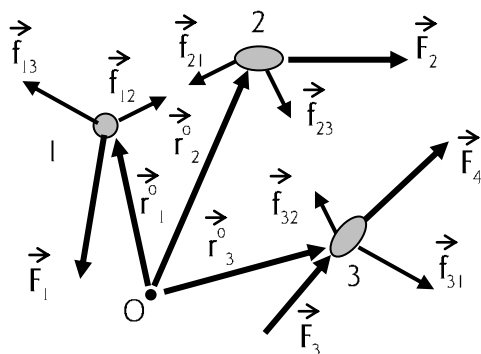
En cuanto a las unidades de medida de **M** y **L**, éstas surgen de sus definiciones:

$$[M] = [F] \cdot [d] = N \cdot m$$

$$[L] = [r] \cdot [m] \cdot [v] = kg \cdot m^2 / s$$

$$\vec{M} = f(\vec{L}) \text{ EN UN SISTEMA DE PARTÍCULAS}$$

Tomemos a las partículas 1, 2 y 3 como "sistema", y supongamos que sobre éste actúan fuerzas externas que nominaremos con letras mayúsculas, y que entre las partículas existen fuerzas que llamaremos "internas", representadas por  $\vec{f}_{ij}$ .



Para cada partícula vale:  $\vec{M}_R^0 = d\vec{L}^0/dt$   
(donde "O" es un punto de referencia)

Luego:

$$\vec{M}_{F_1}^0 + \vec{M}_{f_{12}}^0 + \vec{M}_{f_{13}}^0 = d\vec{L}_1^0/dt$$

$$\vec{M}_{F_2}^0 + \vec{M}_{f_{21}}^0 + \vec{M}_{f_{23}}^0 = d\vec{L}_2^0/dt$$

$$\vec{M}_{F_3}^0 + \vec{M}_{F_4}^0 + \vec{M}_{f_{31}}^0 + \vec{M}_{f_{32}}^0 = d\vec{L}_3^0/dt$$

Si sumamos miembro a miembro, solo quedan en el primer miembro los momentos de las fuerzas externas, dado que los momentos de los pares acción-reacción de las fuerzas internas se anulan. Entonces:

$$\underline{\underline{\sum \vec{M}_{F_e}^0}} = d\vec{L}_1^0/dt + d\vec{L}_2^0/dt + d\vec{L}_3^0/dt = d(\overbrace{\vec{L}_1^0 + \vec{L}_2^0 + \vec{L}_3^0}^{\vec{L}_{sis}^0})/dt = \underline{\underline{d\vec{L}_{sis}^0/dt}}$$

∴ La Ley de Conservación del Ímpetu Angular de un Sistema de Partículas se anuncia:

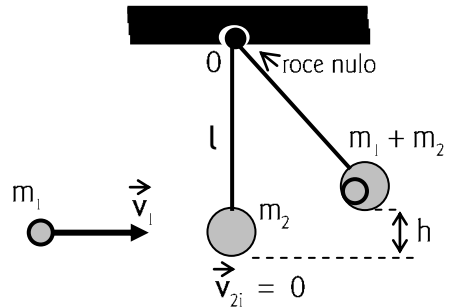
*El ímpetu angular de un sistema de partículas se mantiene constante si la suma de los momentos de las fuerzas que operan externamente sobre el sistema vale 0.*

Naturalmente, los momentos y el ímpetu angular deben estar referidos al mismo punto. Y los momentos que tienden a girar al sistema hacia un lado tienen todos el mismo signo, positivo o negativo, según la convención adoptada.

**Ejemplo 100**

Una partícula de masa  $m_2$  está sujeta a una varilla rígida de masa nula y longitud  $l$ , en reposo, que puede oscilar libremente colgada del techo.

Calcular la altura máxima alcanzada por este péndulo, si la masa  $m_2$  es golpeada en un choque plástico por una partícula de masa  $m_1$  que avanza horizontalmente con velocidad  $\vec{v}_1$ .



Solución:

Si consideramos a las masas que chocan como puntuales, vemos que tanto un instante antes como un instante después del choque el momento de las fuerzas externas respecto del punto 0 es cero.

Si:  $\sum \vec{M}_{Fex}^0 = 0$ ,  $\vec{L}_{sis}^0 = cte.$   $\implies \vec{L}_{sis\ i}^0 = \vec{L}_{sis\ f}^0$

$\vec{L}_{sis\ i}^0 = \vec{l} \wedge \vec{p}_{1i} + \vec{l} \wedge \vec{p}_{2i}^0$   $\implies L_{sis\ i}^0 = l \cdot m_1 \cdot v_1 \cdot \text{sen } \Pi/2$

$\vec{L}_{sis\ f}^0 = \vec{l} \wedge \vec{p}$   $\implies L_{sis\ f}^0 = l \cdot (m_1 + m_2) \cdot v \cdot \text{sen } \Pi/2$

$l \cdot m_1 \cdot v_1 \cdot \text{sen } \Pi/2 = l \cdot (m_1 + m_2) \cdot v \cdot \text{sen } \Pi/2 \implies v = v_1 \cdot m_1 / (m_1 + m_2)$

Aplicando el teorema Trabajo – Energía, se obtiene:

$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot v^2 = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot h$

$h = [m_1 / (m_1 + m_2)]^2 \cdot v_1^2 / 2g$

### Experiencias sencillas

\* Puedes comprobar aproximadamente la veracidad de  $\vec{p}_{\text{sis}} = \text{cte.}$  con una experiencia “explosiva”, como la del ejemplo de la *página 169*. Si consigues dos autitos iguales, del mismo peso (igual masa), el CM del conjunto, incluyendo al resorte comprimido ubicado entre ambos, está quieto, en el medio, cuando el sistema se encuentra en reposo ( $\vec{p}_{\text{sis}} = 0$ ). Ahora, si cortas con el fuego de un fósforo al hilo que los unía, verás que los autitos avanzan prácticamente el mismo trecho, uno en un sentido y el otro en sentido opuesto:  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \therefore m \cdot \mathbf{v}_1 = m \cdot \mathbf{v}_2$ , con lo que  $\vec{p}_{\text{sis}} = 0$ , igual que antes (se conservó); la velocidad del CM siguió siendo 0 porque no hubo fuerzas horizontales externas que lo aceleraran.

Si ahora cargas a un autito de manera que su peso sea el doble al del otro,  $m_1 = 2m_2$ , por ejemplo, verás que, aproximadamente,  $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{v}_2$ , por la diferencia de avances entre ambos. Se cumple nuevamente:  $m_1 \cdot \mathbf{v}_1 = m_2 \cdot \mathbf{v}_2$ . Luego,  $\vec{p}_{\text{sis}} = 0$ , igual que antes.

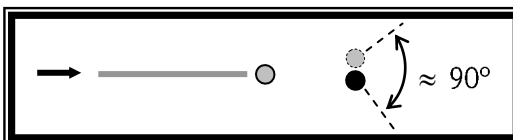
\* En cuanto a choques unidimensionales prácticamente elásticos entre dos partículas, se pueden verificar experimentalmente (con muy buena aproximación) las ecuaciones de la *página 146* usando bolitas de acero, de aluminio, de cobre ...

Apoyándolas sobre un riel de aluminio horizontal, de manera que podamos asegurarnos el choque en una dimensión, apreciaremos cómo la más liviana rebota hacia atrás si



choca contra la más pesada, detenida, mientras que la que estaba en reposo arranca con baja velocidad. Invertiendo la situación, si la que avanza es la pesada y está detenida la liviana, es ésta última la que se apura hacia adelante mientras que la pesada sigue en el mismo sentido, a menor velocidad.

\* Las bolas de billar son elásticas. Si con el palo golpeas a una de ellas justo en su centro (para evitar que salga “con efecto”) con la intención de que golpee a otra detenida, puedes observar en la mesa de billar que después de la colisión salen más o menos a  $90^\circ$ . Marca en la mesa el punto en el que chocan y los puntos en donde luego tocan las respectivas bandas.



\* En cuanto a masa variable, desde niño vienes practicando algo de “cohetería”. Si inflas un globo y sostienes su boca cerrada delante de tu cara, para luego soltarlo, el globo sale despedido hacia adelante a la vez que sientes sobre tu rostro el aire que expele. Es acción y reacción: dos fuerzas de la misma magnitud, igual dirección y sentido contrario; dos fuerzas que actúan, naturalmente sobre distintos cuerpos: globo sobre el aire que contenía y *aire* sobre el globo.

Pero no agotes la experiencia en soltar el globo. Trata de colocarle un anillito muy liviano (fabricado con hilo, por ejemplo) de manera que al soltar el aire del globo se vea obligado a salir por una boca más pequeña. Hazlo y observa si la velocidad con la que sale el “cohete” - globo es la misma que cuando lo sueltas sin el anillito. Piensa qué sucede.

# **CUERPO RÍGIDO**



## CUERPO RÍGIDO

Se llama Cuerpo Rígido (CR) a un cuerpo que no se deforma bajo la acción de fuerzas a las que está sometido, cualquiera sea la intensidad de las mismas. El CR se considera como un sistema compuesto por infinidad de partículas infinitamente pequeñas, en el que, bajo fuerzas externas, se mantienen invariables las distancias entre sus partes.

Desde ya, esto es una idealización, puesto que no existe cuerpo alguno con estas características. Si bien muchísimos objetos se comportan prácticamente como cuerpos rígidos cuando están sometidos a fuerzas dentro de un determinado rango de valores.

Y puesto que se trata de un sistema de partículas, valen las ecuaciones:

$$\boxed{\sum \vec{M}_{\text{ext}}^0 = \sum \vec{M}^0 = d\vec{L}^0/dt}$$

$$\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = d\vec{p}/dt}$$

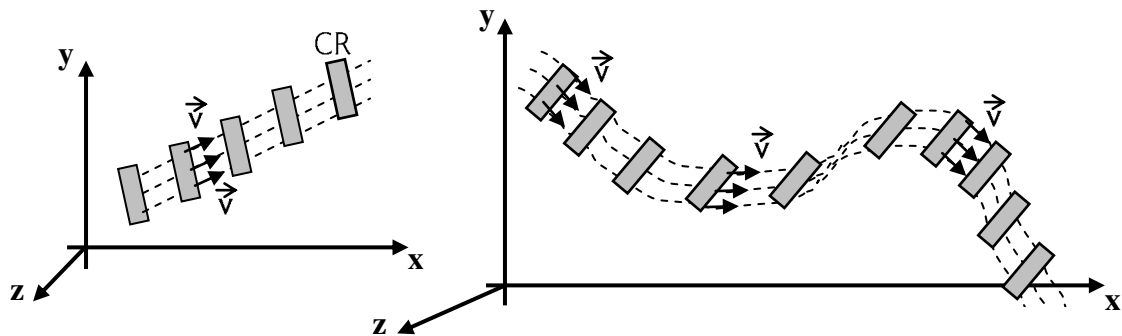
donde "0" es un punto por el que pasa un eje fijo en un Sistema Inercial (SI), y  $\vec{p}$  es el Ímpetu Lineal del Sistema CR:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}_{\text{CM}} \quad m: \text{ masa del CR}$$

Los objetos ocupan un espacio tridimensional. Pero para simplificar el estudio, comenzaremos analizando el movimiento de cuerpos rígidos chatos (que llamaremos también "chapas") en el plano.

### TRASLACIÓN PURA

Se llama así al movimiento en el cual todos los puntos, en un instante dado, tienen la misma velocidad respecto del mismo Sistema de Referencias. El cuerpo no necesariamente tiene que estar moviéndose sobre una recta, como ilustran las siguientes figuras:

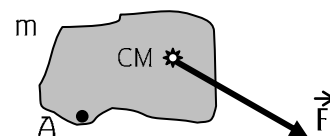


Entonces: si el CR se mueve manteniendo su orientación, sin rotar, decimos que se *traslada*.

Si en algún instante se conoce la aceleración y la velocidad de un punto del CR que se traslada, automáticamente se conocen la aceleración y la velocidad de cualquier otro punto.

### Ejemplo 101

Sobre la chapa de la figura, en reposo, se aplica la fuerza  $\vec{F}$ , constante, en su Centro de Masas. Hallar la velocidad del punto A al cabo del tiempo t de acción de  $\vec{F}$ .

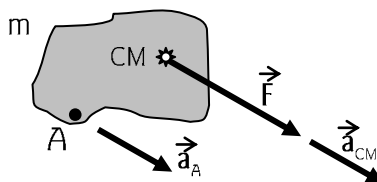




Solución:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{CM} = \vec{F} / m$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CM} = \vec{a}_{CM} \cdot t = \vec{F} \cdot t / m$$

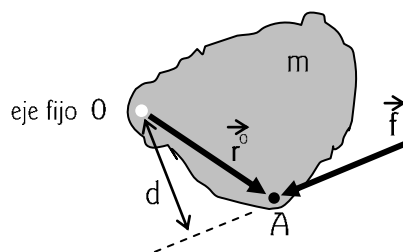


Más adelante veremos por qué la dirección de  $\vec{F}$  debe pasar por el CM para que suceda que  $\vec{v}_{CM} = \vec{v}_A = \vec{v}_B = \dots$ , (si el cuerpo no venía rotando).

ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO ALREDEDOR DE UN EJE FIJO EN UN S.I.

Tomemos un cuerpo de masa  $m$  en el plano de este papel, y supongamos que puede moverse libremente alrededor de un eje perpendicular al papel, que pasa por el punto  $O$ . Apliquemos ahora en el punto  $A$  una fuerza  $\vec{f}$ , coplanar, y calculemos el momento de  $\vec{f}$  y el ímpetu angular de  $m$  respecto de  $O$ .

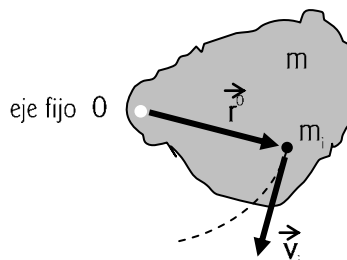
$$\vec{M}_f^O = \vec{r}^O \wedge \vec{f} \implies M_f^O = f \cdot d$$



En cuanto al ímpetu angular  $\vec{L}^O$ , éste resulta ser el ímpetu angular de un sistema de partículas de masitas  $m_i$  que componen al CR. Las masitas giran alrededor de  $O$  con la misma velocidad angular  $\omega$ , aunque con distintas velocidades tangenciales por no estar ubicadas a la misma distancia respecto del eje que pasa por  $O$ .

$$\vec{L}^O = \sum \vec{L}_i^O = \sum (\vec{r}_i^O \wedge \vec{p}_i)$$

$$\vec{M}_f^O = \vec{r}^O \wedge \vec{f}$$



Por ser todos los vectores  $\vec{L}_i^O$  perpendiculares al plano del cuerpo rígido  $m$  (perpendiculares a este papel), vale:

$$L^O = \sum L_i^O = \sum r_i^O \cdot p_i \cdot \text{sen } \pi/2 = \sum r_i^O \cdot p_i =$$

$$= \sum r_i^O \cdot m_i \cdot v_i = \sum r_i^O \cdot m_i \cdot (\omega \cdot r_i^O) = \omega \cdot \sum [m_i \cdot (r_i^O)^2] \quad \therefore \boxed{L^O = \omega \cdot I^O}$$

A la sumatoria  $\sum [m_i \cdot (r_i^O)^2]$  le damos una identidad y la llamamos  $I^O$ . Si observamos bien la figura y analizamos esta expresión, veremos que estamos refiriéndonos a cómo está distribuida la masa en torno de "O". Y entonces, si esta distribución se vincula al ímpetu angular y éste se modifica con fuerzas (con momento de fuerzas), resulta que hace falta una elevada acción de estas fuerzas para lograr cierto ímpetu angular de un CR cuya distribución de masas es tal que  $I^O$  sea elevada:  $\sum \vec{M}^O = dL^O/dt = d(\omega I^O)/dt$ .

En otras palabras, cuanto más grande sea  $I^O$  (más alejada la masa del eje que pasa por "O"), más nos va a "costar" acelerar al cuerpo rígido en torno de "O". Por eso a  $I^O$  se lo llama "momento de inercia", asociando ideas con el Principio de Inercia, de Newton.

La unidad de medida del momento de inercia es:  $[I] = [m] \cdot [x]^2 = \text{kg} \cdot \text{m}^2$ , en el S. I.

Está claro que el “momento de inercia” es una magnitud *escalar*, muy distinta a la magnitud *vectorial* “momento de una fuerza”.

Veamos ahora cómo se calcula el ímpetu angular de más de un CR, o, en todo caso, de un CR conformado por dos masas puntuales unidas por una barra rígida de masa despreciable, girando el conjunto en torno de un eje E perpendicular a la barra:

$$\vec{L}^E = \vec{L}_1^E + \vec{L}_2^E$$

$$\left[ \begin{aligned} \underline{L}^E &= L_1^E + L_2^E = r_1^E \cdot p_1 + r_2^E \cdot p_2 = \\ &= r_1^E \cdot m_1 \cdot v_1 + r_2^E \cdot m_2 \cdot v_2 = \\ &= \underbrace{[(r_1^E)^2 \cdot m_1 + (r_2^E)^2 \cdot m_2]}_{I^E} \cdot \omega = \underline{I^E} \cdot \omega \end{aligned} \right]$$

¿ Y qué relación existe entre el ímpetu angular de un cuerpo rígido de masa m relativo a un eje E cualquiera y el ímpetu angular del mismo CR relativo al eje paralelo que pasa por el CM, a una distancia d? (Ver “Steiner” más adelante.)

$$L^E = I^E \cdot \omega = (I^{CM} + m \cdot d^2) \cdot \omega = I^{CM} \cdot \omega + m \cdot d^2 \cdot \omega = L^{CM} + d \cdot m \cdot v_{CM}$$

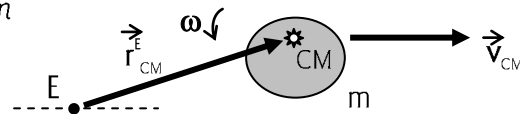
Se puede demostrar que la ecuación escalar anterior es un caso particular. La ecuación general, inclusive cuando el eje E se traslada con velocidad constante, es vectorial:

$$\vec{L}^E = \vec{L}^{CM} + \vec{r}_{CM}^E \wedge m \cdot \vec{v}_{CM}$$

en la que  $\vec{L}^{CM}$  se llama *spin*, y el término  $\vec{r}_{CM}^E \wedge m \cdot \vec{v}_{CM}$  es el *ímpetu angular orbital*.

Si un CR gira sobre sí mismo y se traslada, vale la anterior.

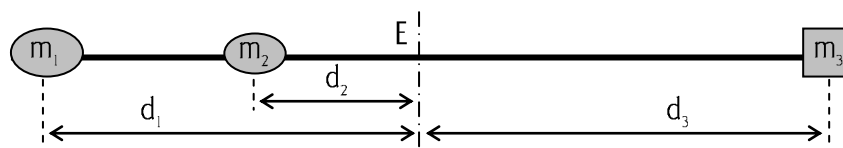
Por ejemplo, en el caso de la figura hay un *spin* saliente al papel, y un *ímpetu angular orbital* entrante al papel. Se deben sumar vectorialmente.



### CÁLCULOS DE MOMENTOS DE INERCIA

#### Ejemplo 102

Calcular el momento de inercia del siguiente cuerpo rígido compuesto por las masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  unidas por una barra sin masa, respecto del eje E.



Solución:

Obsérvese que, por definición, el momento de inercia es siempre positivo (depende de  $x^2$ ) . Por lo tanto no importa cómo se encuentren las masas respecto del eje E ; simplemente se suman los productos  $m \cdot x^2$  :

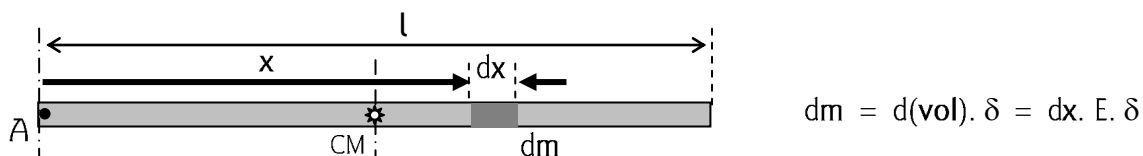
$$I^E = m_1 \cdot d_1^2 + m_2 \cdot d_2^2 + m_3 \cdot d_3^2$$

.....

**Ejemplo 103**

Calcular el momento de inercia de una varilla homogénea, delgada, respecto de un eje que pasa perpendicularmente a la misma por: a) uno de sus extremos (A) ; b) su CM (ubicado en el centro geométrico). La varilla tiene una masa  $m$  , una sección  $E$  , una densidad  $\delta$  y una longitud  $l$  .

Solución:



a) 
$$I^A = \int_0^{l/2} dm \cdot x^2 = \int_0^{l/2} dx \cdot E \cdot \delta \cdot x^2 = E \cdot \delta \cdot [l^3/3] = (E \cdot \delta \cdot l) \cdot l^2/3 = m \cdot l^2/3$$

b) 
$$I^{CM} = 2 \int_0^{l/2} dm \cdot x^2 = 2 \int_0^{l/2} dx \cdot E \cdot \delta \cdot x^2 = 2/3 E \cdot \delta \cdot (l/2)^3 = m \cdot l^2/12$$

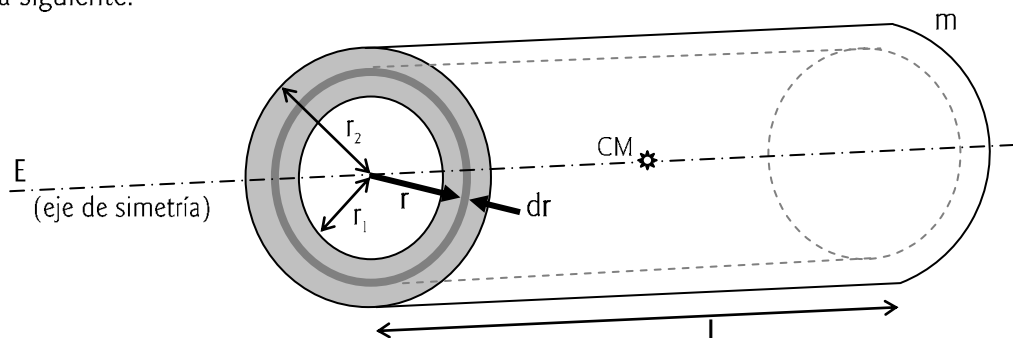
.....

**Ejemplo 104**

Calcular el momento de inercia de un cilindro hueco de masa  $m$  , longitud  $l$  , densidad  $\delta$  y radios  $r_1$  y  $r_2$  , respecto del eje de simetría del cilindro.

Solución:

Aquí se tomará como  $dm$  a una masita con forma de rollo de “película” (cilindro concéntrico con el que analizamos) de pared  $dr$  . Esto es porque entonces sólo habrá que “sumar” los productos  $dm \cdot r^2$  de las otras infinitas películas también concéntricas, como se señala en la figura siguiente:



$$I^E = \int_{r_1}^{r_2} dm \cdot r^2 = \int_{r_1}^{r_2} \delta \cdot d(\text{vol}) \cdot r^2 = \int_{r_1}^{r_2} \delta \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot dr \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot l \cdot \delta \cdot [r^4/4] =$$

$$= (\pi \cdot l \cdot \delta) \cdot (r_2^4 - r_1^4) / 2 = (\pi \cdot l \cdot \delta) \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot (r_2^2 + r_1^2) / 2 = 1/2 m \cdot (r_2^2 + r_1^2)$$

Si el cilindro es macizo ( $r_1 = 0$ ), y llamamos  $R$  al radio, resulta:

$I^E = 1/2 m \cdot R^2$
-------------------------

Si el cilindro es hueco ( $r_1 \approx r_2 = R$ ), resulta:

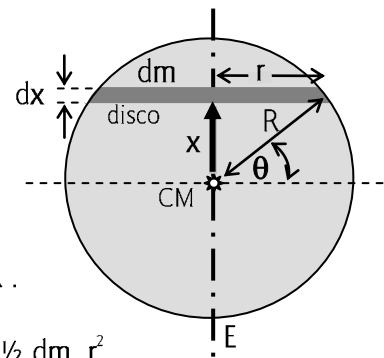
$I^E = m \cdot R^2$
---------------------

.....

Una polea por la cual pasa alguna sogá será considerada en lo que sigue como un cilindro chato, macizo, despreciando el aporte que hubiera hecho al momento de inercia el material faltante de la canaleta. Por otra parte, un anillo o un aro pueden tomarse como cilindros huecos porque, como puede apreciarse en el resultado obtenido, los momentos de inercia de los cilindros macizo y hueco no dependen de los tamaños de los objetos, sino de cómo está distribuida la masa del cuerpo en torno al eje respecto del cual gira.

**Ejemplo 105**

Calcular el momento de inercia de una esfera maciza de masa  $m$  y radio  $R$  respecto de uno de los ejes que pasa por su CM.



Solución:

Imaginaremos a la esfera compuesta por delgadas rodajas cilíndricas  $dm$ , de espesor  $dx$  y radio  $r$  variable desde 0 a  $R$ . El momento de inercia de cada rodaja respecto al eje  $E$  que pasa perpendicularmente por su centro geométrico es:  $dI^E = 1/2 dm \cdot r^2$ .

$$I^E = \int_{-R}^{+R} dI^E = \int_{-R}^{+R} 1/2 dm \cdot r^2 = 2 \cdot \int_0^{+R} 1/2 \delta \cdot d(\text{vol}) \cdot r^2 = 2 \cdot \int_0^{+R} 1/2 \delta \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dx \cdot r^2 =$$

$$= \pi \cdot \delta \cdot \int_0^{+R} (R^2 - x^2) \cdot (R^2 - x^2) \cdot dx = \pi \cdot \delta \cdot \int_0^{+R} (R^4 - 2R^2x^2 + x^4) \cdot dx =$$

$$= \pi \cdot \delta \cdot [R^5 - (2/3)R^5 + (1/5)R^5] = (8/15) \pi \cdot \delta \cdot R^5$$

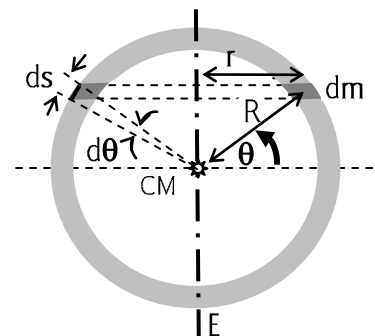
Considerando que el volumen de la esfera es  $4/3 \pi \cdot R^3$ , resulta:

$I^E \equiv I^{CM} = 2/5 m \cdot R^2$
---------------------------------------

.....

**Ejemplo 106**

Calcular el momento de inercia de una esfera hueca de masa  $m$ , radio  $R$  y espesor  $A$ , respecto de uno de los ejes que pasa por su centro de masas.



Solución:

Imaginaremos a la esfera compuesta por delgados aros de masa

dm, espesor A, ancho ds y radio r, variable desde 0 a R. El momento de inercia de cada aro respecto al eje que pasa perpendicularmente por su centro es:  $dl^E = dm \cdot r^2$  (véase el ejemplo del cilindro hueco).

$$\begin{aligned}
 I^E &= \int dl^E = \int dm \cdot r = \int \delta \cdot d(\text{vol}) \cdot r^2 = \int 2 \cdot \delta \cdot \pi \cdot r \cdot A \cdot ds \cdot r^2 = \\
 &= 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \pi \cdot \delta \cdot 2 \cdot r \cdot A \cdot \underbrace{R \cdot d\theta}_{ds} \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot \delta \cdot A \cdot R \cdot \int_0^{\pi/2} r^3 \cdot d\theta = 4 \cdot \pi \cdot \delta \cdot A \cdot R \cdot \int_0^{\pi/2} R^3 \cdot \cos^3 \theta \cdot d\theta = \\
 &= 4 \cdot \pi \cdot \delta \cdot A \cdot R^4 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta = 4 \cdot \pi \cdot \delta \cdot A \cdot R^4 \cdot \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta) \cdot d(\sin \theta) = \\
 &= 4 \cdot \pi \cdot \delta \cdot A \cdot R^4 \cdot \left[ \sin \theta \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi/2} \right] = 4 \cdot \pi \cdot \delta \cdot A \cdot R^4 \cdot \left[ 1 - \frac{1}{3} \right]
 \end{aligned}$$

Considerando que la superficie de la esfera es  $4 \pi \cdot R^2$ , resulta:

$$I^E \equiv I^{CM} = \frac{2}{3} m \cdot R^2$$

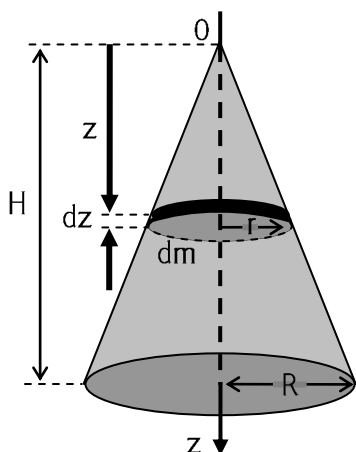
.....

### Ejemplo 107

Calcular el momento de inercia de un cono macizo de masa m y altura H respecto de su eje de simetría (pasa por el vértice, y es perpendicular a la base circular de radio R).

Solución:

Tendremos en cuenta que:  $r/z = R/H$ ; volumen del cono =  $\pi \cdot R^2 \cdot H/3$ .



$$\begin{aligned}
 I^z &= \int dl^z = \int_0^H dm \cdot r^2 / 2 = \int_0^H \delta \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dz \cdot r^2 / 2 = \\
 &= (\delta \cdot \pi / 2) \cdot \int_0^H r^4 \cdot dz = (\delta \cdot \pi / 2) \cdot \int_0^H (z \cdot R / H)^4 \cdot dz = \\
 &= (\delta \cdot \pi / 2) \cdot R^4 / H^4 \int_0^H z^4 \cdot dz = [(\delta \cdot \pi / 2) R^4 / H^4] \cdot H^5 / 5
 \end{aligned}$$

∴

$$I^z = 3 \cdot m \cdot R^2 / 10$$

.....

### Ejemplo 108

Calcular el momento de inercia de una moneda (cilindro chato) de masa m, radio R y espesor E respecto de uno de los ejes contenidos en su plano, que pasa por su CM.

Solución:

En primera instancia calcularemos este momento de inercia suponiendo al cilindro chato compuesto por infinitas varillas delgadas de espesor  $E$  y longitud variable entre  $0$  y  $R$ . A continuación resolveremos el mismo caso en forma mucho más sencilla aplicando un teorema que se demostrará previamente.

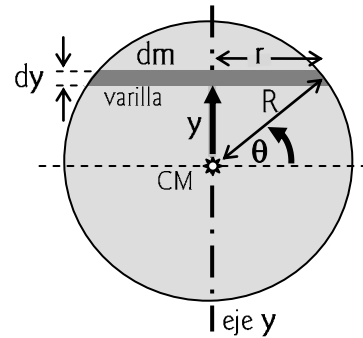
$$I^y = \int dI^y = 2 \int dm \cdot (2r^2)/12 = 2/3 \int dm \cdot r^2 =$$

$$= 2/3 \int \delta \cdot 2 \cdot r \cdot E \cdot dy \cdot r^2$$

$$r = R \cdot \cos \theta ; y = R \cdot \sin \theta \implies dy = R \cdot \cos \theta \cdot d\theta$$

$$I^y = 4/3 \delta \cdot E \cdot \int (R \cdot \cos \theta)^3 \cdot dy = 4/3 \delta \cdot E \cdot R^4 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \cdot d\theta =$$

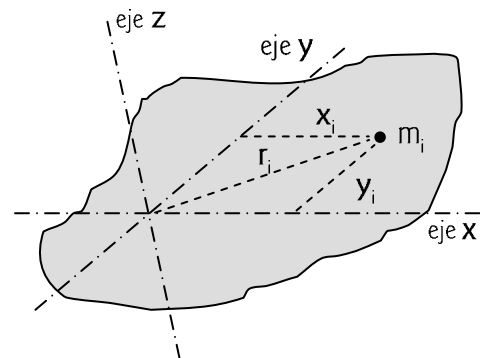
$$= 4/3 \delta \cdot E \cdot R^4 \cdot (3\pi/16)$$



$$I^y = I^{CM} = m \cdot R^2/4$$

**TEOREMA DE LA FIGURA PLANA**

Sea un cuerpo rígido con forma de chapa o figura plana. Si se toman los ejes  $x$  e  $y$  perpendiculares entre sí en el plano de la figura, se demuestra que:  $I^x + I^y = I^z$ , en donde  $z$  es un eje perpendicular a dicho plano.



Demostración:

Si  $m_i$  es una particulita del CR, resulta:

$$I^x = \sum m_i \cdot y_i^2 \qquad I^y = \sum m_i \cdot x_i^2$$

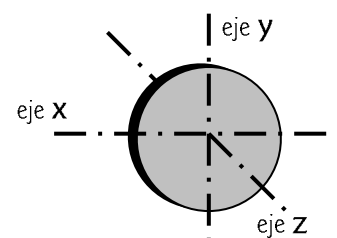
$$I^z = \sum m_i \cdot r_i^2 = \sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i \cdot x_i^2 + \sum m_i \cdot y_i^2 = I^y + I^x$$

**Ejemplo 109**

Teniendo en cuenta el Teorema de la Figura Plana, calcular el momento de inercia de una moneda respecto de un eje coplanar con la misma que pasa por su CM, y comparar el resultado con el del *Ejemplo 108*.

Solución:

Si  $x$  e  $y$  son ejes coplanares, y  $z$  es un eje perpendicular, valen las ecuaciones:



$$I^z = I^y + I^x \quad ; \quad I^z = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \quad (\text{cilindro macizo chato - página 166 -})$$

Por simetría:  $I^y = I^x \quad \therefore \quad I^z = 2I^y = 2I^x$

Entonces:  $\frac{1}{2} m \cdot R^2 = 2 \cdot I^y = 2 \cdot I^x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{4} m \cdot R^2 = I^y = I^x}$

Esto significa que, curiosamente, “cuesta” más acelerar a un cilindro chato alrededor de un eje perpendicular al mismo que alrededor de un eje contenido en su plano (cuesta el doble). Aunque esto sea difícil de comprobar en la práctica con la tapa de una olla, por ejemplo, apoyada sobre una mesa: el aire circundante ofrece una resistencia más grande cuando la rotación es alrededor de un eje coplanar (tapa de olla apoyada verticalmente sobre la mesa) que cuando lo es respecto de un eje perpendicular al plano de la tapa.

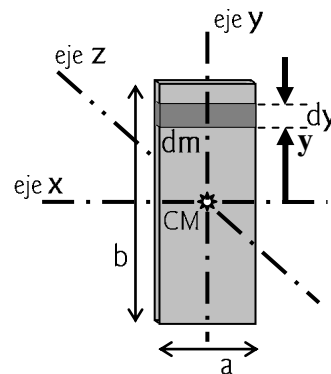
.....

**Ejemplo 110**

Calcular el momento de inercia de un prisma chato de masa  $m$  y dimensiones  $a$ ,  $b$  y espesor  $E$  respecto de distintos ejes que pasan por su centro de masas.

Solución :

Si tomamos a los ejes  $x$  e  $y$  en el plano del prisma, y al eje  $z$  perpendicular al mismo, es evidente que el momento de inercia respecto de  $x$  tendrá, por simetría, la misma expresión que el momento de inercia respecto del eje  $y$ . Si calculamos  $I^x$  o  $I^y$ , utilizando el teorema de la figura plana resulta sencillo obtener  $I^z$ .



$$I^x = 2 \cdot \int_0^{b/2} dI^x = 2 \cdot \int_0^{b/2} dm \cdot Y^2 = 2 \cdot \int_0^{b/2} a \cdot E \cdot \delta \cdot dy \cdot y^2 =$$

$$= 2 \cdot a \cdot E \cdot \delta \cdot \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{b/2} = 2 \cdot a \cdot E \cdot \delta \cdot \frac{b^3}{24} \quad \therefore \quad \boxed{I^x = m \cdot b^2/12} \quad \boxed{I^y = m \cdot a^2/12}$$

$$\boxed{I^z = I^x + I^y = m \cdot b^2/12 + m \cdot a^2/12 = \frac{m \cdot (a^2 + b^2)}{12}}$$

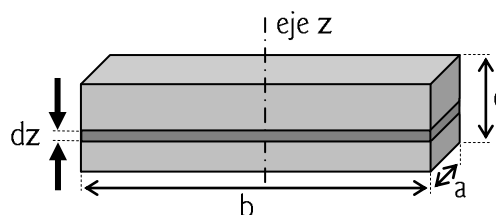
.....

**Ejemplo 111**

Calcular el momento de inercia de un ladrillo de masa  $m$  y dimensiones  $a$ ,  $b$  y  $c$ , respecto del eje  $z$ , perpendicular a la cara más grande, que pasa por su centro de masas.

Solución:

Tomaremos como  $dm$  a un prisma chato de dimensiones  $a$ ,  $b$ ,  $dz$ .

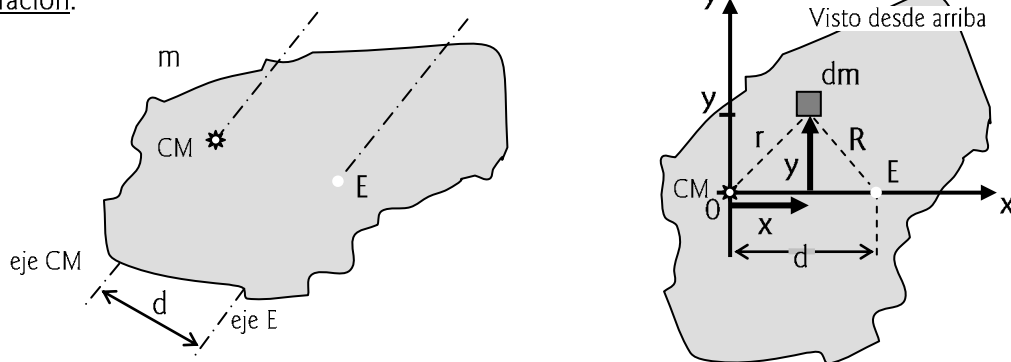


$$I^z = \int_0^c dI^z = \int_0^c dm \cdot (a^2 + b^2)/12 = \int_0^c a \cdot b \cdot \delta \cdot dz \cdot (a^2 + b^2)/12 = m \cdot (a^2 + b^2)/12$$

TEOREMA DE STEINER

“ Entre el momento de inercia de un CR respecto de un eje que pasa por su CM y el momento de inercia de ese cuerpo respecto de otro eje, paralelo al anterior y que pasa por un punto E , existe la siguiente relación:  $I^E = I^{CM} + m \cdot d^2$  en la que m es la masa del cuerpo rígido y d la distancia entre los ejes mencionados ”.

Demostración:



Los ejes x e y están en el plano del cuerpo rígido, y son perpendiculares a los ejes CM y E .

$$R^2 = (d - x)^2 + y^2$$

$$dI^{CM} = dm \cdot r^2 \qquad I^{CM} = \int dm \cdot r^2$$

$$dI^E = dm \cdot R^2 = dm \cdot [(d - x)^2 + y^2] = dm \cdot (d^2 + x^2 - 2 \cdot d \cdot x) + dm \cdot y^2$$

$$I^E = \int dm \cdot d^2 + \int dm \cdot (x^2 + y^2) - 2 \cdot d \int x \cdot dm =$$

$$= d^2 \cdot \int dm + \int dm \cdot r^2 - 2 \cdot d \cdot (\int x \cdot dm) = d^2 \cdot m + I^{CM} - 2 \cdot d \cdot (x_{CM} \cdot m)$$

Como por construcción del sistema de referencias la posición del centro de masas es CERO, el último término de la ecuación anterior vale 0 . Queda:

$$I^E = I^{CM} + m \cdot d^2$$

De lo que se deduce que el *mínimo* momento de inercia es respecto del eje que pasa por el CM . Es respecto de este eje que “cuesta” menos acelerar al cuerpo rígido.

**Ejemplo 112**

Teniendo en cuenta el Teorema de Steiner, calcular el momento de inercia de una varilla homogénea, delgada, respecto de un eje que pasa por su CM . La varilla tiene una masa m , una densidad  $\delta$  , una longitud l y una sección E .

Solución:

Si A es un punto del extremo de la varilla, hemos visto que el momento de inercia respecto de un eje que pasa por ese punto, es:  $I^A = m \cdot l^2/3$  .

$$\therefore \boxed{I^{CM} = I^A - m \cdot (l/2)^2 = m \cdot l^2/3 - m \cdot l^2/4 = m \cdot l^2/12}$$

(Este resultado coincide con el del inciso b) del Ejemplo 103 )

.....



Volviendo a la relación entre el ímpetu angular y la suma de los momentos de las fuerzas actuantes sobre un cuerpo rígido:  $\Sigma \vec{M}^O = d\vec{L}^O/dt$ , si el cuerpo rígido es plano y gira alrededor de un eje fijo "O" perpendicular al mismo, los vectores  $\Sigma \vec{M}^O$  y  $\vec{L}^O$  son del mismo sentido y de igual dirección al eje. Por lo tanto la ecuación vectorial puede escribirse como ecuación escalar  $\Sigma M^O = dL^O/dt$ , de la que se deduce:

$$\Sigma M^O = dL^O/dt = d(I^O \cdot \omega)/dt = I^O \cdot d(\omega)/dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Sigma M^O = I^O \cdot \alpha}$$

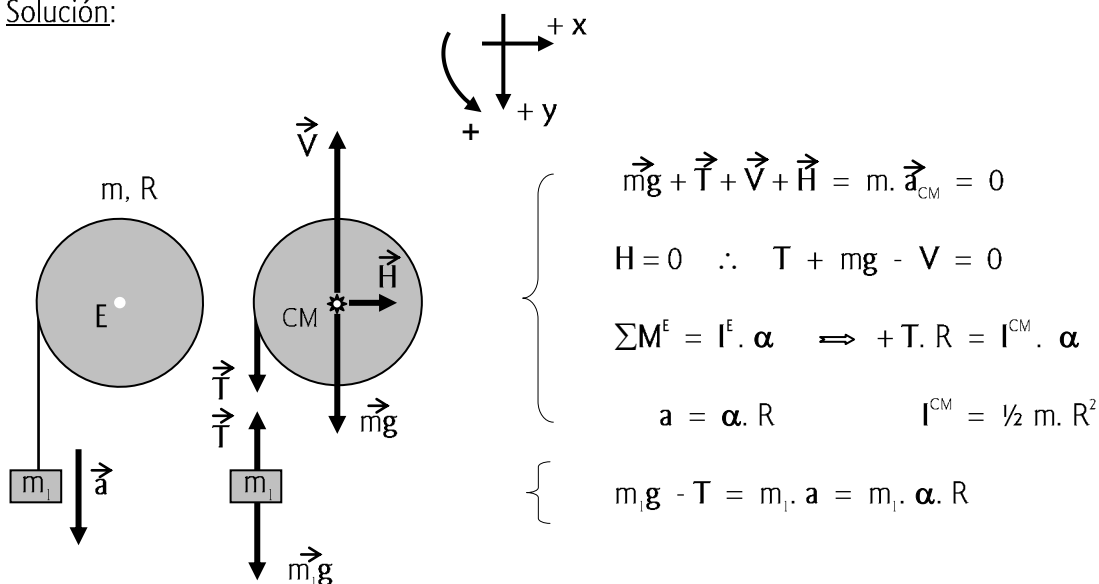
Si bien los momentos, la velocidad angular y la aceleración angular son vectores perpendiculares al plano del cuerpo rígido que gira, se indicará en lo sucesivo con una flecha curva el sentido positivo de los mismos. Si el CR se acelera en el sentido indicado por la referencia, el momento resultante y cada uno de los momentos que tengan ese sentido tendrán el mismo signo que  $\alpha$ .

.....

### Ejemplo 113

Una polea de masa  $m$  y radio  $R$ , que puede girar libremente alrededor de un eje  $E$  liso y fijo, perpendicular a su plano y que pasa por su  $CM$ , tiene enrollada una soga de la que pende una partícula de masa  $m_1$ . Calcular la aceleración angular de la polea y la fuerza que el eje realiza sobre la misma.

Solución:



Combinando estas ecuaciones se llega a:

$$\boxed{\alpha = m_1 \cdot g / [R \cdot (m_1 + m/2)]}$$

$$\boxed{V = (3 \cdot m_1 \cdot m + m^2) \cdot g / (2m_1 + m)}$$

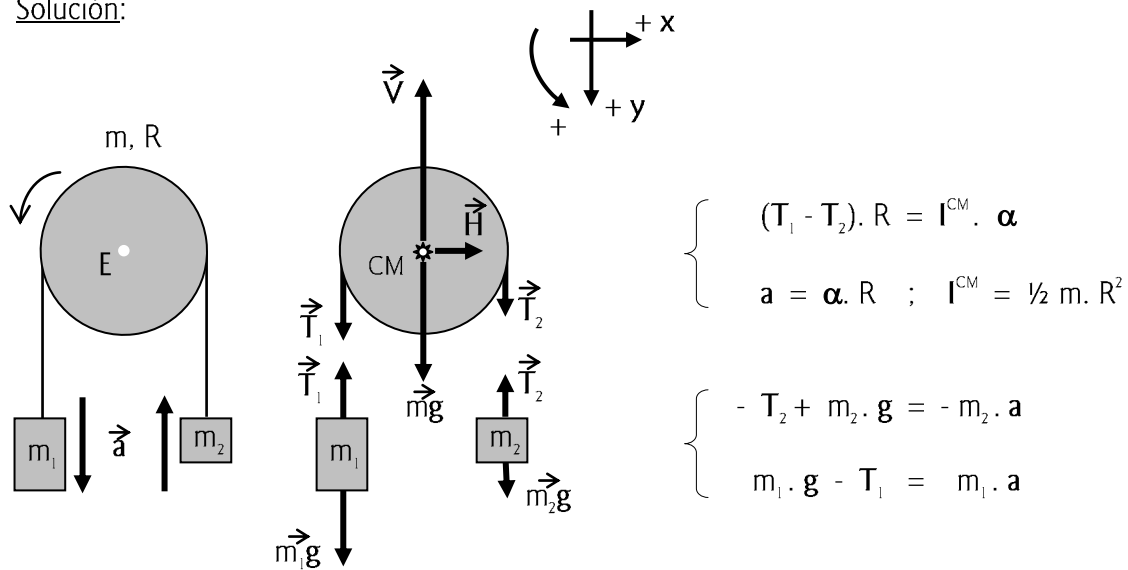
.....

### Ejemplo 114

La polea de masa  $m$  y radio  $R$  de una máquina de Atwood tiene enrollada una soga de

cuyos extremos penden dos masas:  $m_1$  y  $m_2$ . Si  $m_1 > m_2$ , y la sog a no patina sobre la p olea ni existe roce en el eje E, calcular la aceleración de las masas.

Solución:



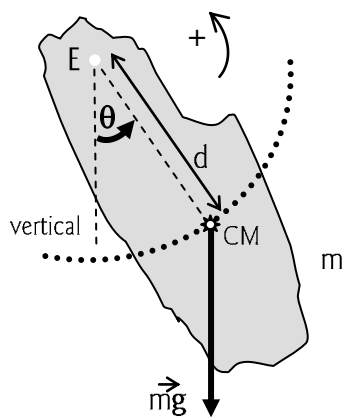
Combinando las ecuaciones:

$$a = g \cdot (m_1 - m_2) / (m_1 + m_2 + m/2)$$

### PÉNDULO FÍSICO

Cualquier cuerpo rígido colgado en forma vertical, que puede oscilar alrededor de un eje horizontal sin roce bajo la acción de la fuerza peso, constituye un péndulo físico. A diferencia del péndulo matemático o ideal ya estudiado, éste no tiene su masa concentrada en un punto sino distribuida de cualquier manera. Por ejemplo, un cuadro colgado de un clavo también es un péndulo físico que puede oscilar si se lo aparta del equilibrio.

Como lo demostraremos a continuación, se desarrolla un movimiento curvilíneo armónico simple (MCAS) cuando el CM de estos péndulos se aparta un pequeño ángulo de la vertical que pasa por el eje alrededor del cual puede oscilar, al igual que en el caso del péndulo ideal. Y el periodo T que se obtiene en estas condiciones es el mismo para los infinitos puntos de dos circunferencias concéntricas con el centro de masas.



Supongamos que el CR se aparta el ángulo  $\theta$  de la vertical. Si se lo libera en esa posición, comienza a oscilar bajo la acción de la fuerza peso que genera un momento respecto de E; la fuerza que el eje ejerce sobre el péndulo no está representada en la figura.

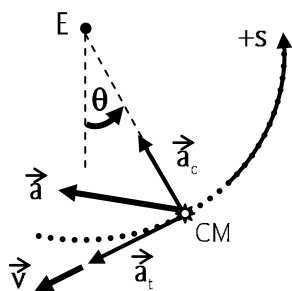
$$\text{De } \sum M^E = I^E \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad - m \cdot g \cdot d \cdot \text{sen } \theta = I^E \cdot \alpha$$

¡ Aparece una aceleración angular,  $\alpha$ , que no es constante !

¡ Cuidado: este no es un MCUV !

¡  $\alpha$  varía: depende de  $\theta$  !

Tampoco es un MCAS, porque  $a_t (= \alpha \cdot d)$  es proporcional a  $\sin \theta$ .



Pero para ángulos  $\theta$  pequeños, del orden de 1/10 de radian, puede escribirse:

$$- m \cdot g \cdot d \cdot \theta \approx I^E \cdot \alpha = I^E \cdot a_t / d$$

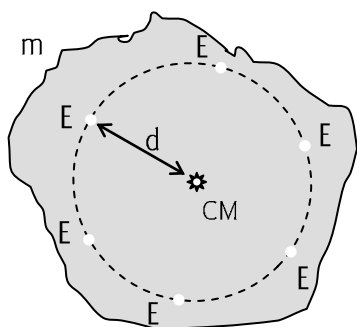
Y teniendo en cuenta que  $d \cdot \theta = s$ , resulta:

$$\underline{a_t = - [ m \cdot g \cdot d / I^E ] \cdot s = - [ \text{cte.} ] \cdot s}$$

Con lo que se concluye que para desviaciones de ese orden, o menores, se desarrolla un movimiento curvilíneo armónico simple para el que, como se viera en "péndulo ideal", la constante equivale a  $\omega^2 = (2\pi/T)^2$ . De lo que se deduce que, para pequeñas desviaciones, el péndulo físico oscila con un periodo:

$$T = 2\pi \cdot ( I^E / m \cdot g \cdot d )^{1/2}$$

Está claro que si a un CR se lo hace oscilar en estas condiciones alrededor de cualquier eje E ubicado sobre la circunferencia de radio d con centro en el CM, tendrá el mismo periodo T:

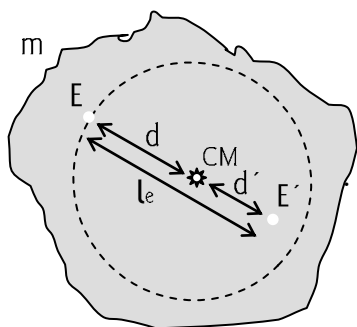


¡ Pero hay más puntos por los que se podría pasar un eje respecto del cual el péndulo tendría el mismo periodo T !

Estos puntos son los que corresponden a otra circunferencia, de radio d', concéntrica con la anterior.

Veamos cuánto debe valer d'.

A cierta distancia  $l_e$  de cualquiera de los puntos E, pasando por el CM, existe un punto E' por el que se podría pasar un eje respecto del cual el péndulo tendría el mismo periodo que respecto de E. Esta distancia  $l_e$  se llama "longitud del péndulo equivalente", porque es la longitud que debería tener un péndulo ideal con una masa m (como la del CR) ubicada en E'. Por otra parte, a E' se lo llama "centro de oscilación".



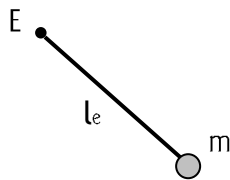
Si  $T^E = T^{E'}$ :

$$2\pi \cdot ( I^E / m \cdot g \cdot d )^{1/2} = 2\pi \cdot ( I^{E'} / m \cdot g \cdot d' )^{1/2}$$

$$( I^{CM} + m \cdot d^2 ) / d = ( I^{CM} + m \cdot d'^2 ) / d'$$

de donde:  $\boxed{d' = I^{CM} / m \cdot d}$

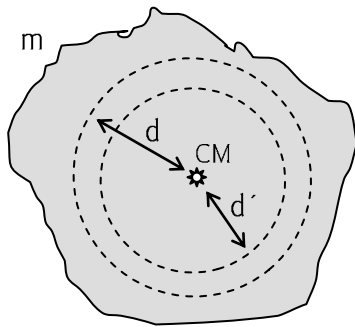
Un péndulo equivalente al péndulo físico de masa m que estamos estudiando, es el de la figura siguiente, cuyo periodo se calcula con  $T = 2\pi \cdot (l_e/g)^{1/2}$ :



Comparando con el periodo del péndulo físico, se obtiene  $l_e = I^E / m \cdot d$ , que es, precisamente, el resultado de la suma de  $d$  y  $d'$ :

$$d + (I^{CM} / m \cdot d) = I^E / m \cdot d = l_e$$

En síntesis, un péndulo físico que se haga oscilar alrededor de cualquiera de los infinitos ejes fijos que se pueden instalar sobre alguna de las circunferencias con radios  $d$  y  $d'$ , tiene el mismo periodo para amplitudes pequeñas.

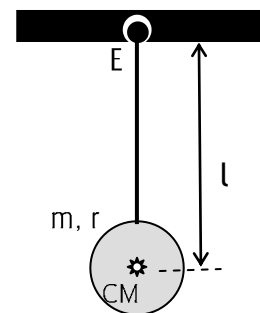


Esto es fácil de verificar con chapas de aglomerado agujereadas que se pueden adquirir en el comercio.

¡ Inténtalo !

**Ejemplo 115**

Una esfera de masa  $m$  y radio  $r$  cuelga de un hilo enganchado a un clavo, como muestra la figura. Si se deja oscilar a este péndulo físico alrededor de  $E$ , con pequeñas amplitudes, decir qué se debe modificar en la esfera para que su periodo sea igual al de un péndulo ideal, de masa  $m$ .



Solución:

$$I^E = I^{CM} + m \cdot l^2 = 2 \cdot m \cdot r^2 / 5 + m \cdot l^2$$

$$T_{\text{péndulo físico}} = 2\pi \cdot (I^E / m \cdot g \cdot l) = 2\pi \cdot [(2 \cdot m \cdot r^2 / 5 + m \cdot l^2) / m \cdot g \cdot l]^{1/2}$$

$$= 2\pi \cdot \{ [(2 \cdot r^2 / 5 \cdot l) + l] / g \}^{1/2}$$

$$T_{\text{péndulo ideal}} = 2\pi \cdot (l/g)^{1/2}$$

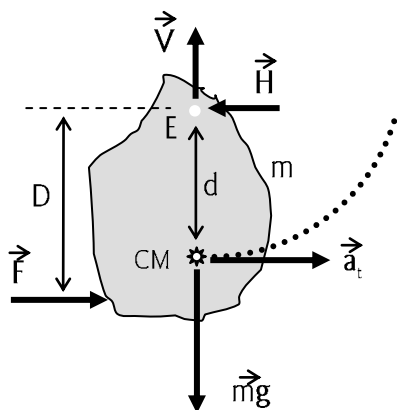
Comparando ambas expresiones, vemos que para que el periodo del péndulo real, físico, se aproxime al del péndulo ideal, el radio de la esfera debe ser lo más pequeño posible respecto de la longitud  $l$  del hilo.

.....

*CENTRO DE PERCUSIÓN*

Experimentalmente se comprueba que aparecen distintos efectos sobre el soporte de un péndulo físico cuando éste recibe impactos externos. Por ejemplo, si tomamos a una raqueta como péndulo que cuelga de la mano, no es lo mismo recibir el golpe de una pelota de tenis en cualquier parte de la raqueta: se siente en la mano cierto alivio si el golpe se da en el lugar adecuado.

Supongamos que sobre el siguiente péndulo colgado del eje E actúa la fuerza  $\vec{F}$ , y que no aparece ninguna fuerza impulsiva en E ( $H = 0$ ):



$$\begin{aligned} \Sigma F_c &= m \cdot a_c = V - mg \\ \Sigma F_t &= m \cdot a_t = F - H \\ \Sigma M^E &= I^E \cdot \alpha = F \cdot D = I^E \cdot a_t / d \end{aligned}$$

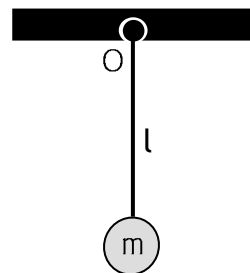
De estas ecuaciones surge:

$$D = I^E / m \cdot d$$

Se observa que el punto (*centro de percusión*) por el que debe pasar la dirección de la fuerza  $\vec{F}$  para que no aparezca  $\vec{H}$  en el eje, está ubicado en el *centro de oscilación* del péndulo físico.

### Ejemplo 116

Una barra sin masa, de longitud  $l$ , cuelga de un eje O sin roce con una *masa puntual*  $m$  en su extremo. ¿En qué lugar se encuentra el punto por el que debiera pasar la dirección de una fuerza horizontal para que el eje “no se dé cuenta” de su presencia?



Solución:

Vimos que el centro de percusión se encuentra a la distancia  $D = I^O / m \cdot l$ .

Como  $I^O = m \cdot l^2$  en este caso, resulta:

$$D = m \cdot l^2 / m \cdot l = l$$

¡ Golpeando a  $m$  en forma horizontal, no aparece ninguna consecuencia en el soporte cuando se trata de un cuerpo rígido de estas características !

.....

La ecuación  $\Sigma M^E = I^E \cdot \alpha$  es válida para resolver casos de *estática*; es decir, casos en los que los cuerpos rígidos están en reposo. Basta con hacer  $\alpha = 0$ , con lo que cualquier problema de *estática* se resuelve usando las ecuaciones de *dinámica* conocidas:

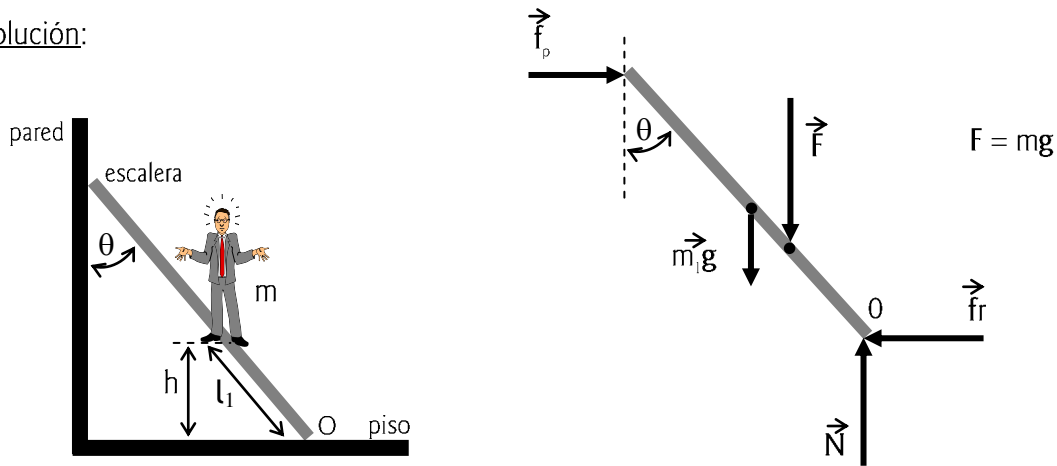
$$\Sigma \vec{F} = 0 \quad \Sigma M^E = 0$$

en donde E es un punto cualquiera por el que pasa un eje que está en reposo.

### Ejemplo 117

Calcular hasta qué altura máxima podría treparse un hombre de masa  $m$  sobre una escalera de longitud  $l$  y masa  $m_1$  para que ésta no se resbale sobre el piso con el que tiene un coeficiente de roce  $\mu$ . Considérese lisa la pared, y  $\theta$  el ángulo que la escalera forma con la misma.

Solución:



$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = 0 & \implies f_p = f_r ; N = m_1 g + mg \\ \sum M^O = 0 & \implies f_p \cdot l \cdot \cos \theta = m_1 g \cdot (l/2) \cdot \sin \theta + mg \cdot l_1 \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

Como se está considerando la situación límite en la que la escalera se encuentra a punto de resbalar, la fuerza de roce vale:

$$f_r = \mu \cdot N$$

Combinando las ecuaciones anteriores resulta:

$$l_1 = [ \mu \cdot ( m_1 + m ) \cdot l / \operatorname{tg} \theta ] - m_1 \cdot l/2 ] / m$$

$$\therefore h = l_1 \cdot \cos \theta = [ \mu \cdot ( m_1 + m ) \cdot l / \operatorname{tg} \theta ] - m_1 \cdot l/2 ] \cdot \cos \theta / m$$

Obsérvese que cuanto más chicos sean  $\theta$  y  $m$ , más grande será  $h$ , como lo sugiere la intuición si uno se para delante de una escalera así apoyada y debe treparse.

.....

### ROTOTRASLACIÓN

A partir de las ecuaciones generales válidas para el movimiento de cualquier cuerpo rígido:

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_{CM} \qquad \sum \vec{M}^O = d\vec{L}^O/dt$$

en donde "O" es el punto *fijo* en un *sistema inercial* por el que pasa el eje alrededor del cual gira el cuerpo) se obtienen las ecuaciones correspondientes al movimiento del cuerpo rígido en el plano:

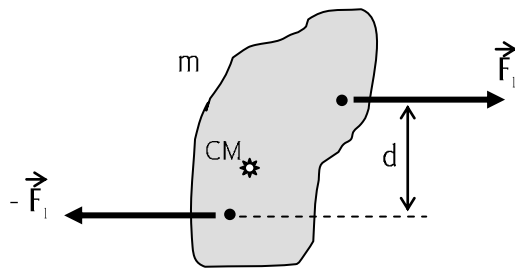
$$\sum F_x = m \cdot a_{CMx} \equiv R_x = m \cdot a_x \quad ; \quad \sum F_y = m \cdot a_{CMy} \equiv R_y = m \cdot a_y \quad ; \quad \sum M^O = I^O \cdot \alpha^O$$

Si el CR se *traslada*, se resuelven los problemas con  $R_x = m \cdot a_x$  y  $R_y = m \cdot a_y$ ; si el CR *gira* alrededor de un eje fijo en un SI, se resuelven con  $\sum M^O = I^O \cdot \alpha^O$ .

Pero, ¿qué pasa si se traslada el centro de masas del CR a la vez que éste gira sin eje fijo?.....

Para responder a esta inquietud, veamos primero qué sucede si a un cuerpo rígido plano en reposo sobre un piso liso, horizontal, le aplicamos una cupla (o par) como indica la figura, en

el mismo plano de la chapa:



Aquí:  $\Sigma \vec{F} = 0 \quad \therefore \underline{\vec{a}_{CM} = 0}$

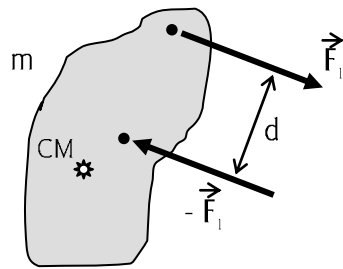
¡Sin embargo hay rotación, como puede apreciarse si accionamos convenientemente los dedos sobre una hoja o una lapicera apoyadas en una mesa !

El CR gira en sentido horario, como si por su CM pasara un eje físico. Su aceleración angular está dada por:

$$\underline{\alpha^{CM}} = M_{par} / I^{CM} = \underline{F_1 \cdot d / I^{CM}}$$

[ No se ha identificado el “Momento del Par” o “Momento de la Cupla” respecto del CM porque, recuérdese, es igual al producto de una de las fuerzas del par por la distancia que la separa de la otra, *respecto de cualquier punto* . ]

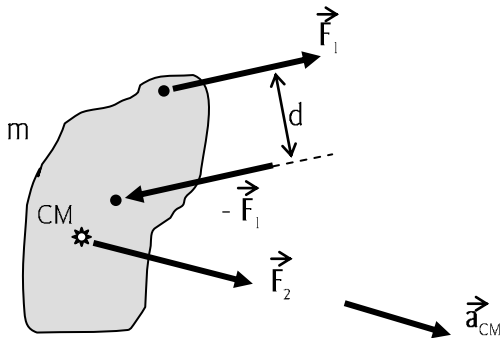
Lo mismo sucedería en casos en que la cupla estuviera aplicada a un lado del Centro de Masas:



$$\underline{\vec{a}_{CM} = 0}$$

$$\underline{\alpha^{CM} = F_1 \cdot d / I^{CM}}$$

Si además de la cupla se aplica otra fuerza en el CM, sucede:



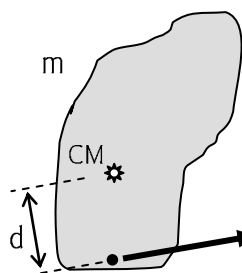
$$\underline{\vec{a}_{CM} = \vec{F}_2 / m}$$

$$\underline{\alpha^{CM} = F_1 \cdot d / I^{CM}}$$

¡ El CM se acelera y el CR gira en torno del CM !

¡ El CR se rototraslada !

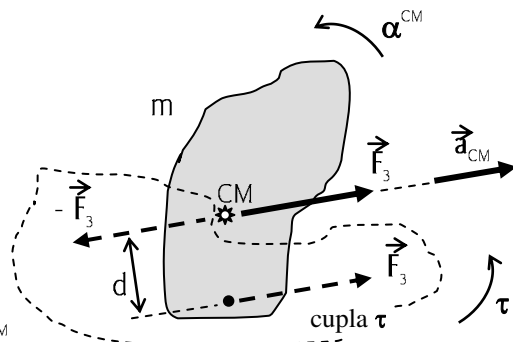
Lo mismo sucedería en el caso en que actuara una sola fuerza cuya dirección no pasase por el CM :



equivale a  $\Rightarrow$

$$\underline{a_{CM} = F_3 / m}$$

$$\underline{\alpha^{CM} = \tau / I^{CM} = F_3 \cdot d / I^{CM}}$$



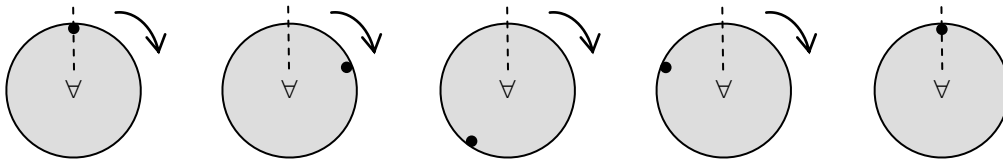
Si sobre el CR actúan un conjunto de fuerzas distribuidas en su superficie, podría considerarse en el ejemplo anterior a  $\vec{F}_3$  como la resultante de estas fuerzas. Entonces podemos decir que *un sistema plano de fuerzas aplicado a un CR equivale a una fuerza resultante cuya dirección pasa por el CM del cuerpo y a un momento o par que tiende a hacer girar al CR en torno de ese CM*.

De otra manera:

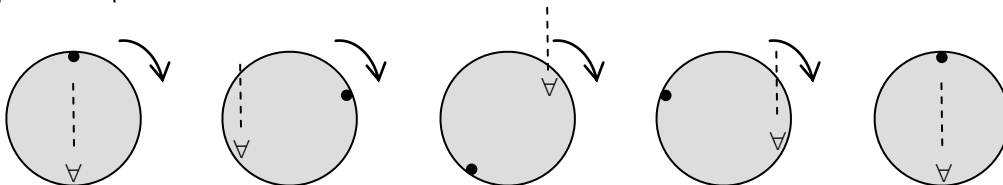
¡ Todo movimiento de un cuerpo rígido en el plano puede considerarse como compuesto por un movimiento de traslación de su centro de masas ( $\vec{a}_{CM} = \Sigma \vec{F} / m$ ) y un movimiento de rotación en torno del mismo ( $\alpha^{CM} = \Sigma M^{CM} / I^{CM}$ ) !

Se puede demostrar que  $\alpha^{CM} = \alpha^E = \alpha^B = \alpha^C = \dots = \alpha^N$ , en donde E, B, C, ..., N son puntos del CR. O sea, decir que un cuerpo rígido plano tiene una aceleración angular dada respecto de un eje que pasa por su CM es lo mismo que decir que tiene esa aceleración respecto de cualquier otro eje paralelo al anterior que pasa por otro lugar del CR.

Imaginemos a un observador ubicado en el centro de un círculo mirando hacia arriba cuando éste gira. En la primera secuencia "vé" al punto (•) que luego pierde de vista hasta que el círculo completa la vuelta.



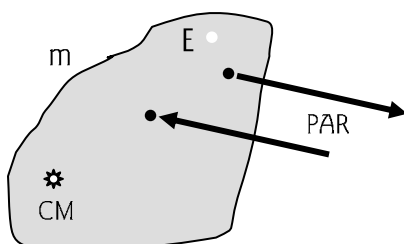
Otro observador, ubicado en un lugar distinto del círculo y obligado a mirar sólo para arriba, vería también dar una vuelta al punto (•). Luego, si en el mismo tiempo ambos observadores "ven" que el círculo completa el mismo recorrido, quiere decir que las aceleraciones angulares respecto de esos lugares de observación son las mismas. Y así se puede generalizar para cualquier otro punto del círculo.



Vamos a plantear ahora una aparente contradicción :

Al CR plano de la figura, libre en el espacio, se le aplica un par en el mismo plano. El punto E está marcado sobre el CR, el que comienza a moverse por acción de dicho par.

Planteando las siguientes ecuaciones llegamos a una expresión incorrecta. Analizar qué es lo que está mal en el planteo.



$$M_{par}^E = I^E \cdot \alpha^E$$

$$M_{par}^{CM} = I^{CM} \cdot \alpha^{CM}$$

Luego:  $I^E \cdot \alpha^E = I^{CM} \cdot \alpha^{CM}$

ya que el momento del par es el mismo respecto de cualquier punto. Pero,  $\alpha^E = \alpha^{CM}$ .

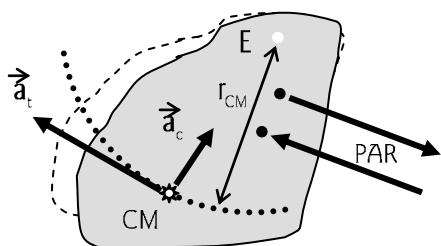


¿ Esto significa que  $I^E = I^{CM}$  ? ; Sabemos por Steiner que no ! Entonces: ¿cuál es el error? ...

( Analiza cómo se dedujo  $M_{par}^E = I^E \cdot \alpha^E$  . Allí está la respuesta. )

.....

Ahora aplicaremos el mismo *par* al mismo cuerpo rígido, pero esta vez con un eje físico que pasa por el punto E, como un clavo fijo alrededor del cual el CR podrá girar.



“E” fijo implica que todos los puntos del CR tengan la posibilidad de girar alrededor de E . También lo hace el CM por acción del *par* aplicado.

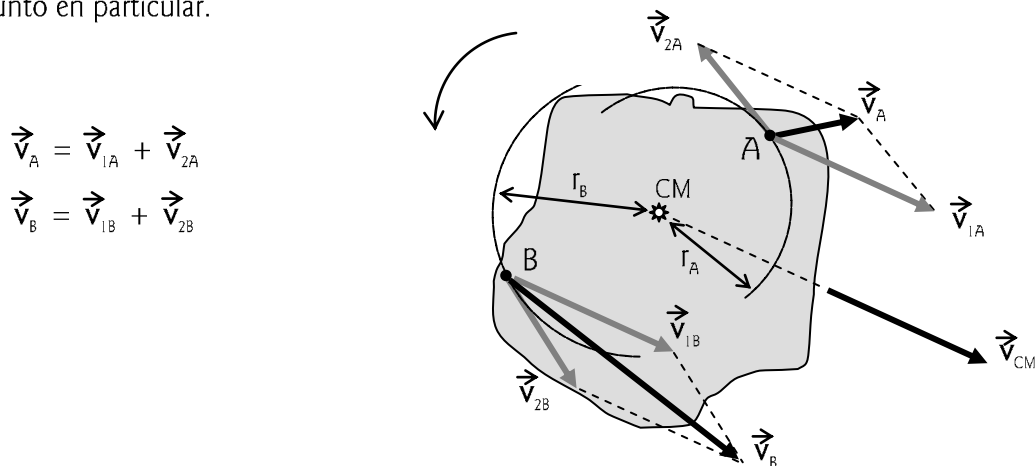
El momento de la cupla genera una aceleración angular, por lo que el CM comienza a desplazarse a lo largo de una circunferencia con centro en E . Aparece entonces una aceleración del CM en el plano del CR, cuyas componentes son la aceleración tangencial  $\vec{a}_t$  y la aceleración centrípeta  $\vec{a}_c$ .

$$\alpha^E = \alpha = M_{par} / I^E \quad a_t = \alpha \cdot r_{CM} = (M_{par} / I^E) \cdot r_{CM} \quad a_c = v_{CM}^2 / r_{CM} = \omega^2 \cdot r_{CM}$$

Si existe aceleración del CM es porque alguna fuerza externa al CR la está provocando. No es el *par*, cuya fuerza neta es CERO ; luego la única fuerza externa capaz de producir esa aceleración es la del vínculo en E .

VELOCIDAD DE DISTINTOS PUNTOS DEL CR RESPECTO DEL S.I.

En la rototraslación el CM del CR se mueve respecto de un sistema de referencias, a la vez que cada punto del CR se mueve respecto del CM. Aplicamos entonces las leyes de adición de velocidades y aceleraciones para obtener la velocidad y la aceleración *instantáneas* de cada punto en particular.



$$\vec{v}_A = \vec{v}_{1A} + \vec{v}_{2A}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{1B} + \vec{v}_{2B}$$

- $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_{CM}$  son velocidades de los puntos A, B y CM respecto del S.I. (Tierra, por ejemplo).
- $\vec{v}_{1A}$  y  $\vec{v}_{1B}$  son velocidades de los puntos A y B iguales a la del CM .
- $\vec{v}_{2A}$  y  $\vec{v}_{2B}$  son velocidades de los puntos A y B respecto del CM .

Es decir, cada punto tiene una componente de velocidad debida a la traslación del CM , y otra

componente debida a la rotación en torno del CM.

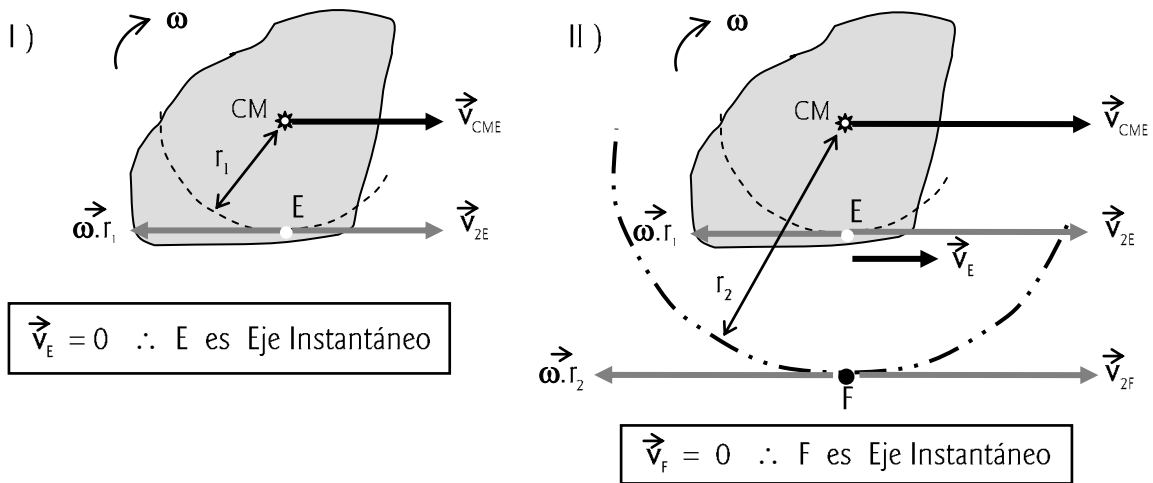
Los módulos de  $\vec{v}_{2A}$  y  $\vec{v}_{2B}$  se obtienen a partir de la velocidad angular del CR y de la posición de cada punto respecto del CM:

$$v_{2A} = r_A \cdot \omega \quad v_{2B} = r_B \cdot \omega$$

Se puede observar en la figura anterior que podría haber un punto en torno de A para el que la velocidad instantánea fuese CERO. Esto se daría en el caso en que los vectores componentes *velocidad de traslación* y *velocidad de rotación* fuesen opuestos.

Siempre existe un punto tal que su velocidad instantánea respecto de un *sistema inercial* sea CERO. Pero este punto puede pertenecer al cuerpo rígido o no. En todo caso es como si el CR girara en ese instante alrededor de él, por lo que se lo llama

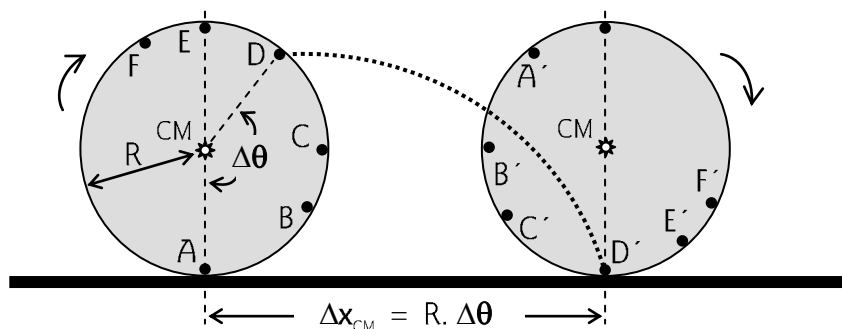
*Eje instantáneo*



En las figuras I y II se observa al mismo cuerpo rígido marchando con la misma velocidad angular, pero con distintas velocidades del centro de masas. Se ve cómo el eje instantáneo cae fuera del CR en el segundo ejemplo. En todos los casos la distancia del eje instantáneo al CM se calcula con:  $d = v_{CM} / \omega$ , como resulta fácil deducir.

*Rodadura*

Se define como rodadura a la rototraslación de un CR sobre una superficie de apoyo, cuando los puntos del CR en contacto con esta superficie tienen velocidad CERO respecto de la misma. Si no se da esta condición, decimos que el CR *patina* o se *desliza*. Cuando el CR *rueda*, se da la relación  $v_{CM} = r \cdot \omega$ , como demostramos a continuación:



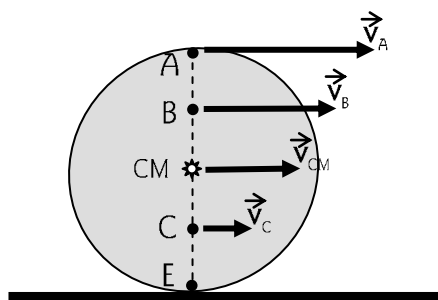
$$\therefore dx_{CM} = R \cdot d\theta \quad \Rightarrow \quad dx_{CM}/dt = R \cdot d\theta/dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{CM} = R \cdot \omega}$$

Derivando esta última expresión se llega a que, *también en rodadura*, se cumple:

$$\boxed{a_{CM} = R \cdot \alpha}$$

Debes pensar por qué, si nos dan sólo esta condición, no hay garantía de que se trate de un caso de rodadura.

Si un cilindro o una esfera de radio R ruedan, es fácil demostrar, con los criterios de la adición de velocidades y aceleraciones, que los valores instantáneos de estas magnitudes físicas correspondientes a puntos que se encuentran sobre la línea imaginaria E - A que muestra la figura, valen:



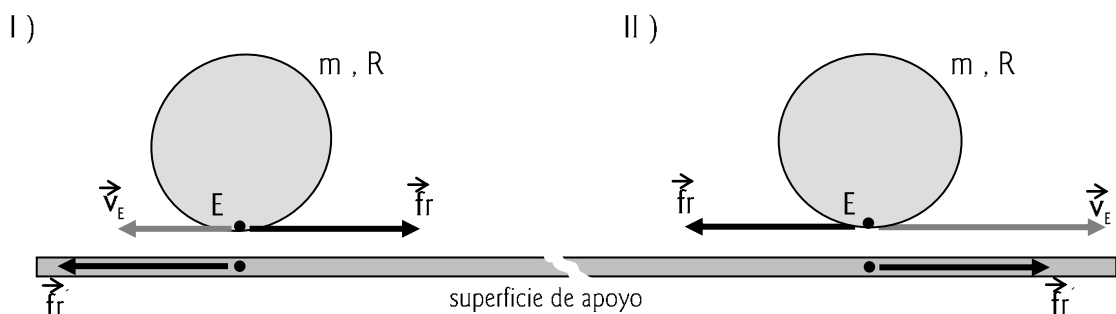
$$\begin{aligned} v_A &= v_{CM} + r_A \cdot \omega = v_{CM} + R \cdot \omega = 2 \cdot v_{CM} \\ v_B &= v_{CM} + r_B \cdot \omega \\ v_{CM} &= v_{CM} \\ v_C &= v_{CM} - r_C \cdot \omega \\ v_E &= v_{CM} - r_E \cdot \omega = v_{CM} - R \cdot \omega = 0 \\ a_A &= a_{CM} + r_A \cdot \alpha = a_{CM} + R \cdot \alpha = 2 \cdot a_{CM} \\ a_B &= a_{CM} + r_B \cdot \alpha \\ a_C &= a_{CM} - r_C \cdot \alpha \\ a_E &= a_{CM} - r_E \cdot \alpha = a_{CM} - R \cdot \alpha = 0 \end{aligned}$$

A TENER EN CUENTA:

*rodadura* significa que el punto de una esfera en contacto con la superficie sobre la que la esfera se encuentra en rototraslación, tiene velocidad CERO ; o los puntos de la generatriz de un cono o de un cilindro en contacto con la superficie sobre la cual el cono o el cilindro están *rototrasladándose* tienen respecto de esta superficie velocidad CERO. Nada se dice aquí respecto de la fuerza de roce. Si se cumplen las condiciones de rodadura:  $v_{CM} = R \cdot \omega$  y  $a_{CM} = R \cdot \alpha$ , el CR rodará sobre la superficie de apoyo aunque el coeficiente de rozamiento  $\mu$  valga CERO (o cualquier otra cosa).

Cuando el cilindro o la esfera se rototrasladan sobre una superficie de apoyo, también se dice que mientras se desplazan giran o rotan; esto es así aunque rueden. Pero si los puntos de apoyo tienen velocidad distinta de cero respecto de la superficie de apoyo, entonces decimos que estos cuerpos rígidos patinan o se deslizan. Es decir, giran o rotan patinando o deslizándose, pero *no* ruedan.

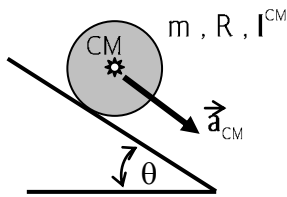
Si existe  $\mu$  y el CR patina, aparece una fuerza de roce cuyo sentido se opone al movimiento de los puntos que están en contacto, tal como indican las figuras:



En las figuras I y II los cilindros (o esferas) de distinto radio están apoyados sobre la superficie gris, dibujada retirada de los cuerpos rígidos para interpretar mejor la situación y cómo aparecen los pares acción-reacción de las fuerzas de roce. Puede apreciarse que en el primer caso, con la velocidad del punto de contacto hacia la izquierda, aparece una fuerza de roce sobre el CR en sentido contrario; y también vemos cómo se opone la  $\vec{f}_r$  a  $\vec{v}_E$  en el caso II.

**Ejemplo 118**

Sobre un plano inclinado con el que tiene un coeficiente de roce  $\mu$ , se apoya un cilindro en reposo. Calcular la aceleración que adquiere el CM del cilindro y el valor de la fuerza de roce, suponiendo primero la rotación en torno del CM y posteriormente la rotación del cilindro en torno de un eje instantáneo E que pasa por la generatriz del mismo apoyada sobre el plano.

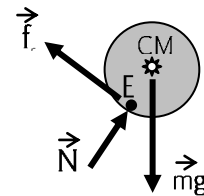
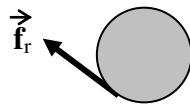


DATOS:

$$\left\{ \begin{array}{l} m, R, I^{CM}, \theta, \\ \text{En } t=0: \mathbf{v}_{CM} = 0, \boldsymbol{\omega} = 0 \end{array} \right.$$

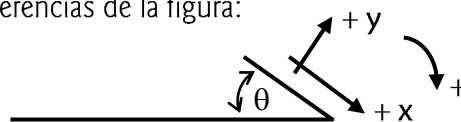
Solución:

Técnicamente, podríamos suponer cualquier sentido para la fuerza de roce. Pero, dado que “vemos” cómo giran los cilindros que se apoyan sobre planos inclinados, dibujamos el sentido que corresponde a la única fuerza que obliga a girar al CR en torno de un eje que pasa por su centro de masas:



Luego, bajo la acción de las siguientes fuerzas, el CR se acelera:

Si elegimos al Sistema de Referencias de la figura:



las ecuaciones a aplicar resultan:

$$\boxed{\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_{CM}}^* \quad \Rightarrow \quad mg \cdot \text{sen } \theta - f_r = m \cdot a_{CMx} \quad ; \quad N - mg \cdot \text{cos } \theta = m \cdot a_{CMy} = 0$$

$$\boxed{\sum M^{CM} = I^{CM} \cdot \alpha}^{**} \quad \Rightarrow \quad f_r \cdot R = I^{CM} \cdot \alpha$$

$$\boxed{a_{CMx} = R \cdot \alpha}^{***} \quad \Rightarrow \quad f_r \cdot R = I^{CM} \cdot a_{CMx} / R$$

$$\boxed{a_{CMx} = (g \cdot \text{sen } \theta) / [1 + (I^{CM} / mR^2)]}$$

$$\boxed{f_r = (I^{CM} \cdot g \cdot \text{sen } \theta) \cdot (1 / R^2) / [1 + (I^{CM} / mR^2)]}$$

Teniendo en cuenta los valores de  $I^{CM}$  para los cilindros huecos y macizos, resulta:

Cilindro Hueco:	$a_{CMx} = (g \cdot \text{sen } \theta) / 2$	$fr = (mg \cdot \text{sen } \theta) / 2$
-----------------	--	--

Cilindro Macizo:	$a_{CMx} = (2 \cdot g \cdot \text{sen } \theta) / 3$	$fr = (mg \cdot \text{sen } \theta) / 3$
------------------	--	--

Si consideramos a la generatriz que pasa por E como eje instantáneo, la ecuación \*\* se transforma en:  $\sum M^E = I^E \cdot \alpha$ .

Con  $\sum M^E = (mg \cdot \text{sen } \theta) \cdot R$  y  $I^E = I^{CM} + m \cdot R^2$ , se llega, naturalmente, a los mismos resultados.

.....

El resultado obtenido en el ejemplo anterior muestra cómo la aceleración del centro de masas de los cilindros que ruedan por un plano inclinado no depende de sus tamaños (radio, longitud), sino de sus formas: esta aceleración depende de cómo está distribuida la masa en torno del eje que pasa por el centro de masas.

Observemos que el análisis realizado vale para todos los cuerpos que ruedan (que no patinan, no deslizan). Para esferas huecas o macizas rodando, igualmente habríamos llegado a la expresión  $a_{CMx} = (g \cdot \text{sen } \theta) / [1 + (I^{CM} / mR^2)]$ . Por lo tanto, para conocer la aceleración del centro de masas de cuerpos con estas formas únicamente en función de la inclinación del plano y de  $g$ , hay que reemplazar  $I^{CM}$  por el valor correspondiente en cada caso:

Esfera maciza:  $\Rightarrow I^{CM} = 2/5 m \cdot R^2 \quad \therefore a_{CMx} = (5/7) \cdot (g \cdot \text{sen } \theta)$

Esfera hueca:  $\Rightarrow I^{CM} = 2/3 m \cdot R^2 \quad \therefore a_{CMx} = (3/5) \cdot (g \cdot \text{sen } \theta)$

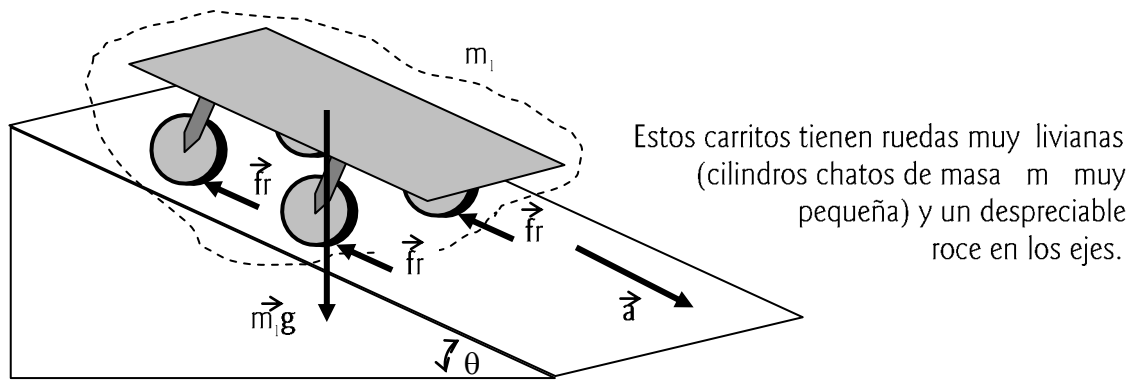
Se concluye entonces que, si se deja rodar simultáneamente por el mismo plano inclinado a esferas y cilindros macizos y huecos partiendo desde el reposo y del mismo punto de largada, independientemente del tamaño y del peso de estos cuerpos, llegarán abajo en el siguiente orden:

- 1era. : esfera maciza
- 2do. : cilindro macizo
- 3era. : esfera hueca
- 4to. : cilindro hueco

Cualquiera de ellos demora más que el bloque que se desliza sin roce. (Recuérdese:  $a = g \cdot \text{sen } \theta$  en esta situación.).

Para algunas prácticas de física suele ser necesario disponer de elementos que caigan por un plano inclinado como si solamente dependieran de la pendiente de éste y de la gravedad. Esto podría lograrse con mucha aproximación haciendo deslizar objetos con trozos de hielo incrustados y apoyados sobre el plano. Pero, naturalmente, esto no es práctico.

Lo que se utiliza en los laboratorios son carritos de cuatro ruedas con características que les permiten obtener una aceleración mayor que la de las esferas y los cilindros rodando libremente.



Si llamamos  $m_1$  a la masa total del carrito de la figura, incluyendo a las ruedas, se pueden escribir las ecuaciones:

$$m_1 \cdot g \cdot \text{sen } \theta - 4 \cdot fr = m_1 \cdot a \qquad fr \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot a / R$$

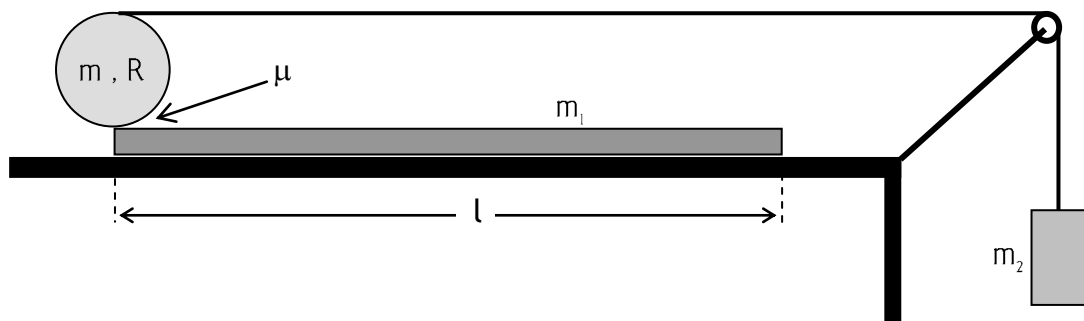
Combinando estas ecuaciones, resulta:  $a = (m_1 \cdot g \cdot \text{sen } \theta) / (m_1 + 2m)$

Se desprende que si  $m \ll m_1 \Rightarrow a \approx g \cdot \text{sen } \theta$  (como la del bloque deslizándose por un plano inclinado sin roce)

Por otro lado, se puede verificar que la ecuación es correcta suponiendo que casi toda la masa del carrito está en sus ruedas ( $m_1 \approx 4m$ ); entonces la aceleración sería:  $a = 2 \cdot g \cdot \text{sen } \theta / 3$  como la que corresponde al rodamiento de cilindros macizos (aquí, las ruedas).

### Ejemplo 119

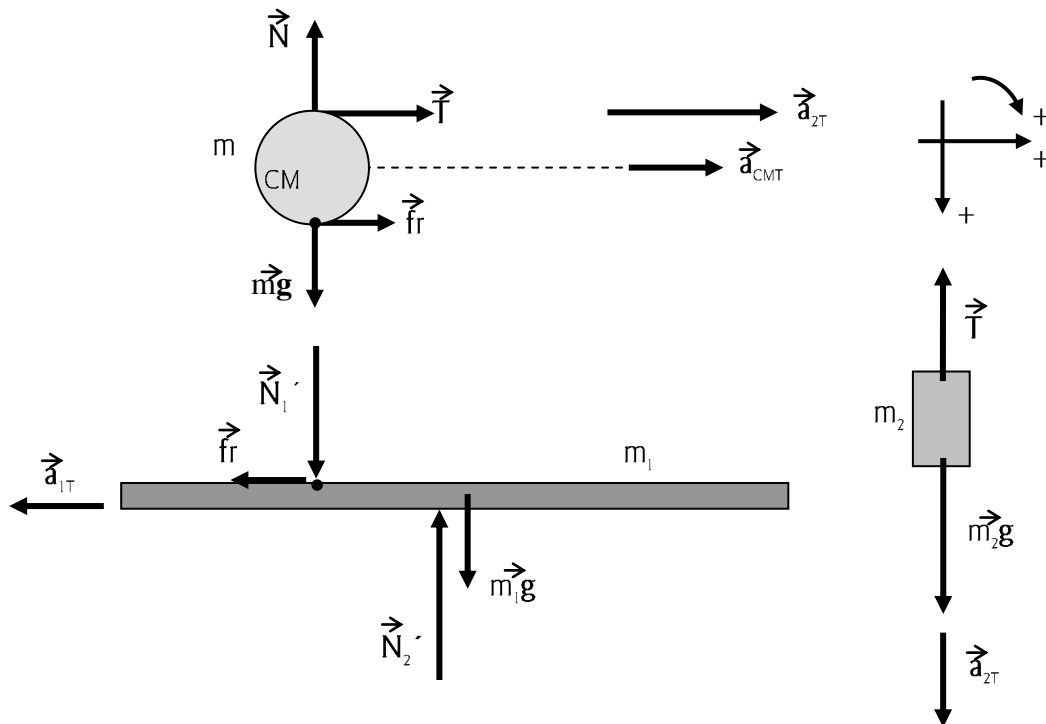
En el diagrama de la figura, un cilindro de masa  $m$  y radio  $R$  es arrastrado por la acción de una cuerda arrollada alrededor del mismo. El cilindro se encuentra apoyado sobre un extremo de una tabla de masa  $m_1$  y longitud  $l$ , existiendo un coeficiente de roce  $\mu$  entre las superficies de estos cuerpos; pero la tabla está apoyada sobre una superficie sin roce. La cuerda pasa por una polea pequeña de masa despreciable, habiendo un cuerpo de masa  $m_2$  colgado del extremo de la misma.



Teniendo en cuenta que el sistema comienza a moverse desde el reposo y el cilindro rueda sin deslizar, escribir las ecuaciones que describen el movimiento del sistema considerando que el objetivo es calcular el tiempo  $t$  que tarda el cilindro en recorrer la tabla en su longitud  $l$ .

Solución:

Desde Sistema Inercial (Tierra - T)



Aplicando las ecuaciones con asterisco del *Ejercicio 118*, y teniendo en cuenta el Sistema de Referencias adoptado (ver figura), resulta:

Cilindro:  $T + f_r = m \cdot a_{CMT}$        $T \cdot R - f_r \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \alpha$        $a_{CMT} = \alpha \cdot R$

Tabla:  $f_r = m_1 \cdot a_{1T}$

Cuerpo:  $m_2 g - T = m_2 \cdot a_{2T}$

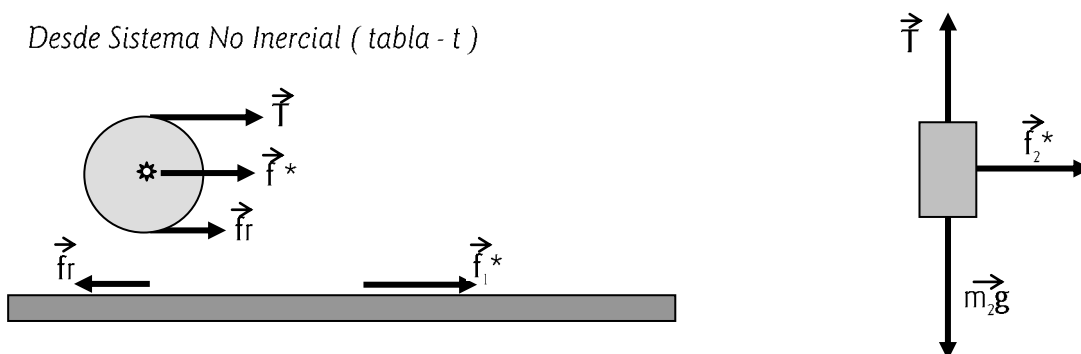
en donde el subíndice "T" es Tierra, y el subíndice "t" es tabla.

Por otra parte, observando la figura se desprende que:  $a_{CMT} = a_{CMTt} - a_{1T}$        $a_{2T} = 2 a_{CMTt} - a_{1T}$

Finalmente, siendo  $l$  dato, podemos hallar el tiempo que tarda el cilindro en recorrer la tabla:

$$l = \frac{1}{2} a_{CMTt} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t$$

b) Desde Sistema No Inercial (tabla - t)



Cilindro:  $T + fr + f^* = m \cdot a_{CMt}$        $T \cdot R - fr \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \alpha$        $a_{CMt} = \alpha \cdot R$

Tabla:  $fr - f_1^* = 0$

Cuerpo:  $m_2 g - T = m_2 \cdot a_{2t}$        $f_2^* = m_2 \cdot a_{1T}$

con :  $f^* = m \cdot a_{1T}$        $f_1^* = m_1 \cdot a_{1T}$

$$a_{CMT} = a_{CMt} - a_{1T} \quad a_{2T} = 2 a_{CMt} - a_{1T}$$

Igual que en el caso anterior,

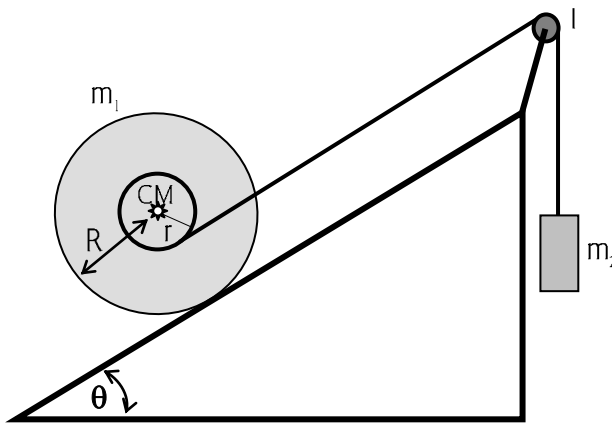
$$l = \frac{1}{2} a_{CMt} \cdot t^2$$



$$t$$

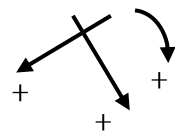
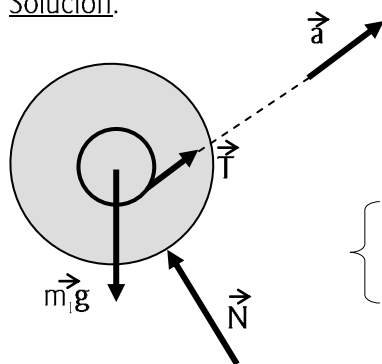
### Ejemplo 120

Sobre un plano inclinado se coloca una bobina cilíndrica de masa  $m_1$  con una polea adosada de masa despreciable. En la polea se enrolla un hilo en cuyo extremo se ata un bloque de masa  $m_2$ , como indica la figura. No existe roce entre el plano y la bobina, y la polea  $l$  por la que pasa el hilo es también de masa despreciable y no tiene roce.



¿ Qué valor debe tener  $\theta$  para que el CM de la bobina permanezca en reposo ?

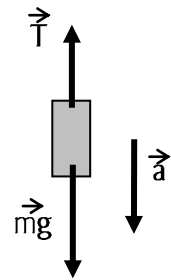
Solución:



Con el Sistema de Referencias adoptado, y recordando que

$$\vec{R} \wedge \vec{\omega} = \vec{v}_{CM} \quad \text{y} \quad \vec{R} \wedge \vec{\alpha} = \vec{a}_{CM} :$$

$$\left\{ \begin{aligned} m_1 g \cdot \sin \theta - T &= 0 \\ -T \cdot r &= \frac{1}{2} m_1 \cdot R^2 \cdot \alpha \\ -a &= \alpha \cdot r \end{aligned} \right. \quad \left. \begin{aligned} m_2 g - T &= m_2 \cdot a \end{aligned} \right\}$$



De las ecuaciones anteriores:

$$\boxed{\sin \theta = m_2 / [(2 m_2 \cdot r^2 / R^2) + m_1]}$$

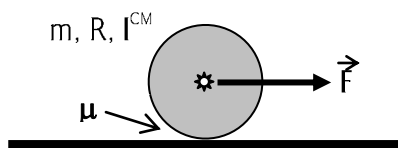


### Ejemplo 121

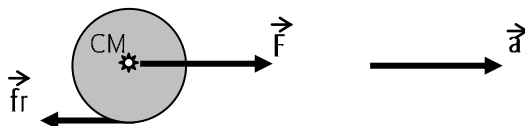
Determinar el mínimo valor de  $\mu$  para que el cilindro de la figura, tirado por una fuerza  $\vec{F}$  constante aplicada en su centro de masas, ruede sin deslizar sobre el plano horizontal fijo.

DATOS:  $m = 1 \text{ kg}$  ;  $R = 1 \text{ m}$

$I^{\text{CM}} = 0.5 \text{ kgm}^2$  ;  $F = 15 \text{ N}$  ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$



Solución:



Para que el cilindro ruede sin deslizar, la fuerza de roce debe ser:  $fr \leq \mu \cdot N$ .  
Luego, el coeficiente de roce puede bajar sólo hasta un valor tal que  $fr = \mu \cdot N$ .

De manera que puede escribirse:  $F - fr = m \cdot a$        $fr \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot a / R$

( *Analiza qué Sistema de Referencias se ha adoptado* )

De las ecuaciones anteriores:  $a = 2 F / (3 m)$  y  $fr = \frac{1}{2} m \cdot a = F/3 = \mu \cdot mg$

Por lo tanto:  $\mu = \mu_{\text{min}} = F / (3 mg) = 15 \text{ N} / (3 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2)$      $\therefore$      $\mu_{\text{min}} = 0.5$

.....

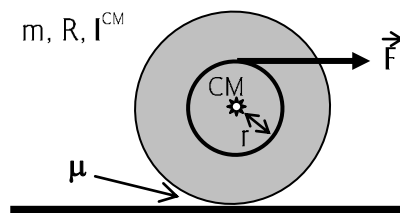
### Ejemplo 122

Determinar el mínimo valor de  $\mu$  para que el cilindro de la figura, que tiene adosada una polea sin masa de radio  $r$ , ruede sin deslizar sobre el plano horizontal fijo.

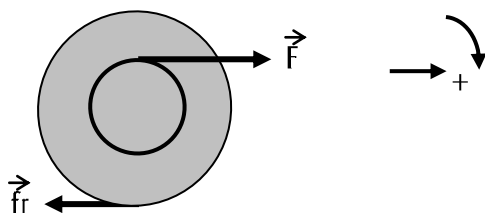
DATOS:

$m = 1 \text{ kg}$  ;  $R = 1 \text{ m}$  ;  $r = 0.25 \text{ m}$

$I^{\text{CM}} = 0.5 \text{ kgm}^2$  ;  $F = 15 \text{ N}$  ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$



Solución:



$$F - fr = m \cdot a$$

$$F \cdot r = I^{\text{CM}} \cdot a / R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot a / R$$

De las anteriores:  $a = (2/3) \cdot F [ 1 + (r/R) ] / m = 12.5 \text{ m/s}^2$

$$fr = F - m \cdot a = 2.5 \text{ N}$$

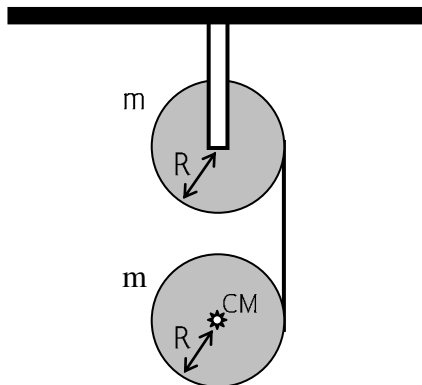
Si  $f_r = \mu \cdot mg$ , resulta:

$$\mu_{\min} = 2.5 / 10 = 0.25$$

.....

**Ejemplo 123**

En el sistema de la figura, el cilindro macizo superior puede girar libremente sostenido por un eje horizontal que pasa por su centro. Se enrolla una cuerda en torno de este cilindro y de otro idéntico, libre, como muestra la figura. Luego se deja caer el de abajo. Entre la cuerda y los cilindros hay roce y ambos ruedan sin deslizar.

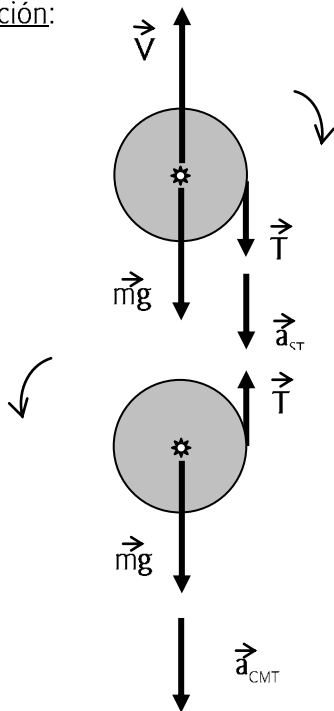


Hallar:

- a) La aceleración del CM del cilindro inferior.
- b) La tracción de la cuerda.
- c) La velocidad del cilindro inferior cuando ha descendido una distancia  $10 R$ .

DATOS:  $m = 2 \text{ kg}$     $R = 10 \text{ cm}$

Solución:



$$V = mg + T$$

$$\Rightarrow T \cdot R = I^{CM} \cdot \alpha = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot a_{ST} / R$$

$$\Downarrow$$

$$T = \frac{1}{2} m \cdot a_{ST}$$

$$mg - T = m \cdot a_{CMT}$$

$$\Rightarrow T \cdot R = I^{CM} \cdot \alpha = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot a_{CMS} / R$$

$$\Downarrow$$

$$T = \frac{1}{2} m \cdot a_{CMS}$$

a) y b)  $a_{CMT} = a_{ST} + a_{CMS} = 2T/m + 2T/m = 4T/m$

$\therefore$   $T = mg/5$     $a_{CMT} = 4g/5$

en donde los subíndices significan:

ST: soga-Tierra ; CMT: centro de masas-Tierra ; CMS: centro de masas-soga

c) El CM del cilindro que cae tiene un MRUV, por lo que:  $10 R = \frac{1}{2} a_{\text{CMT}} \cdot t^2$  y  $v = a_{\text{CMT}} \cdot t$

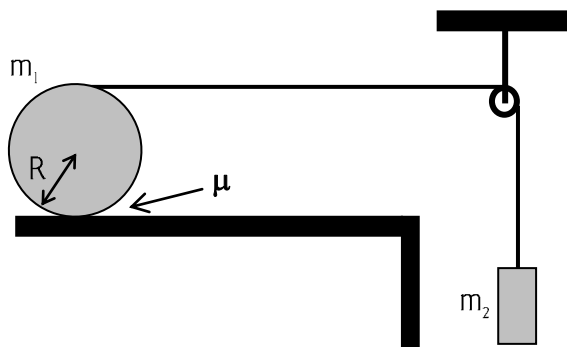
Resultan:

$$t = \sqrt{25 \cdot R / g}$$

$$v = \sqrt{16 \cdot g \cdot R}$$

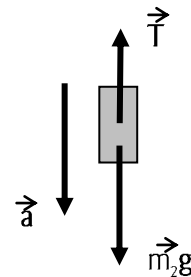
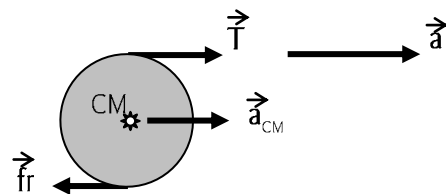
### Ejemplo 124

En el diagrama de la figura, un cilindro de masa  $m_1$  y radio  $R$  es arrastrado por la acción de una cuerda enrollada alrededor del mismo. El cilindro se encuentra apoyado sobre una mesa, existiendo un coeficiente de roce  $\mu$  entre las superficies de estos cuerpos. La cuerda pasa por una polea pequeña de masa despreciable, habiendo un cuerpo de masa  $m_2$  colgado del extremo de la misma.



Discutir las condiciones (relación entre  $m_1$  y  $m_2$ , valor de  $\mu$ ) bajo las cuales el cilindro *desliza* al avanzar girando.

Solución:



$$\left. \begin{aligned} (T + fr) \cdot R &= \frac{1}{2} m_1 \cdot R^2 \cdot \alpha \\ T - fr &= m_1 \cdot a_{\text{CM}} \\ m_2 g - T &= m_2 \cdot a \\ a &= a_{\text{CM}} + \alpha \cdot R \\ fr &= \mu \cdot m_1 g \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a_{\text{CM}} &= g \cdot [ -(\mu \cdot 2 \cdot m_1 + \mu \cdot 4 \cdot m_2) + m_2 ] / (m_1 + 3 \cdot m_2) \\ a &= 4 \cdot \mu \cdot g + 3 \cdot a_{\text{CM}} \end{aligned}$$

De  $a_{\text{CM}} \geq 0$  surge que debe cumplirse:  $\mu \leq m_2 / (2 \cdot m_1 + 4 \cdot m_2) = 1 / [4 + (2 \cdot m_1 / m_2)]$

De la expresión anterior se deduce que:

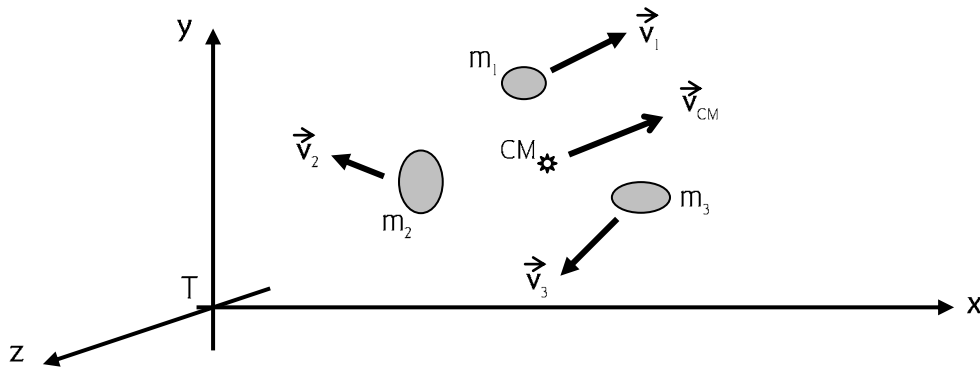
Si $m_1 / m_2 \Rightarrow 0$ ,	$\mu \Rightarrow 0.25$
Si $m_1 / m_2 \Rightarrow \infty$ ,	$\mu \Rightarrow 0.00$

ENERGÍA DE UN CUERPO RÍGIDO

Como en una partícula, podemos decir que la energía de un CR está compuesta de una *energía cinética (Ec)* y de una *energía potencial (Ep)*.

Energía Cinética

La Ec del CR la calcularemos a partir de la energía cinética de un conjunto de partículas "sueltas", que se mueven entre sí y respecto de un Sistema de Referencias fijo (por ej., Tierra):



Si llamamos  $\vec{v}_i$  a las velocidades con respecto a Tierra y  $\vec{v}'_i$  a las velocidades respecto del centro de masas del sistema de partículas, la energía cinética del sistema es:

$$Ec = \sum Ec_i = \frac{1}{2} \sum m_i \cdot v_i^2$$

Pero:  $v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$  y  $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$

$$\begin{aligned} \therefore Ec &= \frac{1}{2} \sum m_i \cdot \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum m_i [\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}] \cdot [\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}] = \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i \cdot v_i'^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \sum m_i \cdot v_{CM}^2}_{v_{CM}^2 \cdot \frac{1}{2} \sum m_i} + \underbrace{(\sum m_i \cdot \vec{v}'_i) \cdot \vec{v}_{CM}}_0 \end{aligned}$$

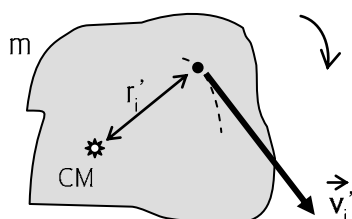
Queda:  $Ec = \frac{1}{2} m \cdot v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i \cdot v_i'^2$  en donde  $m$  = masa total del sistema

La razón por la cual el último término vale CERO es porque  $\sum m_i \cdot \vec{v}'_i = 0$ .

Veamos:  $\sum m_i \cdot \vec{v}'_i = d(\sum m_i \cdot \vec{r}'_i) / dt = d(m \cdot \vec{r}_{CM}') / dt = m \cdot \vec{v}_{CM}' = 0$

ya que  $\vec{v}_{CM}'$  es la velocidad del CM respecto del CM.

En el caso de un cuerpo rígido, no existen velocidades relativas entre las partículas que lo componen, y todas ellas tienen la misma velocidad angular  $\omega$ :



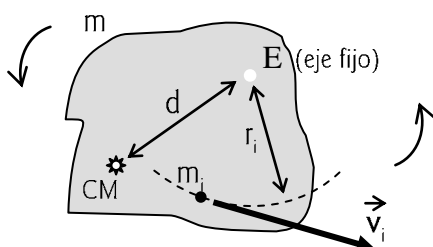
$$v'_i = \omega \cdot r'_i$$

$$\frac{1}{2} \sum m_i \cdot v_i'^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i'^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \underbrace{\sum m_i \cdot r_i'^2}_{I_{CM}}$$

De manera que  $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I^{CM} \cdot \omega^2$  ; para el cuerpo rígido !

La energía cinética del CR depende, entonces, de la traslación del CM y de la rotación del CR en torno de su CM .

Ahora, si el CR rota alrededor de un eje fijo, su  $E_c$  es la energía de rotación en torno de ese eje, lo que equivale a la expresión anterior, como puede deducirse:



$$\underline{E_c} = \sum m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i^2 = \underline{\frac{1}{2} I^E \cdot \omega^2}$$

Por Steiner:  $I^E = I^{CM} + m \cdot d^2$

$$\therefore \underline{E_c} = \frac{1}{2} ( I^{CM} + m \cdot d^2 ) \cdot \omega^2 = \underline{\frac{1}{2} m \cdot v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I^{CM} \cdot \omega^2}$$

### Energía Potencial

La *Energía Potencial* ( $E_p$ ) de un CR es la suma de las energías potenciales de sus infinitas partículas componentes. Si se trata de la fuerza conservativa *peso*, la  $E_p$  del CR se calcula con  $\pm mg \cdot h$ , en donde  $m$  es la masa del CR y  $h$  es el desplazamiento de su CM respecto del nivel para el que se supuso la energía potencial igual a CERO .

Esto es así dado que  $\vec{m}\vec{g}$  equivale a la suma de las fuerzas gravitacionales que actúan sobre las partículas componentes y cuya dirección pasa por el CM, cuando se trata de cuerpos rígidos sometidos a una  $\vec{g}$  constante .

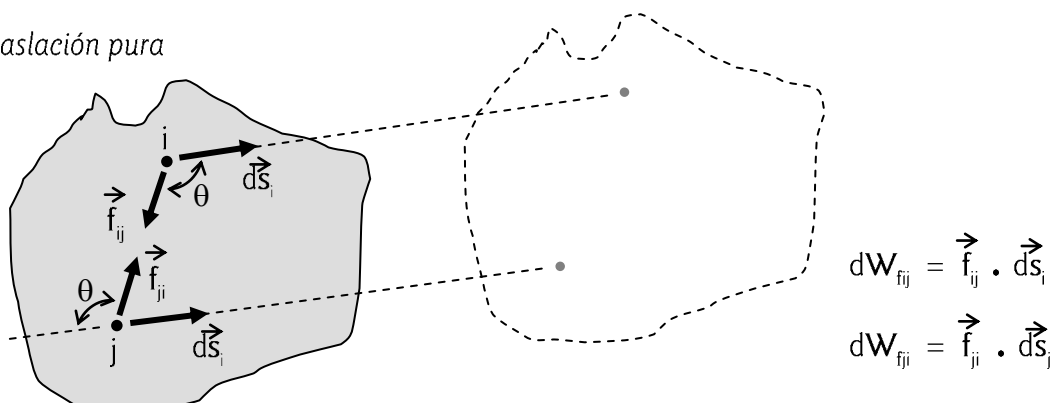
### TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA APLICADO A UN CUERPO RÍGIDO

Sabemos que para un sistema de partículas se cumple:  $\sum_{(A \rightarrow B)} W_{Fe} + \sum_{(A \rightarrow B)} W_{fi} = \Delta E_{C \text{ sistema } (A \rightarrow B)}$

Siendo el CR un sistema de partículas, es de esperar que el Teorema Trabajo-Energía tenga la misma expresión anterior. Sin embargo, demostraremos que el segundo término del primer miembro vale CERO en los casos de cuerpos rígidos.

Para analizar qué pasa con el trabajo de las fuerzas internas de un CR, tomemos a un par cualquiera de partículas componentes del mismo y veamos qué trabajo ejecutan las fuerzas de interacción entre estas partículas.

a) *Traslación pura*



Como:  $d\vec{s}_i = d\vec{s}_i$  y  $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$  resulta:  $dW_{f_{i \text{ tras}}} = dW_{f_{ij}} + dW_{f_{ji}} = 0$

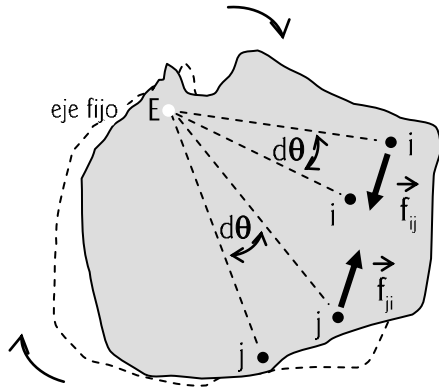
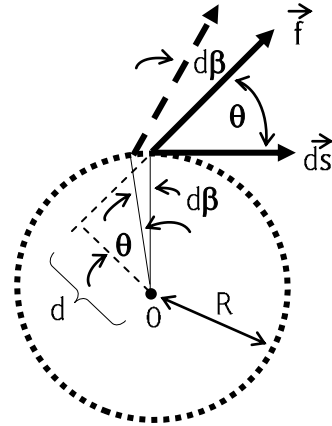
b) Rotación pura

Una fuerza  $\vec{f}$ , rotando un ángulo  $d\beta$ , genera el trabajito:  $dW_f = f \cdot ds \cdot \cos \theta$ .

Como:  $R \cdot d\beta = ds$ , y  $R \cdot \cos \theta = d$ , resulta:

$$dW_f = f \cdot R \cdot d\beta \cdot d / R = \underbrace{f \cdot d \cdot d\beta}_{M_f^o} = \underline{M_f^o \cdot d\beta}$$

Luego, el trabajo de las fuerzas internas en un cuerpo en rotación vale CERO:



$$dW_{f_{ij}} = M_{f_{ij}}^E \cdot d\theta$$

$$dW_{f_{ji}} = M_{f_{ji}}^E \cdot d\theta$$

Como:  $M_{f_{ij}}^E = -M_{f_{ji}}^E$

resulta:  $dW_{f_{i \text{ rotac}}} = dW_{f_{ij}} + dW_{f_{ji}} = 0$

Finalmente:

$$dW_{f_i} = dW_{f_{i \text{ tras}}} + dW_{f_{i \text{ rotac}}} = 0$$

En el **cuerpo rígido** las fuerzas internas no realizan trabajo, como queríamos demostrar.

El Teorema Trabajo-Energía se reduce entonces a:

$$\sum_{(A \rightarrow B)} W_{F_{\text{ex}}} = \Delta E_C \quad (A \rightarrow B)$$

en donde A y B son los puntos entre los que se desplaza el CR.

Si suprimimos el subíndice "e" dando por entendido que las fuerzas que actúan sobre el CR son externas al mismo, el Teorema T-E se escribe:

$$\sum_{(A \rightarrow B)} W_F = \left( \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{CMB}}^2 + \frac{1}{2} I^{\text{CM}} \cdot \omega_B^2 \right) - \left( \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{CMA}}^2 + \frac{1}{2} I^{\text{CM}} \cdot \omega_A^2 \right)$$

En el caso en que solo ejecuten trabajo fuerzas conservativas, este teorema conduce a la conservación de la Energía Mecánica, como viéramos al estudiar la partícula:

Si sólo existe  $\sum W_{F_{\text{conservativas}}} \iff E_m = \text{cte.} = E_c + E_p$

Es decir,

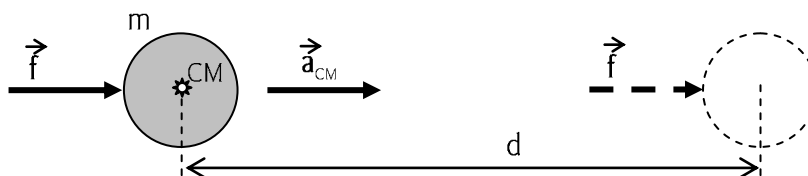
$$\frac{1}{2} m \cdot v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I^{\text{CM}} \cdot \omega^2 + m g \cdot h = \text{cte.}$$

### CÁLCULO DEL TRABAJO DE UNA FUERZA SOBRE UN CUERPO RÍGIDO

Si la dirección de una fuerza  $\vec{f}$  pasa por el centro de masas del cuerpo rígido, y no hay otras fuerzas, de las ecuaciones:

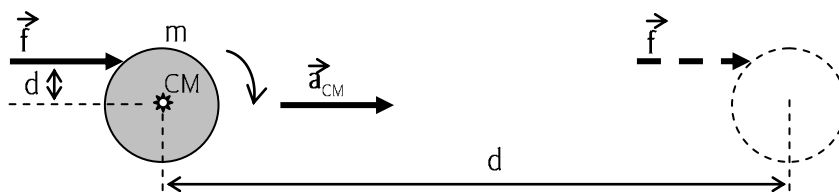
$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_{CM} \qquad \sum \mathbf{M}^{CM} = I^{CM} \cdot \alpha$$

se deduce que  $\alpha = 0$ , y que aparece una  $\vec{a}_{CM}$ . Es decir, el trabajo de  $\vec{f}$  no aporta variación de energía cinética rotacional y se calcula como si  $\vec{f}$  actuara sobre una partícula de masa equivalente a la del CR ubicada en el CM de éste:



$$W_f = f \cdot d \quad (\text{Si es que la dirección de } \vec{f} \text{ coincidió en todo momento con la dirección del movimiento del centro de masas}).$$

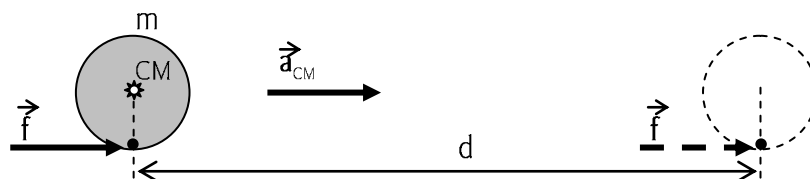
Pero si la dirección de  $\vec{f}$  pasa por otro punto, generará rotación alrededor del CM y aceleración del mismo. Habrá variación de  $E_{c_{rotac}}$  y también variación de  $E_{c_{tras}}$ .



$$W_f = \underbrace{f \cdot d}_{W_{f \text{ transl}}} + \underbrace{M_f^{CM} \cdot \Delta\theta}_{W_{f \text{ rotac}}} = \Delta E_C = \Delta(E_{c_{tras}} + E_{c_{rotac}})$$

### Trabajo de la fuerza de roce

Para la fuerza de roce se aplica el mismo criterio:



$$W_{f_r} = \pm f_r \cdot d \pm M_{f_r}^{CM} \cdot \Delta\theta$$

en donde, como siempre, los signos dependerán del Sistema de Referencias adoptado.

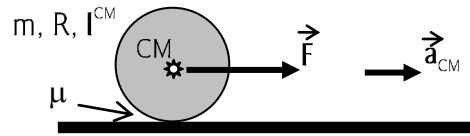
El módulo de la fuerza de roce vale cualquier cosa entre 0 y  $\mu \cdot N$ , salvo cuando el cuerpo rígido *patina* o *desliza*. En tal caso siempre vale  $\mu \cdot N$ .

En *rodadura*, el trabajo de la fuerza de roce es CERO porque el término de traslación es igual y de signo contrario al de rotación. Teniendo en cuenta que en rodadura  $R \cdot \Delta\theta$  equivale al desplazamiento del CM, es fácil demostrar lo anterior.

**Ejemplo 125**

Verificar el Teorema T-E para el caso de la figura, cuando el cilindro macizo, bajo la acción de la fuerza  $\vec{F}$ , avanza rodando 1 m a partir del reposo.

DATOS:  $m = 1 \text{ kg}$  ;  $R = 1 \text{ m}$   
 $I^{CM} = 0.5 \text{ kgm}^2$  ;  $F = 15 \text{ N}$  ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$



Solución:

Verificar el Teorema Trabajo-Energía quiere decir comprobar que  $W_T = \Delta E_c$ .

O sea, debemos calcular por separado el trabajo que todas las fuerzas externas ejercen sobre el cuerpo rígido durante 1 m de trayectoria de su CM, y verificar que el resultado coincide con el cálculo de la variación de energía cinética que el cuerpo experimenta en ese lapso.

$$W_{\text{todas F}} = W_{fr}^0 + W_F + W_P^0 + W_N^0 = W_F = F \cdot 1 \text{ m} = 15 \text{ J}$$

$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{1}{2} m \cdot v_{CMf}^2 + \frac{1}{2} I^{CM} \cdot \omega_f^2 - 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F - fr = m \cdot a_{CM} \\ fr \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot a_{CM} / R \end{array} \right. \quad a_{CM} = 2F / (3m)$$

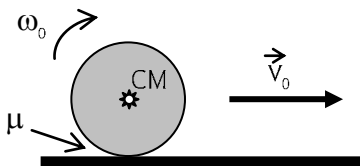
$$v_{CMf}^2 - v_i^2 = 2 \cdot a_{CM} \cdot \Delta x \Rightarrow v_{CMf}^2 = 2 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 1 / (3 \cdot 1) \Rightarrow v_{CMf} = \sqrt{20} \text{ m/s}$$

$$\omega_f = v_{CMf} / R \Rightarrow \Delta E_c = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot 20 = 15 \text{ J}$$

¡ Queda verificado:  $W_{\text{todas F}} = \Delta E_c$  !

**Ejemplo 126**

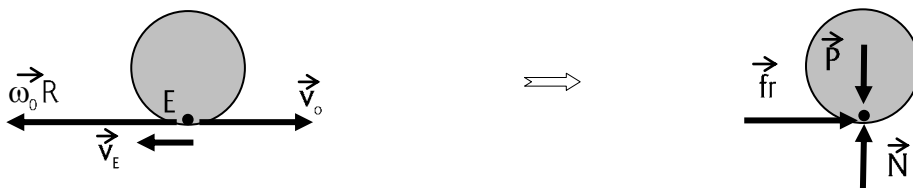
Una esfera maciza ( $I^{CM} = 2/5 m \cdot R^2$ ) de masa  $m$  y radio  $R$  se deposita en  $t = 0$  sobre un suelo horizontal con las velocidades iniciales  $\vec{v}_0$  y  $\vec{\omega}_0$  ( con  $v_0 < \omega_0 \cdot R$  ). Hallar:



- Las ecuaciones del movimiento de la esfera.
- Verificar el Teorema T-E entre  $t = 0$  y  $t = t_R$  ( $t_R =$  instante en que entra en rodadura )

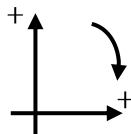
Solución:

Dado que  $v_0 < \omega_0 \cdot R$  :





a)



$$\left. \begin{aligned} N - mg &= 0 \\ \mu \cdot N &= m \cdot a_{CM} \\ - \underbrace{\mu \cdot N \cdot R}_{fr} &= I^{CM} \cdot \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a_{CM} = \mu \cdot g \\ \alpha = -5\mu \cdot g / 2R \\ N = mg \end{cases}$$

La esfera comienza a moverse entonces con MCUV en torno del CM que se mueve con MRUV, ya que  $a_{CM}$  y  $\alpha$  son constantes ( $fr = \mu N$  mientras la esfera patine).

$\therefore$

$$\boxed{v = v_0 + \mu \cdot g \cdot t} \qquad \boxed{\omega = \omega_0 - (5\mu \cdot g \cdot t / 2R)}$$

*¡ Estas son las ecuaciones de movimiento de la esfera !*

Se observa que a medida que aumenta  $t$ , aumenta  $v$  y disminuye  $\omega$ . Es de esperar, entonces, que en algún momento se cumpla con  $v = \omega \cdot R$ , y que a partir de ese instante ( $t_R$ ) la esfera continúe en rodadura.

De las ecuaciones anteriores, se deduce que:  $t_R = 2 \cdot (\omega_0 \cdot R - v_0) / 7\mu \cdot g$

b)

$$\sum_{(0 \rightarrow t_R)} W_T = \Delta E_{c \text{ sistema}} \quad (0 \rightarrow t_R)$$

Entre  $t=0$  y  $t=t_R$ :

$$W_{\text{todas F}} = W_{f_r} + \cancel{W_p} + \cancel{W_N} = W_{f_r}$$

$$W_{f_r} = W_{f_r \text{ tras}} + W_{f_r \text{ rotac}} = fr \cdot d + (-fr \cdot R) \cdot \Delta\theta$$

$$d = v_0 \cdot t_R + \frac{1}{2} a_{CM} \cdot t_R^2 \quad ; \quad \Delta\theta = \omega_0 \cdot t_R + \frac{1}{2} \alpha \cdot t_R^2$$

$$\therefore \boxed{W_{f_r} = W_{\text{todas F}} = -m \cdot v_0^2 / 7 - m \cdot \omega_0^2 \cdot R^2 / 7 + 2 \cdot m \cdot v_0 \cdot \omega_0 \cdot R / 7}$$

Por otro lado:

$$\Delta E_c = E_{c_{tR}} - E_{c_0} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} I^{CM} \cdot \omega^2 - \left( \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2} I^{CM} \cdot \omega_0^2 \right)$$

donde, para  $t_R$ :  $v = 5 \cdot v_0 / 7 + 2 \cdot \omega_0 \cdot R / 7$  y  $\omega = 2 \cdot \omega_0 / 7 + 5 \cdot v_0 / 7R$

Reemplazando, resulta:  $\boxed{\Delta E_c = -m \cdot v_0^2 / 7 - m \cdot \omega_0^2 \cdot R^2 / 7 + 2 \cdot m \cdot v_0 \cdot \omega_0 \cdot R / 7}$

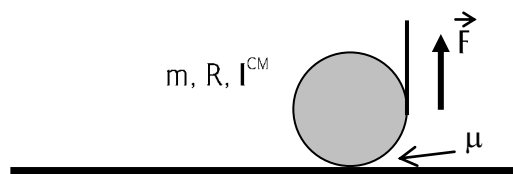
*¡ Con lo que queda demostrado el Teorema !*

.....

### Ejemplo 127

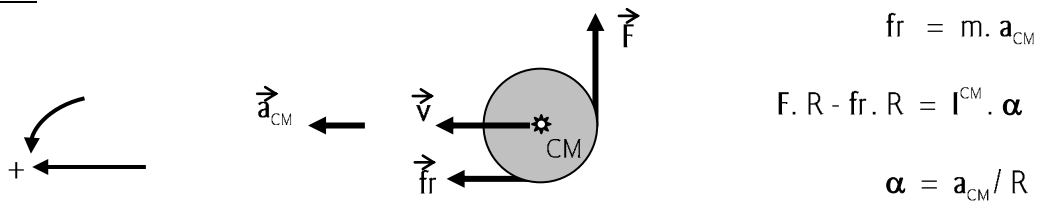
A un cilindro macizo se le enrolla una cuerda de la que se tira verticalmente hacia arriba con una fuerza  $\vec{F}$ , como indica la figura. Bajo la acción de esta fuerza el cilindro comienza a rodar sobre una superficie horizontal.

DATOS:  $F = 1 \text{ N}$  ;  $R = 10 \text{ cm}$  ;  $m = 10 \text{ kg}$



Si en  $t = 0$  el cilindro está en reposo, calcular la velocidad del CM, el desplazamiento angular, y el trabajo de  $\vec{F}$  al cabo de 10 s.

Solución:



$$fr = m \cdot a_{CM}$$

$$F \cdot R - fr \cdot R = I^{CM} \cdot \alpha$$

$$\alpha = a_{CM} / R$$

Resulta:  $a_{CM} = 2F / 3m = 0.066 \text{ m/s}^2$

$$\therefore \boxed{v} = v_0 + a_{CM} \cdot t = 0 + (2F / 3m) \cdot 10 \text{ s} = \boxed{0.66 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{\Delta\theta} = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 = 0 + \frac{1}{2} (a_{CM} / R) \cdot t^2 = \boxed{33.3 \text{ rad}}$$

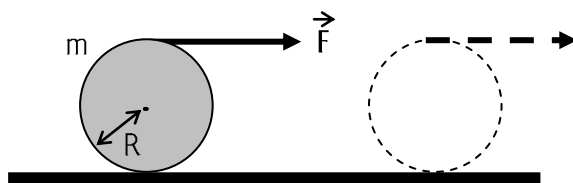
$$\boxed{W_F} = W_{F \text{ tras}} + W_{F \text{ rotac}} = 0 + M_F^{CM} \cdot \Delta\theta = F \cdot R \cdot \Delta\theta = \boxed{3.33 \text{ J}}$$

.....

Hay casos en que es difícil asegurar cuál es el sentido de la fuerza de roce. En tal caso, se le asigna arbitrariamente un sentido y se plantean las ecuaciones; si al despejar el módulo de  $\vec{fr}$  se observa que resulta negativo, significa que el verdadero sentido de la fuerza de roce es contrario al supuesto. Comprobemos esto a continuación.

**Ejemplo 128**

Un cilindro macizo está apoyado en el suelo, en reposo. Se le aplica una fuerza  $\vec{F}$ , como indica la figura, y comienza a rodar.

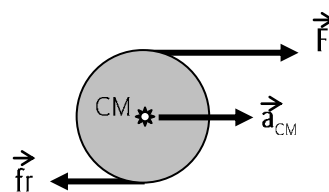
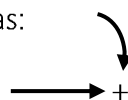


Calcular  $\vec{a}_{CM}$  y comprobar cuál es el sentido de la fuerza de roce.

DATOS:  $m, R, \vec{F}$

Solución:

Supondremos un sentido de  $\vec{fr}$  como se indica, y elegiremos el sistema de referencias:



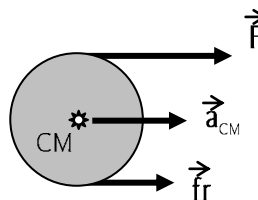
Entonces:

$$\left. \begin{aligned} F - fr &= m \cdot a_{CM} \\ F \cdot R + fr \cdot R &= \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot a_{CM} / R \end{aligned} \right\} \quad \boxed{a_{CM} = 4F / 3m} \quad \boxed{fr = - (F/3)}$$

¡ El signo “-” indica que el sentido de  $\vec{fr}$  es contrario al supuesto !

Verificación:

Supondremos el siguiente sentido para  $\vec{f}_r$ :

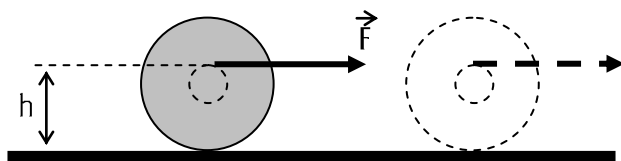


Con el mismo sistema de referencias, ahora las ecuaciones y el resultado final son:

$$\left. \begin{aligned} F + f_r &= m \cdot a_{CM} \\ F \cdot R - f_r \cdot R &= \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot a_{CM} / R \end{aligned} \right\} \quad \boxed{a_{CM} = 4F / 3m} \quad \boxed{f_r = + (F/3)}$$

El signo “+” nos dice que hemos elegido el sentido que verdaderamente tiene la fuerza de roce en el caso planteado.

Obsérvese que si la fuerza horizontal  $\vec{F}$  se ejerce en la dirección que pasa por el CM, la fuerza de roce apunta hacia el otro lado, como se viera en otro ejemplo. Quiere decir que en algún punto del segmento imaginario que une al centro de masas con la parte superior del cilindro, pasa la dirección de la fuerza horizontal para la cual no habría fuerza de roce.



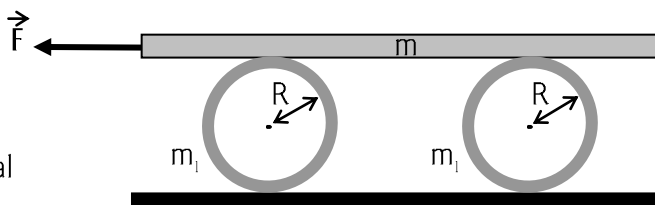
¡ Existe una h para la cual la fuerza de roce vale CERO !

¡ Plantea las ecuaciones para comprobarlo !

.....

### Ejemplo 129

Considerando que no hay deslizamiento entre la tabla de masa  $m$  y los rodillos cilíndricos huecos de radio  $R$  y masa  $m_1$ , y entre los rodillos y el suelo, calcular las fuerzas de roce entre estos cuerpos en contacto cuando se aplica a la tabla una fuerza horizontal constante ( $\vec{F}$ ).



Solución:

Se pueden hacer los diagramas de cuerpos aislados asignando con certeza los sentidos de las fuerzas de roce entre la tabla y los rodillos. Estas fuerzas no pueden ayudar a mover a la tabla, por un lado, y deben generar la rotación que permita rodar a los cilindros en sentido anti horario en el dibujo. En cambio no sabemos qué pasa con el roce entre los rodillos y el suelo, de manera que supondremos un sentido y veremos qué dicen las ecuaciones.

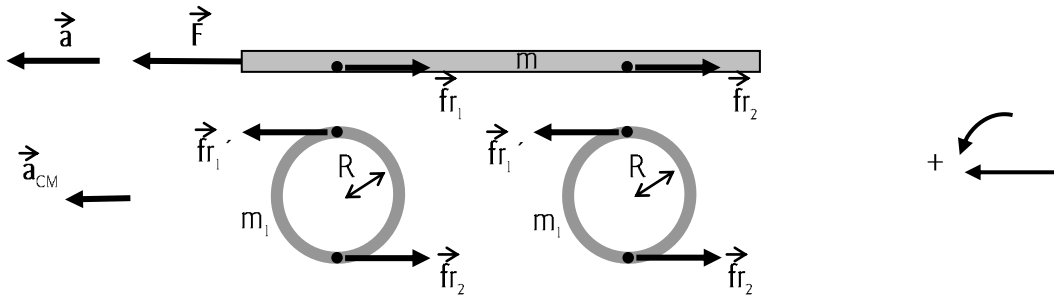


Tabla:  $F - 2 \cdot fr_1 = m \cdot a$

$fr_1 = fr_1'$

Rodillos:  $fr_1' - fr_2 = m_1 \cdot a_{CM}$

$(fr_1' + fr_2) \cdot R = m_1 \cdot R^2 \cdot a_{CM} / R$

Teniendo en cuenta que  $a = 2 \cdot a_{CM}$  porque la tabla no patina y su aceleración es la de los puntos de las generatrices de los cilindros en contacto con la tabla, y porque los rodillos ruedan sobre el piso, combinando las ecuaciones anteriores se llega a:

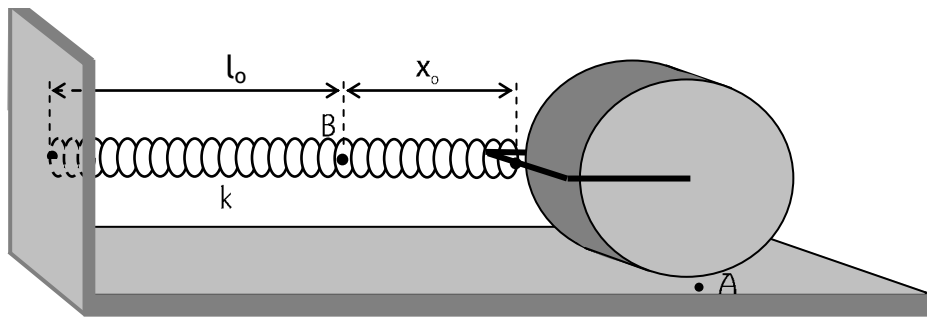
$$fr_1 = m_1 \cdot F / [ 2 \cdot (m_1 + m) ]$$

$$fr_2 = 0$$

.....

**Ejemplo 130**

Un cilindro macizo de masa  $m$  y radio  $R$ , enganchado a un resorte de constante  $k$  y longitud natural  $l_0$ , gira con  $\omega_0$  cuando pasa por  $A$  apoyado sobre una superficie horizontal, dirigiéndose hacia la pared.



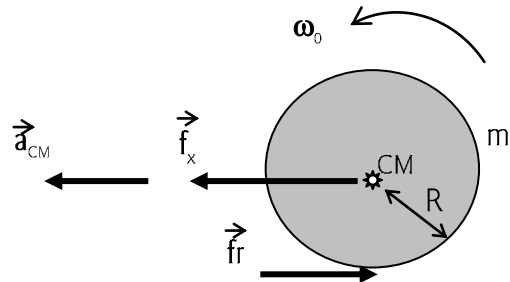
- a) Si por  $A$  pasa con rapidez del centro de masa  $v_0$ , calcular la máxima compresión del resorte cuando el cilindro rueda sobre la superficie con la que tiene un coeficiente de roce  $\mu$ , y calcular la velocidad del CM del cilindro cuando pasa por el punto en el que el resorte tiene su longitud natural.
- b) Con ecuaciones, describir el movimiento del cilindro para el caso en que  $\mu = 0$  y  $v_0 = 0$  a partir de  $A$ .

Solución:

a)  $f_x = -k \cdot x$

$-k \cdot x - fr = m \cdot a_{CM}$

$fr \cdot R = I^{CM} \cdot \alpha = I^{CM} \cdot a_{CM} / R$



$$\therefore -k \cdot x - I^{CM} \cdot a_{CM} / R^2 = m \cdot a_{CM}$$

$$\curvearrowright a_{CM} = - \underbrace{[k / (m + I^{CM}/R^2)]}_{k_1} \cdot x = -k_1 \cdot x \quad \therefore \text{Se trata de un MAS del CM}$$

Como en cualquier MAS, se cumple que  $\mathbf{a} = -\omega_1^2 \cdot \mathbf{x}$ . Luego, por comparación, y teniendo en cuenta que  $\omega$  (pulsación) =  $2\pi/T$ , se desprende que el cilindro comprimirá el resorte, se detendrá, rodará hacia atrás hasta volver a detenerse con el resorte estirado, y repetirá el movimiento con un periodo:  $T = 2\pi \cdot [(m + I^{CM}/R^2) / k]^{1/2}$ .

En cuanto a la compresión máxima del resorte, tengamos en cuenta que la energía mecánica se conserva, dado que la fuerza de roce no ejecuta trabajo en rodadura y la otra fuerza que aparece en el sentido del movimiento es conservativa.

$$E_{MA} = E_{M_{x_{m\acute{a}x}}} \iff \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2} I^{CM} \cdot \omega_0^2 + \frac{1}{2} k \cdot x_0^2 = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Por rodadura:  $\omega_0 = v_0 / R \iff x_{m\acute{a}x} = [x_0^2 + ((I^{CM} / k R^2) + m/k) \cdot v_0^2]^{1/2}$

En el punto B, en donde el resorte tiene su longitud natural:  $E_{MA} = E_{MB}$

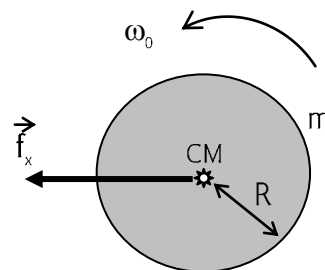
$$\therefore \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2} I^{CM} \cdot \omega_0^2 + \frac{1}{2} k \cdot x_0^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_{CMB}^2 + \frac{1}{2} I^{CM} \cdot v_{CMB}^2 / R^2$$

$$v_{CMB} = \left[ [v_0^2 \cdot m + I^{CM} \cdot \omega_0^2 + k \cdot x_0^2] / [m + (I^{CM} / R^2)] \right]^{1/2}$$

b) Si  $\mu=0$  y  $v_0=0$ :

$$f_x = -k \cdot x = m \cdot a_{CM}$$

$$\curvearrowright a_{CM} = - (k/m) \cdot x \iff \text{¡ Es un MAS del CM !}$$



El periodo de este MAS es:  $T = 2\pi \cdot (m/k)^{1/2}$

En cuanto a la rotación:  $\sum M^{CM} = I^{CM} \cdot \alpha$

$$0 = I^{CM} \cdot \alpha \iff \alpha = 0$$

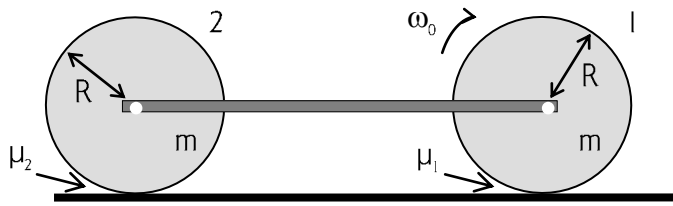
Luego, en todo instante,  $\omega = \omega_0$ . El cilindro comprimirá el resorte, y, en la máxima compresión, cuando el CM está detenido, seguirá girando con la misma velocidad angular, en el mismo sentido. Y así a lo largo de todo el recorrido del MAS.

.....

### Ejemplo 131

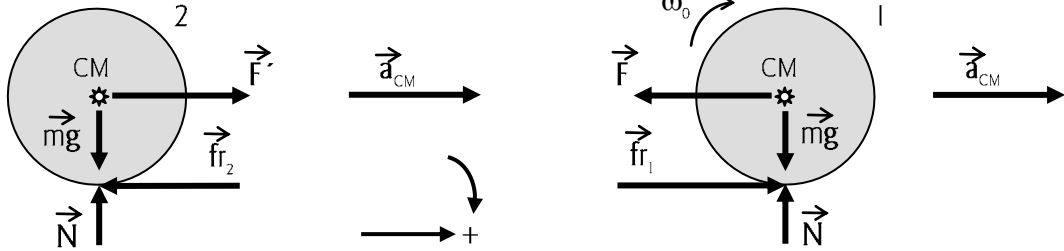
Dos cilindros macizos idénticos están unidos por una barra rígida de masa despreciable, que liga sus ejes sin roce. Este sistema se apoya sobre un piso horizontal que tiene distintos coeficientes de rozamiento para cada rodillo (ver figura), en momentos en que el cilindro I

gira con una velocidad angular  $\omega_0$ . El cilindro 2 no gira en ese instante.



Calcular el tiempo que el cilindro 1 tarda en llegar a la condición de rodadura y el  $\mu_2$  necesario para que el cilindro 2 siempre cumpla con dicha condición.

Solución:



$$F' - fr_2 = m \cdot a_{CM} \qquad F = F' \qquad fr_1 - F = m \cdot a_{CM} \quad (1)$$

$$R \cdot fr_2 = I^{CM} \cdot \alpha \qquad fr_1 = \mu_1 \cdot mg \qquad - R \cdot fr_1 = I^{CM} \cdot \alpha_1 \quad (2)$$

$$R \cdot \alpha = a_{CM} \quad (\text{el cilindro 2 siempre está en rodadura})$$

$$F' - I^{CM} \cdot \alpha / R = m \cdot a_{CM} \iff F' = F = [(I^{CM} / R^2) + m] \cdot a_{CM}$$

En (1):  $\mu_1 \cdot mg - [(I^{CM} / R^2) + m] \cdot a_{CM} = m \cdot a_{CM}$

$$I^{CM} = \frac{1}{2} m R^2 \iff \underline{a_{CM} = \frac{2}{5} \mu_1 \cdot g}$$

De (2):  $\underline{\alpha_1 = - R \cdot fr_1 / I^{CM} = - \frac{2 \cdot \mu_1 \cdot g}{R}}$

Las ecuaciones de movimiento del cilindro 1 resultan:

$$\left. \begin{aligned} v_{CM} &= a_{CM} \cdot t \\ \omega &= \omega_0 - \alpha_1 \cdot t \end{aligned} \right\} \text{ en rodadura: } v_{CM} = \omega \cdot R \left. \right\} a_{CM} \cdot t_r = R \cdot \omega_0 - R \cdot \alpha_1 \cdot t_r$$

$$\boxed{t_r = \frac{5}{12} \omega_0 \cdot R / \mu_1 \cdot g}$$

Finalmente, para que el cilindro 2 esté siempre en rodadura:  $fr_{2 \text{ máx}} = \mu_2 \cdot mg$

$$\text{De: } R \cdot fr_2 = I^{CM} \cdot \alpha \iff fr_{2 \text{ máx}} \geq I^{CM} \cdot \alpha / R \iff \mu_2 \cdot mg \geq I^{CM} \cdot \alpha / R$$

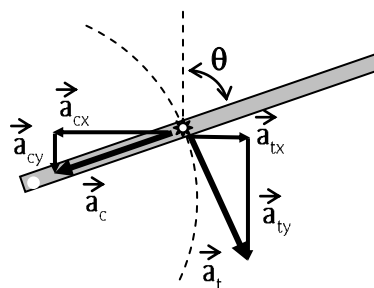
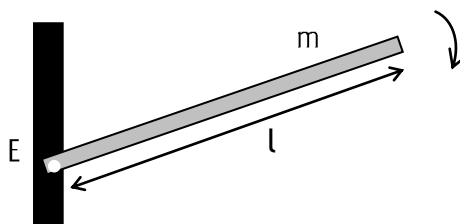
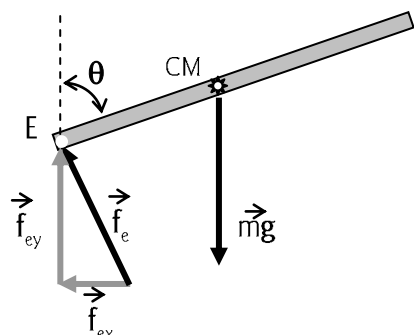
Como  $\alpha = a_{CM} / R$ , resulta:  $\boxed{\mu_2 \geq \mu_1 / 5}$

**Ejemplo 132**

La barra de la figura, en el plano vertical, está sujeta a un eje fijo horizontal sin roce y cae por

su peso. Expresar la fuerza que el eje E ejerce sobre la barra, a medida que ésta cae.

Solución:



$$\Sigma F_x = -f_{ex} = m \cdot a_x \quad ; \quad a_x = -a_{cx} + a_{tx} = -a_c \cdot \sin \theta + a_t \cdot \cos \theta$$

$$\Sigma F_y = -f_{ey} + mg = m \cdot a_y \quad ; \quad a_y = a_{cy} + a_{ty} = a_c \cdot \cos \theta + a_t \cdot \sin \theta$$

Por lo tanto:  $a_c = \omega^2 \cdot l/2$  y  $a_t = \alpha \cdot l/2$

Por otro lado:  $\alpha = \Sigma M^E / I^E = mg \cdot [(l/2) \cdot \sin \theta] / I^E$

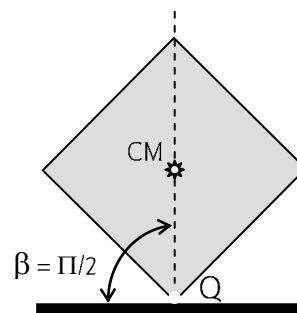
mientras que  $\omega$  se puede calcular a través de:  $W_{todas} = \Delta E_c \implies W_{mg} = I^E \cdot \omega^2 / 2$

Ahora se tienen todos los datos como para expresar  $f_{ex} = f(\theta)$ ,  $f_{ey} = f(\theta)$  y por consiguiente  $f_e = f(\theta)$ , ya que  $f_e^2 = f_{ex}^2 + f_{ey}^2$ .

.....

### Ejemplo 133

Una chapa cuadrada homogénea, de masa  $m$  y lado  $l$ , se encuentra articulada en  $Q$ , con un piso horizontal. Si se la libera desde la posición indicada, y la articulación no ofrece roce, calcular:



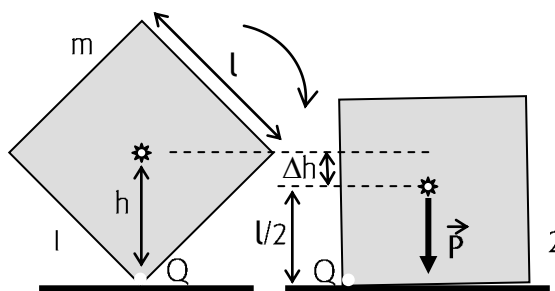
- La velocidad angular que adquirirá justo antes de que uno de sus lados toque el suelo.
- El módulo de la fuerza que la articulación ejerce sobre la chapa en ese instante.

Solución:

a) La energía mecánica en la posición 1 será igual a la energía mecánica en la posición 2, ya que la única fuerza que ejecuta trabajo es conservativa: el peso.

$$EM_1 = EM_2 \quad \therefore \quad Ep_1 = Ec_2 + Ep_2$$

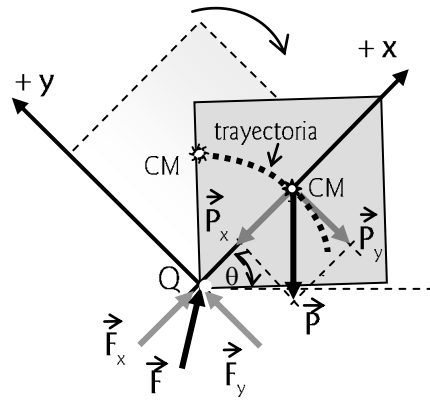
$$mg \cdot l \cdot 2^{1/2} / 2 = \frac{1}{2} I^Q \cdot \omega^2 + mg \cdot l/2$$



Pero:  $I^Q = m \cdot l^2 / 6 + m \cdot h^2 = 2/3 m \cdot l^2$ . Luego:

$$\omega^2 = 3g \cdot (2^{1/2} - 1) / 2 \cdot l$$

b) Calcularemos la fuerza que la articulación ejerce sobre la chapa a través de sus vectores componentes  $\vec{F}_x$  y  $\vec{F}_y$ , y descompondremos también a  $\vec{P}$  sobre los ejes  $x$  e  $y$  para calcular las componentes centrípeta ( $a_c$ ) y tangencial ( $a_t$ ) de la aceleración del centro de masas.



$$\Sigma \vec{f} = m \cdot \vec{a}_{CM} \begin{cases} \Sigma f_x = F_x - P_x = F_x - P \cdot \sin \theta = \\ = F_x - mg \cdot 2^{1/2} / 2 = m \cdot a_c \quad (1) \\ \Sigma f_y = F_y - P_y = F_y - P \cdot \cos \theta = \\ F_y - mg \cdot 2^{1/2} / 2 = m \cdot a_t \quad (2) \end{cases}$$

$$\Sigma M^Q = I^Q \cdot \alpha \iff P \cdot l/2 = 2/3 m \cdot l^2 \cdot \alpha \iff \alpha = 3/4 g/l$$

$$a_t = \alpha \cdot R = \alpha \cdot l \cdot 2^{1/2} / 2 = 3/8 g \cdot 2^{1/2}$$

$$a_c = \omega^2 \cdot R = [3g \cdot (2^{1/2} - 1) / 2 \cdot l] \cdot l \cdot 2^{1/2} / 2 = 3/4 g \cdot (2^{1/2} - 1) \cdot 2^{1/2}$$

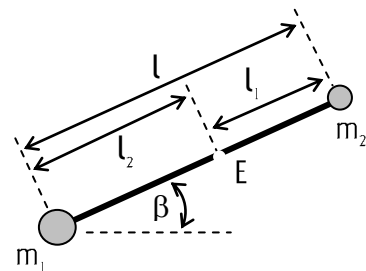
Remplazando en (1) y (2):  $F_x = mg \cdot (6 - 2^{1/2}) / 4$        $F_y = 7/8 mg \cdot 2^{1/2}$

Por lo tanto, el módulo que pide el enunciado vale:

$$F = \{ [mg \cdot (6 - 2^{1/2}) / 4]^2 + [7/8 mg \cdot 2^{1/2}]^2 \}^{1/2}$$

**Ejemplo 134**

Una varilla sin peso, que tiene fijas en sus extremos las masas puntuales  $m_1$  y  $m_2$ , está suspendida del eje E horizontal sin roce y se encuentra sujeta, en reposo, formando el ángulo  $\beta$  que indica la figura. Calcular la velocidad de la masa  $m_1$  en el instante en que la varilla, una vez liberada, pasa por la dirección vertical.

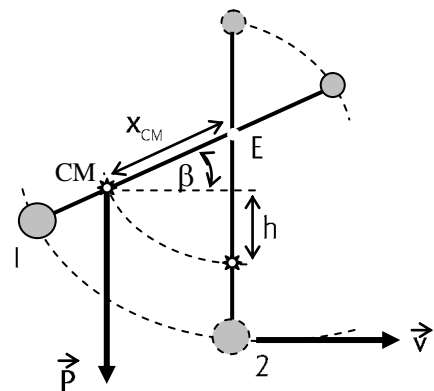


DATOS:  $m_1$ ;  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ );  $l$ ;  $l_1$ ;  $\beta$

Solución:

El conjunto *masas-varilla* es un cuerpo rígido, que tiene un CM por el que pasa la fuerza peso que genera un momento respecto de E, y por consiguiente una aceleración angular *variable*.

Siendo las fuerzas externas el peso total  $\vec{P}$  y la fuerza  $\vec{f}_e$  que el eje E ejerce sobre la varilla, la energía mecánica del conjunto se conserva dado que la única fuerza que ejecuta trabajo es  $\vec{P}$ .





$$E_{M_1} = E_{M_2} \quad ; \quad P = m_T \cdot g \quad ; \quad m_T = m_1 + m_2 \quad ; \quad m_T \cdot g \cdot \underbrace{x_{CM} \cdot (1 - \text{sen } \beta)}_h = \frac{1}{2} I^E \cdot \omega^2$$

$x_{CM}$  se calcula de acuerdo a lo visto en *SISTEMAS de PARTÍCULAS*. De manera que de la anterior se obtiene  $\omega$ , y con este valor la rapidez  $v$  solicitada:

$$v = \omega \cdot l_2$$

Observación: En ejercicios como éste, en el que se ve a partículas describir trayectorias circulares, algunos alumnos tienen la tendencia de plantear las ecuaciones horarias correspondientes al MCV por el hecho de que existe aceleración. Esto está mal, porque la aceleración angular no es constante:  $\alpha = \sum M^E / I^E = P \cdot x_{CM} \cdot \cos \beta / I^E$ .

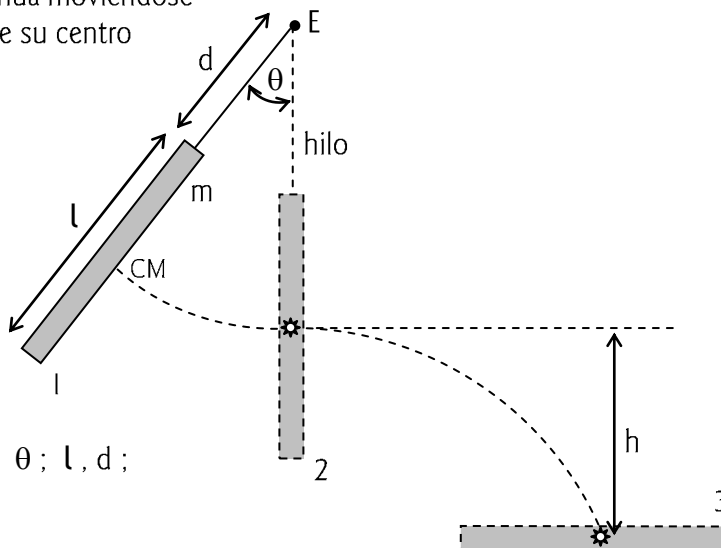
¡  $\alpha$  depende de  $\beta$ , como puede verse !

.....

### Ejemplo 135

Una varilla delgada cuelga de un hilo atado al clavo E, como muestra la figura, y se la suelta desde el reposo en la posición 1. La varilla llega a la dirección vertical, 2, en la que se corta el hilo y a partir de la cual continúa moviéndose libremente y girando en torno de su centro de masas.

Calcular la distancia  $h$  que recorre el CM durante el tiempo en que la varilla pasa de la dirección vertical a la horizontal (posición 3).



DATOS:  
varilla homogénea de masa  $m$ ;  $\theta$ ;  $l$ ,  $d$ ;

Solución:

Mientras la varilla está colgada del hilo, su centro de masas describe una trayectoria circular; ni bien se corta el hilo, el CM continúa moviéndose libremente describiendo una parábola, a la vez que la varilla gira en torno suyo en sentido anti horario en el plano de la figura. Por otra parte, dado que sobre la varilla la única fuerza que ejecuta trabajo es  $\vec{P}$  (la tensión del hilo es perpendicular a la trayectoria), se conserva la energía mecánica:

$$E_{M_1} = E_{M_2} \quad \Rightarrow \quad m \cdot g \cdot [(l/2) + d] \cdot (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} I^E \cdot \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega}$$

Como a partir de la posición 2 la varilla gira tan solo bajo la acción de la fuerza peso que pasa por su CM, el movimiento de cualquier punto de la varilla respecto de este CM es un MCV (con  $\omega$  constante). Mientras tanto, el centro de masas describe una trayectoria parabólica con un MRUV en la dirección vertical. Por ello, valen las ecuaciones:

$$\Delta\theta = \pi/2 = \omega \cdot t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} g \cdot t^2 = \boxed{h}$$

.....

La relación entre el momento de la fuerza resultante respecto de un eje fijo y el ímpetu angular del cuerpo rígido respecto de dicho eje, derivó en la ecuación  $\Sigma \vec{M}^E = I^E \cdot \alpha$  que usamos hasta aquí para resolver varios problemas. Pero ahora veamos cómo podemos transformar la relación entre  $\Sigma \vec{M}^E$  y  $\vec{L}^E$  en otra expresión igualmente útil.

$$\Sigma \vec{M}^E = \vec{M}_R^E = d\vec{L}^E/dt \qquad \vec{M}_R^E \cdot dt = d\vec{L}^E$$

Al producto  $\vec{M}_R^E \cdot dt$  se lo llama  $d\vec{G}_R^E$ , y a esta acción en un tiempo finito se la llama *Impulso Angular* de la resultante  $\vec{R}$  respecto de E.

Resulta:  $\int_0^t d\vec{G}_R^E = \int_0^t d\vec{L}^E$   $\vec{G}_R^E = \Delta \vec{L}^E$

De manera que puede expresarse que el *ímpetu angular* de un cuerpo rígido *se conserva* si es nulo el *impulso angular* de las fuerzas externas sobre el CR.

Esta ley de conservación es válida también para una partícula y para un sistema de partículas, considerando a  $\vec{L}_{sis}^E$  como la suma de los ímpetus angulares de las partículas componentes del sistema, según se ha visto.

En cuanto al hecho físico, obsérvese la analogía entre la expresión  $\vec{G}_R^E = \Delta \vec{L}^E$  y la correspondiente a la relación entre el impulso lineal y el ímpetu lineal:  $\vec{J}_R = \Delta \vec{p}$ .

En un caso hablamos de relaciones angulares, y en el otro caso de relaciones lineales. Pero hay un vínculo entre las mismas, que se puede deducir así:

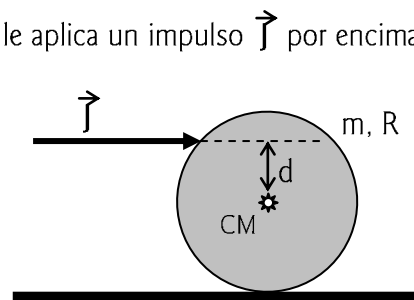
$$\vec{G}_R^E = \int_0^t \vec{M}_R^E \cdot dt = \int_0^t (\vec{r}^E \wedge \vec{F}) \cdot dt = \vec{r}^E \wedge \int_0^t \vec{F} \cdot dt = \vec{r}^E \wedge \vec{J}$$

$\vec{r}^E \wedge \vec{J} = \Delta \vec{L}^E$

**Ejemplo 136**

A una esfera apoyada sobre una superficie horizontal se le aplica un impulso  $\vec{J}$  por encima de su ecuador, como muestra la figura.

Calcular la distancia  $d$  entre el CM y la dirección del impulso para que la esfera entre en rodadura inmediatamente después del golpe. Decir, justificando, si debe haber roce entre la esfera y la superficie sobre la que se apoya, para que suceda el efecto de la rodadura.



Solución:

$$\vec{J} = \Delta \vec{p} \quad \Rightarrow \quad J = \Delta p = m \cdot v_{CM} - m \cdot v_{CMi}^0 = m \cdot v_{CM} \quad (1)$$

$$\vec{r}_{CM}^E \wedge \vec{J} = \Delta \vec{L}_{CM}^E \quad \Rightarrow \quad d \cdot J \cdot \text{sen } \Pi/2 = I^{CM} \cdot \omega - I^{CM} \cdot \omega_i^0 = I^{CM} \cdot \omega \quad (2)$$

Rodadura  $\Leftrightarrow v_{CM} = \omega \cdot R \quad (3)$

Combinando (1), (2), y (3):

$$d = 2/5 R$$

En cuanto al roce, se observa que no aparece  $\mu$  en el análisis. La esfera entra en rodadura si el impulso  $\vec{J}$  está a  $2/5$  de  $R$ , haya o no una superficie rugosa de apoyo.

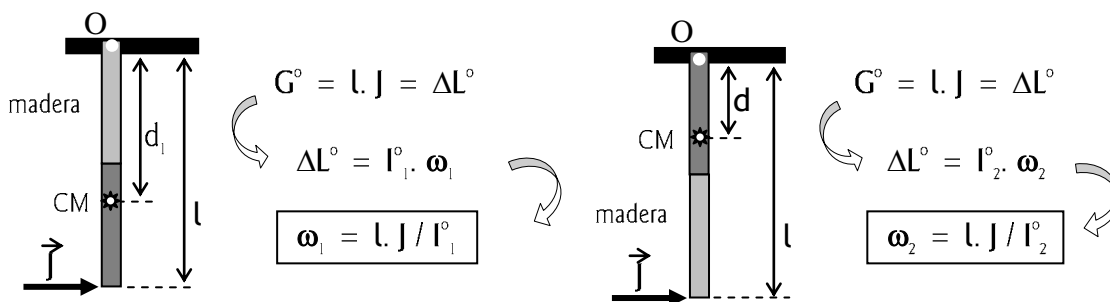
.....

### Ejemplo 137

Una barra de sección uniforme está compuesta por una mitad de madera y una mitad de hierro. Se sujeta en el techo con una articulación sin roce, y se le aplica un impulso en el extremo de hierro. Luego se sujeta en el extremo de hierro y se le aplica el mismo impulso en el extremo de madera. Responder si en ambos casos se obtiene la misma velocidad angular, al cabo del impulso.

Solución:

En las ecuaciones que siguen trataremos directamente con los componentes de los vectores,  $\vec{G}^\circ$ ,  $\vec{L}^\circ$  y  $\vec{\omega}$ , dado que estos tienen la misma dirección y el mismo sentido.



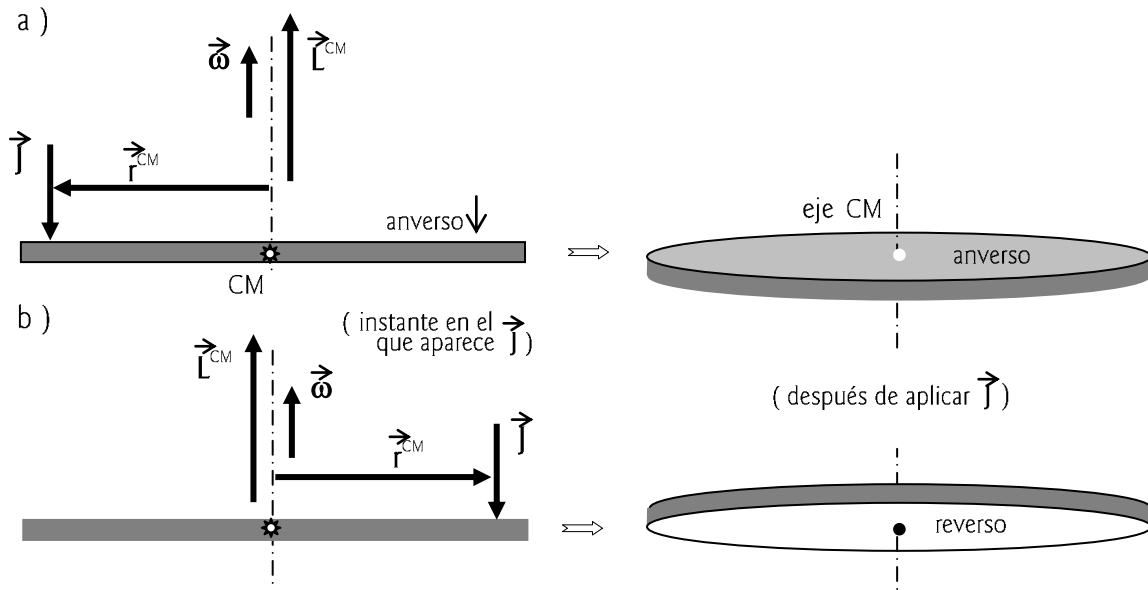
El centro de masas señalado en las figuras es el correspondiente a toda la barra. Naturalmente, CM se encuentra del lado del hierro, por ser éste de mayor densidad que la madera; por lo que el momento de inercia mayor se da cuando el hierro está más alejado de la articulación. Es decir,  $I_1^\circ > I_2^\circ$ . Se desprende entonces que no son iguales las velocidades angulares que se obtienen en una u otra situación; se cumple:

$$\omega_2 > \omega_1$$

.....

Es difícil apreciar en la práctica la veracidad del resultado obtenido en el *Ejemplo 136*. En el juego del billar se puede observar que un golpe encima del ecuador de la bola ocasiona un movimiento que a veces se inicia con la esfera patinando; aunque, desde ya que un golpe por debajo del ecuador provoca *con seguridad* un deslizamiento o una patinada, ya que el punto de la bola en contacto con el paño no adquiere inicialmente una velocidad cero.

Otra manera práctica de verificar la ecuación  $\vec{r}^{CM} \wedge \vec{J} = \Delta \vec{L}^{CM}$  es con un plato de cartón al que puede hacerse girar horizontalmente a mano, colgado de un hilo que pasa por un agujero ubicado en su centro de masas. Se observa que en estas condiciones cambia el plano del plato después de un golpe de dirección vertical aplicado en uno u otro de sus extremos ...



Si tomamos la regla del tirabuzón para  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{L}^{CM}$ ,  $\vec{M}$  y  $\vec{G}$ , en el caso a) el vector impulso angular  $\vec{G}^{CM} = \vec{r}^{CM} \wedge \vec{J}$  tiene el sentido saliente a este papel. Esto se debe a que, como en todos los productos vectoriales, el sentido del vector resultante se obtiene rebatiendo al primero sobre el segundo; en este caso, al rebatir a  $\vec{r}^{CM}$  sobre  $\vec{J}$  el giro es antihorario y por lo tanto, de acuerdo a la regla del tirabuzón, el vector resultante es saliente. Es decir, resulta saliente  $\Delta \vec{L}^{CM}$  que tiene el mismo sentido que  $\vec{G}^{CM}$ ; por lo tanto resulta saliente el vector  $\vec{L}^{CM}$  que, siendo perpendicular a la cara del disco (plato), hace girar a éste mostrando su anverso.

El mismo análisis se hace para el caso b), con lo que queda justificado el hecho de que luego del golpe ( $\vec{J}$ ) el plato muestre su reverso.

### Ejemplo 138

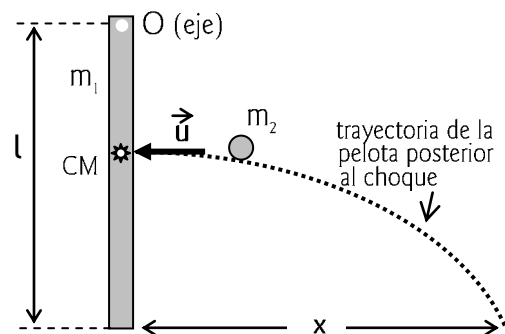
Una varilla rígida, que cuelga verticalmente de un eje horizontal sin roce, es golpeada por una pelota como muestra la figura. a) Decir qué magnitudes se conservan, y por qué. b) Hallar el máximo ángulo  $\theta$  que la varilla toma respecto de la vertical. c) Para esa posición de máximo apartamiento determinar la aceleración del centro de masas de la varilla, y hallar las fuerzas en el eje.

DATOS:

$$m_1 = 1 \text{ kg} ; l = 0.1 \text{ m} ; m_2 = 0.1 \text{ kg} ;$$

$$x = 0.1 \text{ m} ; u = 10 \text{ m/s} ; g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$I^o = 1/3 m_1 \cdot l^2$$



Solución:

a) Se conserva  $\vec{L}_{\text{sis}}^o$  porque, durante el choque, no hay momentos de fuerzas externas

respecto de "O" (las direcciones de  $\vec{m}_1\vec{g}$  y  $\vec{m}_2\vec{g}$  pasan por O) ; se conserva la energía mecánica de la varilla a partir del choque, porque no hay fuerzas de roce en el eje y la única fuerza que realiza trabajo es la del peso de la varilla (la fuerza que el eje ejerce sobre la misma no se desplaza).

b)  $\vec{L}_{\text{sis}}^o = \text{cte.} \implies \vec{L}_{\text{sis i}}^o = \vec{L}_{\text{sis f}}^o \implies m_2 \cdot u \cdot l/2 + 0 = I^o \cdot \omega - m_2 \cdot v \cdot l/2$

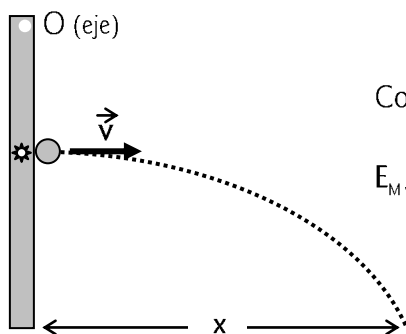
$x = v \cdot t \quad ; \quad \frac{1}{2} g \cdot t^2 = l/2$

Combinando las ecuaciones precedentes:  $\omega = 16.5 \text{ 1/s}$

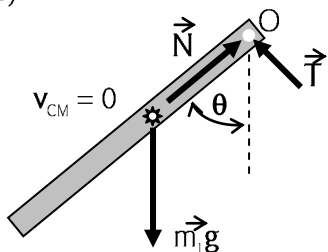
$E_{M \text{ varilla}} = \text{cte.} \implies m_1 \cdot g \cdot (l/2) \cdot (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} I^o \cdot \omega^2$

$\therefore$

$\theta = 84.7^\circ$



c)



$\sum M^o = I^o \cdot \alpha \implies m_1 \cdot g \cdot (l/2) \cdot \text{sen } \theta = I^o \cdot \alpha$

$\therefore$

$a_t = (l/2) \cdot \alpha = 7.47 \text{ m/s}^2$   
 $a_c = 0$

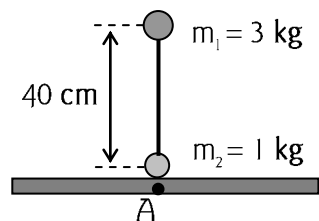
$N - m_1 \cdot g \cdot \cos \theta = m_1 \cdot a_c = 0 \implies N = 0.92 \text{ N}$

$m_1 \cdot g \cdot \text{sen } \theta - T = m_1 \cdot a_t \implies T = 2.48 \text{ N}$

.....

**Ejemplo 139**

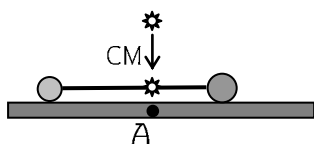
Una masa  $m_1$  está unida a otra masa  $m_2$  mediante una barra rígida de masa despreciable. Se apoya el conjunto sobre una superficie horizontal lisa, como indica la figura (barra rígida vertical), y luego se lo suelta tras desequilibrarlo levemente.



a) ¿A qué distancia de A choca la masa  $m_1$  contra el piso? b) ¿Qué magnitudes se conservan durante la caída?

Solución:

a) Las fuerzas externas a este CR son  $\vec{P}$  y  $\vec{N}$ , ambas verticales que pasan por el centro de masa. Por lo tanto éste se acelerará y caerá verticalmente sobre el punto de apoyo A, mientras que  $m_1$  golpea al piso a una distancia  $x_{CM}$ :



$x_{CM} = (m_1 \cdot 40 + m_2 \cdot 0) / (m_1 + m_2) = 30 \text{ cm}$

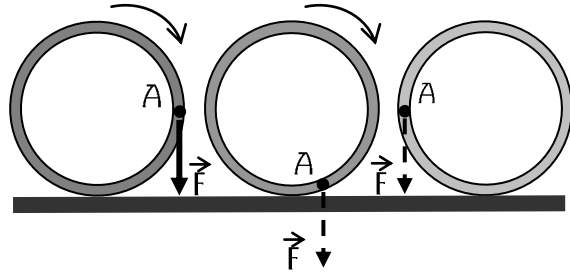
De manera que  $m_1$  cae a 10 cm de A.

b) Se conserva la *energía mecánica*. De las dos fuerzas que actúan solamente la fuerza conservativa “peso” es la que ejecuta trabajo, puesto que  $\vec{N}$  se desplaza en forma perpendicular a su dirección. Por otra parte  $\vec{N}$  genera un momento respecto del CM que hace que  $\vec{L}^{CM}$  no sea constante.

.....

**Ejemplo 140**

Un cilindro hueco de masa  $m$  y radio  $R$  descansa sobre una mesa horizontal. Sobre el cilindro actúa la fuerza  $\vec{F}$  de magnitud igual a  $m\vec{g}$  y dirección siempre vertical, aplicada en el punto  $A$ . Si el cilindro se libera desde la posición de reposo y rueda sin deslizar, describir el movimiento de su CM (si es MRU, dar su velocidad; si es un MRUV, dar su aceleración; si es otro tipo de movimiento, dar sus características).



Solución:

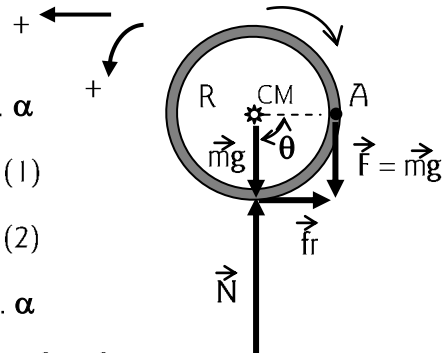
$$\sum M^{CM} = I^{CM} \cdot \alpha \Rightarrow -F \cdot R \cdot \sin \theta + f_r \cdot R = m \cdot R^2 \cdot \alpha$$

$$\sum F = m \cdot a_{CM} \Rightarrow f_r = m \cdot a_{CM} = m \cdot R \cdot \alpha \quad (1)$$

Si  $\sin \theta \cong \theta$ :  $-mg \cdot R \cdot \theta + f_r \cdot R = m \cdot R^2 \cdot \alpha \quad (2)$

Combinando (1) y (2):  $-g \cdot \theta - R \cdot \alpha = R \cdot \alpha$

$$\therefore -(g/2R) \cdot \theta = \alpha = d^2\theta/dt^2$$



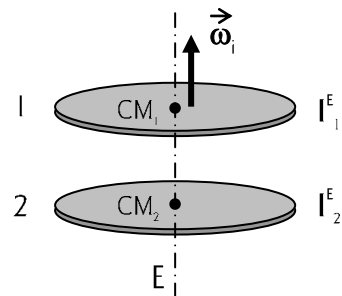
Es decir, para  $\theta$  pequeños se trata de un MCAS con  $\omega^2 = g/2R$ . De donde surge que el cilindro oscila en esas condiciones con un periodo  $T = 2\pi \cdot (2R/g)^{1/2}$ .

Como lo que se estaba tratando en los últimos ejercicios era la cuestión del ímpetu angular y de susy de las leyes de conservación, es bueno que contestes si alguna magnitud física se conserva, justificando la respuesta.

.....

**Ejemplo 141**

El disco 1 gira con  $\omega_1$  y cae sobre el disco 2 que se halla en reposo sobre una mesa sin roce. Luego, por roce entre los discos, ambos quedan adheridos y terminan girando a la velocidad angular  $\omega$ .



a) ¿Qué magnitud se conserva? b) ¿Cuánto vale  $\omega$ ?

Solución:

a) Se conserva  $\vec{L}_{\text{sis}}^E$ , porque no hay fuerzas externas que generen  $\vec{M}^E$ . En cambio no se conserva  $E_{\text{c}_{\text{sis}}}$  porque hay fuerzas internas (roce) que generan trabajo, como queda demostrado en el inciso siguiente.

b) Si:  $L_{\text{sis}}^E = \text{cte.} \iff L_{\text{sis i}}^E = L_{\text{sis f}}^E$   
 $\therefore I_1^E \cdot \omega_i = (I_1^E + I_2^E) \cdot \omega \iff \omega = [I_1^E / (I_1^E + I_2^E)] \cdot \omega_i$

En cuanto a  $E_{\text{c}_{\text{sis}}}$ :  $E_{\text{c}_{\text{sis i}}} = \frac{1}{2} I_1^E \cdot \omega_i^2$   
 $E_{\text{c}_{\text{sis f}}} = \frac{1}{2} (I_1^E + I_2^E) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} (I_1^E + I_2^E) \cdot [I_1^E / (I_1^E + I_2^E)]^2 \cdot \omega_i^2$

Comparando ambas expresiones es fácil observar que  $E_{\text{c}_{\text{sis f}}} < E_{\text{c}_{\text{sis i}}}$ . La pérdida de energía se debe al roce entre los discos, que genera elevación de temperatura en los mismos.

.....

Todos los casos contemplados hasta ahora fueron sobre objetos planos, o, en caso de figuras de revolución, objetos que podrían considerarse compuestos por rodajas planas paralelas y superpuestas. Para todos ellos se cumplía que el vector  $\vec{\omega}$  era paralelo al vector ímpetu angular  $\vec{L}$ . Pero veamos ahora, a través de un caso particular, cómo a veces no se da esta situación.

Tomemos a un cuerpo rígido formado por dos masas puntuales unidas por una barra sin masa en forma de "zeta". Si las masas y la barra se encuentran en el plano de este papel, y se pretende hacer girar al conjunto en torno a un eje que pasa por el tramo central de la barra, cuando la masa  $m_1$  sale del papel (se indica con un punto - "la punta de la flecha" del vector  $\vec{p}_1$  -), la masa  $m_2$  estará penetrando en el mismo (se indica con una cruz - parte trasera de la flecha del vector  $\vec{p}_2$  -). Al cabo de media vuelta  $m_1$  entra y  $m_2$  sale.

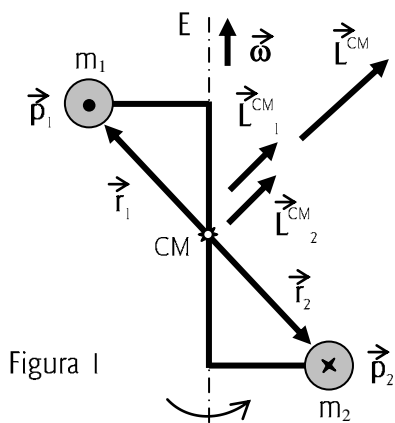


Figura 1

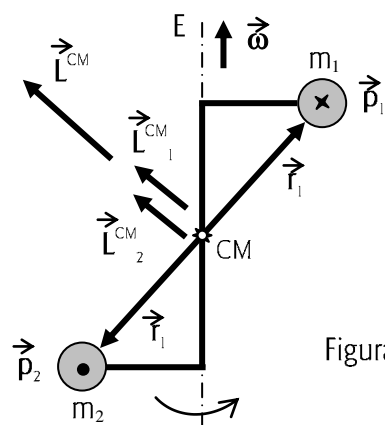


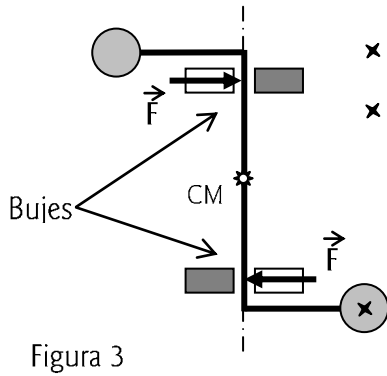
Figura 2

Las direcciones y los sentidos de los vectores  $\vec{L}_{\text{CM}_i}^{\text{CM}}$  se obtienen rebatiendo a los vectores  $\vec{r}_i$  (respecto del CM) sobre los vectores  $\vec{p}_i$ , como sucede en cada producto vectorial:

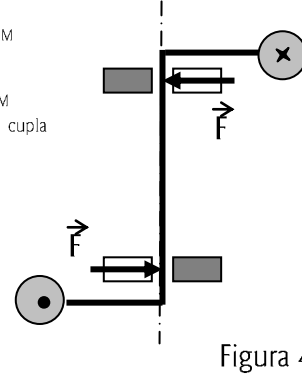
$$\vec{L}_{\text{CM}_1}^{\text{CM}} = \vec{r}_1 \wedge \vec{p}_1 \qquad \vec{L}_{\text{CM}_2}^{\text{CM}} = \vec{r}_2 \wedge \vec{p}_2 \qquad \vec{L}^{\text{CM}} = \vec{L}_{\text{CM}_1}^{\text{CM}} + \vec{L}_{\text{CM}_2}^{\text{CM}}$$

Al girar el CR manteniendo a  $\vec{\omega}$  constante, el vector  $\vec{L}^{\text{CM}}$  gira también describiendo un

cono. Es decir, no se mantiene paralelo a  $\vec{\omega}$  ni permanece constante (solo su módulo es constante). Por lo que debe existir un momento de fuerzas externas respecto del CM para generar esta variación de  $\vec{L}^{CM}$ . Es imposible, pues, que un cuerpo de estas características pueda girar libremente en torno a un eje como E, "entre las estrellas". Hace falta una guía o una "sujeción" que genere el momento mencionado para que ello sea posible, como se muestra en las figuras siguientes:



$$\begin{aligned} \times d\vec{L}^{CM} \\ \times \vec{M}^{CM}_{cupla} \\ \vec{M}^{CM}_{cupla} = d\vec{L}^{CM}/dt \\ \text{sentido } \vec{M} = \text{sentido } d\vec{L} \end{aligned}$$



En la Figura 1 hay un  $d\vec{L}^{CM}$  entrante al papel, porque el vector  $\vec{L}^{CM}$  gira describiendo un cono y su punta penetra en el caso del giro del CR indicado. Por lo tanto debe haber un momento también entrante al papel, generado por el par de bujes que obligan al brazo central de la "z" a mantenerse derecho. Las flechas dibujadas en la Figura 3 son los vectores fuerza que los bujes aplican al eje y que son parte de la cupla cuyo sentido es entrante, si aplicamos la regla del tirabuzón.

Un análisis similar vale para la Figura 2 en la que  $\vec{L}^{CM}$  está en el plano del papel, pero girando y generando un  $d\vec{L}^{CM}$  saliente que únicamente puede ser provocado por un momento también saliente ( ver Figura 4 ).

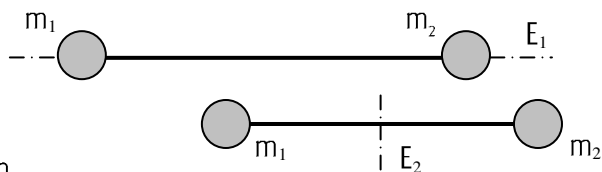
Si bien  $\vec{L}^{CM}$  no es paralela a  $\vec{\omega}$  para este cuerpo rígido girando forzosamente como viéramos, hay una componente de  $\vec{L}^{CM}$  que sí es paralela al vector  $\vec{\omega}$ . ¡ Debes intentar demostrar que esa componente,  $L^{CM}_{//}$ , es igual a:  $I^{CM} \cdot \omega$  !

Cualquiera sea la forma de un cuerpo rígido, existen tres ejes pasantes por su CM para los que se cumple  $\vec{L}^{CM} // \vec{\omega}$ .

*Esos ejes se llaman ejes principales de inercia, y son perpendiculares entre sí.*

Alrededor de esos ejes el CR puede girar libremente en el espacio sin necesidad de fuerzas externas, ya que  $\vec{L}^{CM}$  es constante. En el ejemplo que se está desarrollando, son ejes principales de inercia:

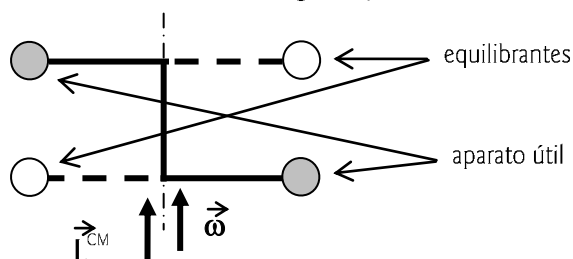
- \* el que pasa por las masas ( $E_1$ ):
- \* el que es normal al plano del CR ( $E_2$ ):
- \* el que es perpendicular al plano formado por los anteriores.



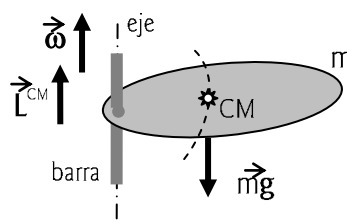
Si se desea facilitar la rotación de un cuerpo rígido como el de la barra en forma de "z", al que había que aplicar bujes fijos para que pudiese girar de la manera deseada, pueden agregarse



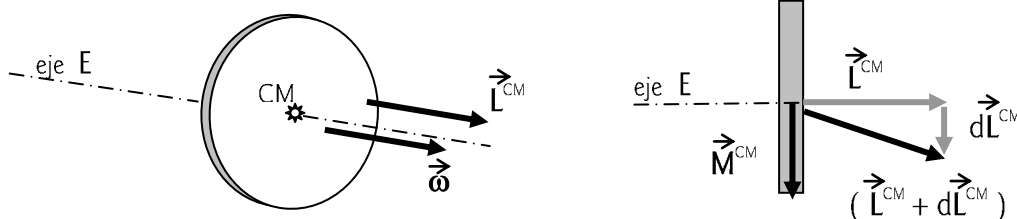
masas que, aunque no signifiquen piezas útiles en el aparato, logren para el conjunto un ímpetu angular paralelo al vector velocidad angular ( $\vec{L}^{CM} \parallel \vec{\omega}$ ):



Un CR puede girar con *equilibrio dinámico* ( $\vec{L}^{CM} \parallel \vec{\omega}$ ) y necesitar de auxilio externo. Tal es el caso de la figura siguiente, en la que se ve a un cuerpo rígido girando alrededor de un eje paralelo a un eje principal. En este caso hay *desequilibrio estático*, porque hace falta una fuerza externa (la de la barra) para sostener al disco en el plano de rotación y proporcionarle la aceleración (centrípeta) al centro de masas.



Hemos visto cómo cambia de dirección el vector ímpetu angular ante la aparición de un impulso angular. Veamos ahora qué sucede cuando el impulso no es de corta duración, sino que el momento de fuerzas externas,  $\vec{M}^{CM}_{ext}$ , permanece actuando luego del cambio de dirección inicial de  $\vec{L}^{CM}$ .

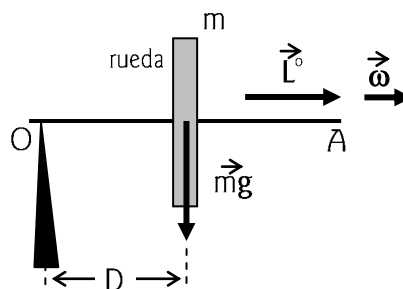


Como  $\vec{M}^{CM} = d\vec{L}^{CM} / dt$ , se ve que la dirección y el sentido de  $\vec{M}^{CM}$  son iguales a la dirección y el sentido de  $d\vec{L}^{CM}$ , lo que se observa en la figura. Pero en realidad no es que aumente el módulo de  $\vec{L}^{CM}$ , sino que gira el plano de la rueda; y si persiste  $\vec{M}^{CM}$  siempre  $\perp$  a cada nueva dirección del ímpetu angular, el giro puede completar vueltas en torno del eje  $\perp$  a este papel, en este caso. En la figura el eje de rotación es E; de manera que lo que podemos decir es que aquí E gira en el plano de este papel.

A la velocidad angular con que gira el eje de rotación se la llama *velocidad de precesión*.

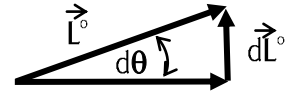
Uno puede intentar sostener a una rueda de bicicleta por la punta de su eje; pero si la rueda no gira, es imposible lograrlo. Ahora, si por algún medio la hacemos girar y apoyamos la punta del eje sobre un soporte (ver figura), en lugar de caer la rueda su eje comienza a rotar en el plano horizontal. ¿Qué sucede? ...

En el caso de la figura, el peso  $\vec{m}g$  genera un momento respecto de O entrante al papel (regla del tirabuzón). Esto hace que se genere una variación de ímpetu angular tal que los vectores  $\vec{M}^O_{mg}$  y  $d\vec{L}^O$  tengan la misma dirección



y el mismo sentido.

El eje O-A comienza a girar horizontalmente, con A penetrando en el papel. Es el movimiento de precesión, cuya velocidad angular es:  $\Omega = d\theta/dt$ .

“Desde arriba”, los vectores  $\vec{L}^\circ$  y  $d\vec{L}^\circ$  se verían así:   $L^\circ \cdot d\theta = dL^\circ$   
 $d\vec{L}^\circ$  hace girar a  $\vec{L}^\circ$  un ángulo  $d\theta$ , de manera que la velocidad angular de precesión resulta:

$$\Omega = d\theta/dt = (dL^\circ/L^\circ)/dt = [dL^\circ/(I^\circ\omega)]/dt = M^\circ / I^\circ \cdot \omega$$

Finalmente,

$$\Omega = mg \cdot D / I^\circ \cdot \omega$$

La ecuación dice que cuanto más grande es la distancia del apoyo (O) del eje al plano de la rueda, habrá mayor momento y mayor será la velocidad de precesión, cuestión que es fácil de demostrar prácticamente.

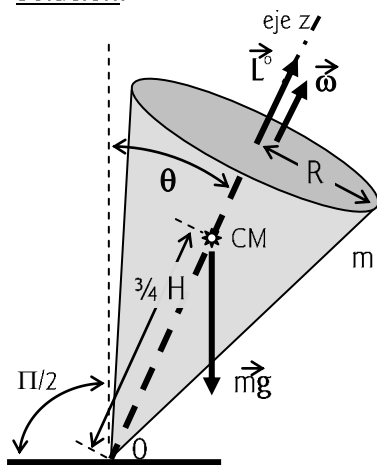
Lo que muestra la experiencia es que no es exactamente horizontal el movimiento de O-A. El eje de rotación comienza a girar, pero el extremo A oscila: primero cae y luego se eleva, para luego volver a caer y a subir ... Este es el movimiento de *nutación* que se superpone al de precesión. La explicación del fenómeno pasa por la conservación de la energía: para una misma cantidad de Joules, si de pronto comienza la precesión debe disminuir la energía potencial para compensar el incremento de la energía cinética; pero al caer la rueda, el eje obliga al apoyo a ejercer mayor fuerza contra el mismo, acelerando al CM de la rueda hacia arriba. Luego se repite el ciclo.

El trompo es un caso clásico en el que se observan estos movimientos. Si se apoya en el piso el eje físico de la rueda que gira, ésta oficia de trompo. El eje describe un cono y, evidentemente, el CM de la rueda gira también. Cabe preguntarse: ¿sucedería esto si la punta del eje se apoya sobre un piso liso? ... ¿Tu qué crees?

**Ejemplo 142**

Un trompo cónico gira apoyado sobre su vértice con una velocidad angular  $\vec{\omega}$ , con su eje inclinado un ángulo  $\theta$  respecto de la vertical. Calcular  $\omega$  si su masa es  $m$ , su altura  $H$ , el radio de su base  $R$  y la velocidad de precesión  $\Omega$ .

Solución:



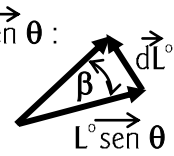
Aquí describe un círculo horizontal el vector  $L^\circ \text{ sen } \theta$ :

$$\therefore \Omega = d\beta/dt = (dL^\circ/L^\circ \text{ sen } \theta)/dt = [dL^\circ/(I^\circ\omega \cdot \text{sen } \theta)]/dt = M^\circ_{mg} / I^\circ\omega \cdot \text{sen } \theta$$

Siendo  $I^\circ = 3mR^2/10$  (pág.190), resulta:

$$\Omega = [ mg \cdot (3/4 H) \cdot \text{sen } \theta ] / [ m \cdot R^2 \cdot \omega \cdot \text{sen } \theta \cdot 3/10 ] = [ 5 \cdot g \cdot H ] / [ 2 \cdot R^2 \cdot \omega ] \quad ; \text{Independiente de } \theta !$$

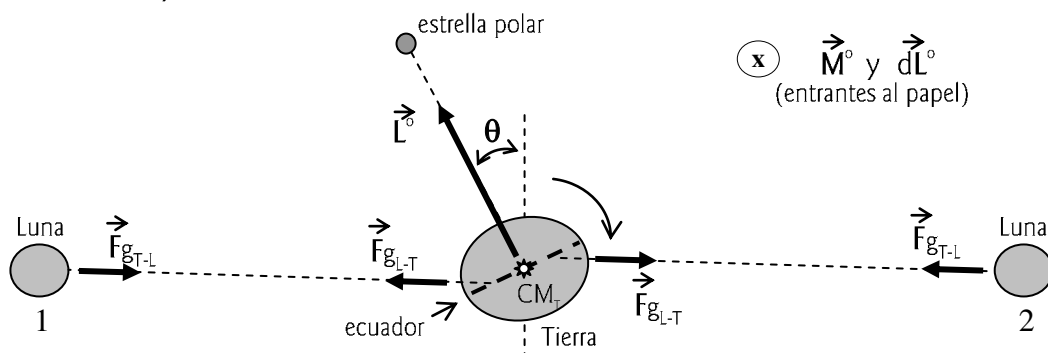
$$\omega = [ 5 \cdot g \cdot H ] / [ 2 \cdot R^2 \cdot \Omega ]$$



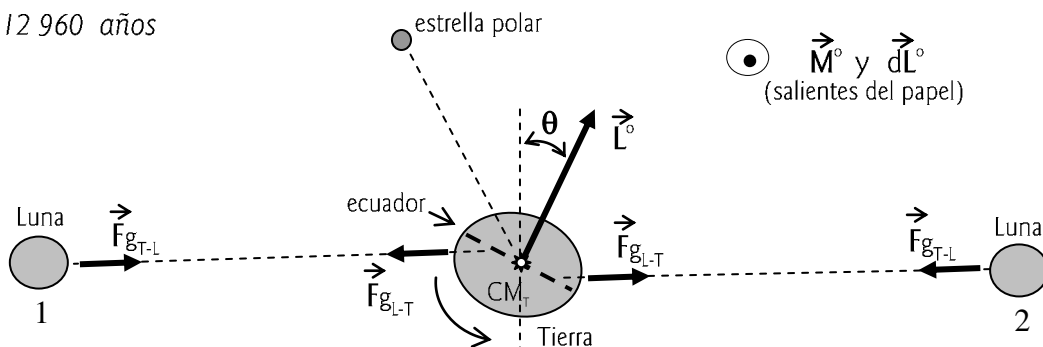
Veamos a continuación, a través de dos ejemplos, cómo la precesión aparece en la rotación de cuerpos celestes y también en el mundo atómico.

La Tierra es un gigantesco trompo que tiene un movimiento de precesión con un periodo de 25 920 años. Las causas de este lento girar del eje terrestre se deben al momento que generan sobre nuestro planeta la Luna y el Sol, si bien el correspondiente a este último es aún más pequeño que el que genera nuestro satélite natural.

a) situación "hoy"



b) situación dentro de 12 960 años



En la ilustración aparece exagerada la excentricidad de la Tierra; pero es ésta la causa del momento que le aplica la Luna, sobre todo en las posiciones 1 y 2, ya que atrae más a la parte cercana de la Tierra que a la que está más lejos; y por lo tanto es la causa por la que rota el ímpetu angular  $\vec{L}^o$ . Como  $\theta$  es del orden de  $23.5^\circ$ , dentro de unos 13 000 años la gente verá que el eje N-S del planeta está apartado de la dirección *Tierra - estrella polar* unos  $47^\circ$ .

En cuanto al "mundo atómico", la técnica de la *resonancia magnética nuclear* utilizada en algunos diagnósticos por imágenes, se basa en el efecto trompo que se consigue sobre los núcleos magnetizados de algunos átomos, mayoritariamente de hidrógeno. El cuerpo del paciente se somete a un campo magnético intenso que orienta a los núcleos atómicos y los obliga a precesionar; luego se superpone a este campo, en el plano estrecho que se quiere visualizar, un campo electromagnético con una frecuencia que se puede ajustar a la de la precesión. Cuando se logra la resonancia, se detecta y registra el conjunto de los átomos "radio receptores", obteniéndose la imagen deseada. La velocidad de precesión es función de la intensidad del campo magnético, como lo es la del trompo respecto del campo gravitatorio.

.....

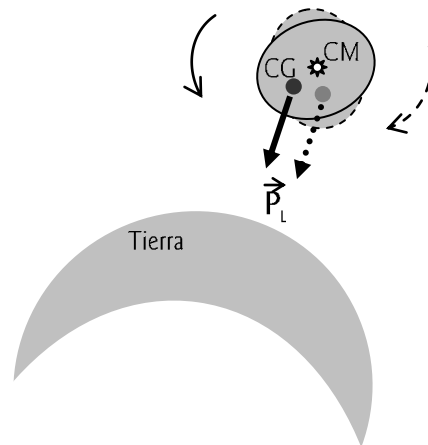
Hasta aquí hemos tomado al centro de masas como el punto en el que estaba aplicada la fuerza peso. Sin darnos cuenta, estábamos considerando en cada ocasión que el cuerpo rígido en estudio se encontraba dentro de un campo gravitatorio de intensidad constante. Despreciábamos el tamaño del cuerpo frente al espacio en el que se encontraba, por lo que era válido considerar a la gravedad como constante ( $\vec{g} = \text{cte.}$ ).

Pero no siempre es así. Veamos.

*CENTRO DE GRAVEDAD*

El peso de un cuerpo sabemos que es la fuerza con que la Tierra, u otro planeta o satélite natural, lo atrae. Pero es también la resultante de las fuerzas de atracción sobre las partículas componentes de dicho cuerpo. Si por las dimensiones de éste algunas partículas son atraídas con mayor fuerza que otras, porque  $\vec{g}$  no es constante, entonces el peso total, la resultante de todos los “pesitos”, pasa por un punto llamado *centro de gravedad*, que no coincide con el *centro de masas*.

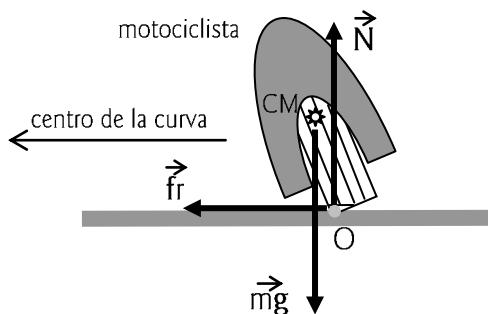
Tal es el caso de la Luna. La cara más cercana a nuestro planeta se encuentra en un campo gravitatorio terrestre más intenso que el que rodea a la cara lunar más alejada. El centro de gravedad de la Luna, pues, no coincide con su CM. Como la Luna posee forma elipsoidal, hace miles de años la fuerza  $\vec{P}_L$  generaba un momento respecto del CM obligando a la Luna a oscilar como un cuadro que se desequilibra, colgado de una pared. La Luna presentaba la misma cara, pero oscilante. Con el tiempo la energía cinética de oscilación alrededor del CM se perdió en el trabajo de las fuerzas internas elásticas de deformación, y la Luna dejó de oscilar para terminar presentando la misma cara, “quieta”, a la superficie de la Tierra.



.....

*CR EN UN SISTEMA NO INERCIAL (SNI)*

Conocemos la experiencia de tener que inclinarnos hacia la concavidad de la curva si doblamos una esquina en bicicleta o en moto. Cuanto más rápidamente giremos, más tendremos que inclinarnos para compensar una fuerza que tiende a tumbarnos hacia afuera.



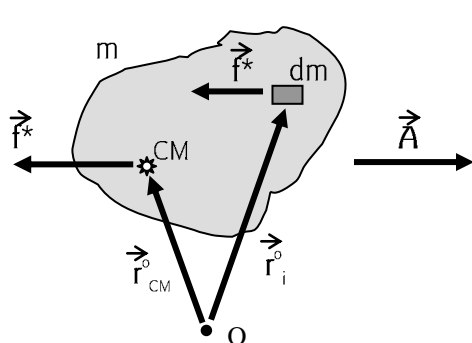
La figura muestra a un motociclista con su moto vistos de atrás y girando hacia la izquierda. La inclinación se busca instintivamente para evitar ser tumbado en el sentido horario por el momento de la fuerza de roce respecto del CM; al inclinarse, el motociclista logra que la dirección de  $\vec{N}$  se corra de la que pasa por el CM, generando así un momento que compensa al anterior.

Ahora, considerando a  $O$  como un punto por el que pasa un eje instantáneo de giro, cabría preguntarse por qué no se produce un vuelco hacia la izquierda debido a la acción del peso, ya que ni  $\vec{N}$  ni  $\vec{f}_r$  generan momentos respecto de ese eje. La respuesta es que siendo el sistema hombre-moto un sistema no inercial con aceleración centrípeta hacia el centro de la curva, aparece una fuerza ficticia que tiene un sentido contrario al de la aceleración que produce un momento que compensa al del peso.

Cabría preguntarse:

¿ Por dónde pasa la fuerza ficticia ( $\vec{f}^*$ ) en un cuerpo rígido ?

El cuerpo rígido de la figura, de masa  $m$ , está acelerado hacia la derecha ( $\vec{A}$ ). Tomando momentos de las fuerzas ficticias respecto de un punto fijo ( $O$ ), se obtiene el siguiente resultado:



$$\begin{aligned} \vec{M}_{f^*}^O &= \sum \vec{M}_{fi}^O = \sum (\vec{r}_i^O \wedge \vec{f}_i) = \\ &= \sum [\vec{r}_i^O \wedge (-\vec{A} \cdot dm)] = \\ &= +\vec{A} \wedge \sum [\vec{r}_i^O \cdot dm] = \\ &= \vec{A} \wedge \vec{r}_{CM}^O \cdot m = \vec{r}_{CM}^O \wedge \underbrace{(-\vec{A} \cdot m)}_{\vec{f}^*} \end{aligned}$$

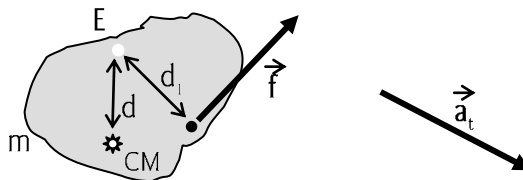
$$\boxed{\vec{M}_{f^*}^O = \vec{r}_{CM}^O \wedge \vec{f}^*}$$

Conclusión: *¿ la fuerza ficticia pasa por el CM !*

.....

### Ejemplo 143

La chapa de la figura se encuentra apoyada sobre una mesa horizontal, lisa, fijada firmemente a un tren que se mueve con aceleración  $\vec{a}_t$ . Sobre la chapa, que puede girar libremente alrededor del eje  $E$  unido a la mesa, actúa la fuerza  $\vec{f}$ , en el punto que se indica.



Calcular la aceleración angular de la chapa respecto de  $E$ .

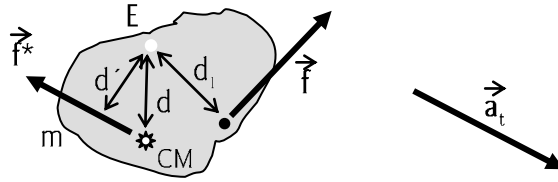
Solución:

Mientras dura la aceleración  $\vec{a}_t$  actúa una fuerza ficticia sobre la chapa, que pasa, como se acaba de demostrar, por su centro de masas. De manera que la fuerza real  $\vec{f}$  tiende a mover la chapa en sentido antihorario, mientras que la fuerza ficticia tiende a girarla en sentido horario.

Con la referencia  $\curvearrowright +$  :

$$\Sigma M^E = + (f \cdot d_1) - (f^* \cdot d') = I^E \cdot \alpha$$

$$|\vec{f}^*| = m \cdot |\vec{a}_t|$$



$$\alpha = [ + (f \cdot d_1) - (f^* \cdot d') ] / I^E$$

La fuerza ficticia que aparece sobre un cuerpo rígido que se encuentra en un sistema no inercial modifica las ecuaciones:

S. I.

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{f} &= m \cdot \vec{a}_{CM} \\ \Sigma \vec{M}^o &= d\vec{L}^o/dt \\ \Sigma M^o &= I^o \cdot \alpha \\ \Sigma W_{reales} &= \Delta Ec \end{aligned}$$

S. N. I.

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{f} + \vec{f}^* &= m \cdot \vec{a}_{CM} \\ \Sigma \vec{M}^o + \vec{M}_{f^*}^o &= d\vec{L}^o/dt \\ \Sigma M^o + M_{f^*}^o &= I^o \cdot \alpha \\ \Sigma W_{reales} + W_{f^*} &= \Delta Ec \end{aligned}$$

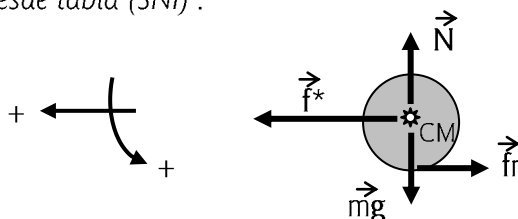
**Ejemplo 144**

Un cilindro homogéneo, de masa  $m$  y radio  $R$ , se encuentra en reposo sobre una tabla horizontal. El coeficiente de roce entre ellos vale  $\mu$ . De pronto se le comunica a la tabla una aceleración constante,  $\vec{a}$ , en dirección horizontal perpendicular al eje del cilindro. Calcular: a) la aceleración del cilindro respecto de la tabla, en ausencia de deslizamiento; b) la energía cinética del cilindro cuando el eje se desplaza  $d$  sobre la tabla; c) el valor límite  $a_{m\acute{a}x}$  para el cual no hay deslizamiento.



Solución:

a) Desde tabla (SNI) :



$$\begin{cases} f^* - fr = m \cdot a_{CM} \\ fr \cdot R = I^{CM} \cdot \alpha \\ |\vec{f}^*| = m \cdot |\vec{a}| \\ a_{CM} = \alpha \cdot R \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones y teniendo en cuenta que  $I^{CM} = \frac{1}{2} m \cdot R^2$ , la aceleración del centro de masas del cilindro *respecto de la tabla* resulta:

$$a_{CM} = \frac{2}{3} a$$

Pero cuidado con los signos. La expresión final se refiere a que el módulo del centro de masas es igual a dos terceras partes del módulo de la aceleración de la tabla. El sentido de  $\vec{a}_{CM}$  es, viendo el sistema de referencias adoptado, contrario al de  $\vec{a}$ .

b) Desde tabla (SNI) :

$$\sum W_{reales} + W_{f*} = \Delta E_c = E_c - \cancel{E_c}^0$$

Como el cilindro se encuentra en rodadura, la fuerza de roce no ejecuta trabajo. Por lo tanto la ecuación anterior se reduce a:

$$W_{f*} = E_c \quad \Rightarrow \quad f* \cdot d = E_c \quad \Rightarrow \quad E_c = m \cdot a \cdot d$$

c) Se obtiene la aceleración máxima de la tabla,  $\vec{a}_{m\acute{a}x}$ , cuando el cilindro está a punto de resbalar. En esas condiciones la fuerza de roce vale  $\mu \cdot N$ , de modo que queda:

$$m \cdot a_{CM} = a_{m\acute{a}x} - \mu \cdot N \quad ; \quad \mu \cdot N \cdot R = I^{CM} \cdot \alpha \quad ; \quad a_{CM} = \alpha \cdot R \quad \boxed{a_{m\acute{a}x} = 3 \mu g}$$

.....

### Fuerzas tidales y mareas

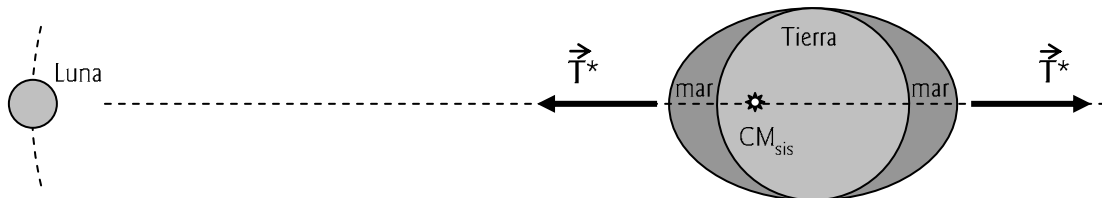
Los astronautas y las cosas existentes y sueltas en una cápsula espacial “flotan” como si no existiese gravedad. Pero, lejos de ello, estos objetos pesan a 400-500 km de altura prácticamente lo mismo que sobre la superficie de la Tierra, si tenemos en cuenta que se distancian menos del 10 % del centro de masas del planeta ubicado a unos 6400 km debajo de su superficie.

¿Qué sucede, entonces? ....

El satélite gira a gran velocidad (a esa distancia de la Tierra, a unos 30 000 Km/h) sobre una órbita curva; está acelerado, con aceleración centrípeta, por lo que se constituye en un Sistema No Inercial. Cada cuerpo de masa  $m$  ubicado en la cápsula está sujeto a la fuerza *real* de atracción gravitatoria:  $f_g = G \cdot m_T \cdot m / r^2$ , y a una *ficticia*, “centrífuga”, de valor:  $f = m \cdot v^2 / r$  en donde  $r$  es el radio de la órbita o la distancia del centro de masas del satélite respecto del centro de masas de la Tierra. En las condiciones de “flotación” estas fuerzas son de igual módulo pero de distintos sentidos, por lo que, no habiendo fuerzas netas sobre los cuerpos, ninguno de ellos posee aceleración relativa al satélite.

Pero esta situación se da para los objetos muy próximos al CM del sistema de partículas *cápsula, hombres, objetos*. El alejamiento de un astronauta de este CM, en el sentido radial, implica que se desequilibre la ecuación  $- G \cdot m_T \cdot m / r^2 + m \cdot v^2 / r = 0$ . Un alejamiento  $d$  de la trayectoria del CM genera sobre el astronauta una fuerza no inercial  $T^* = \pm f_g \cdot 3 \cdot d / r$ , llamada *tidal*, que lo aleja de la trayectoria del satélite. No obstante, hace falta un distanciamiento de centenares de metros para que esta fuerza sea del orden de gramos, a una altura como la del ejemplo. Lo que obliga, de todos modos, a usar una cuerda de unión a la nave.

Las fuerzas tidales son las causantes de las *mareas*. La Tierra y la Luna constituyen un sistema de partículas cuyo centro de masas se encuentra en la Tierra. (Realiza el cálculo, teniendo en cuenta los datos:  $m_L = 7,36 \cdot 10^{22} \text{ kg}$  ;  $r_L = 1,738 \cdot 10^6 \text{ m}$  ;  $m_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  ;  $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$  ;  $d_{LT} = 3,92 \cdot 10^8 \text{ m}$  . Verás que el CM del sistema T-L se encuentra a unos 4660 km del centro de la Tierra, o a unos 1670 km por debajo de la superficie terrestre). La masa de agua que está en su superficie está alejada de este CM , tanto la que está más cerca de la Luna como la que está más alejada. Por lo antedicho, aparecen sobre estas masas sendas fuerzas tidales que las alejan de la órbita en común y generan las mareas cada 12 hs. .



¿ Cómo se llega a  $T^* = \pm f_g \cdot 3 \cdot d / r$  ? :

En la suma de la fuerza real y la fuerza ficticia:  $- G \cdot m_T \cdot m / r^2 + m \cdot v^2 / r$  se reemplaza  $r$  por  $r \pm d$  :

$$\begin{aligned} - G \cdot m_T \cdot m / r^2 + m \cdot v^2 / r &= - G \cdot m_T \cdot m / r^2 + m \cdot \omega^2 \cdot r = \\ &= - G \cdot m_T \cdot m / (r \pm d)^2 + m \cdot \omega^2 \cdot (r \pm d) = \\ &= - G \cdot m_T \cdot m / (r \pm d)^2 + m \cdot G \cdot m_T \cdot (r \pm d) / r^3 \quad (1) \end{aligned}$$

Se ha reemplazado  $\omega^2$  por  $G \cdot m_T / r^3$  ya que  $f_g = G \cdot m_T \cdot m / r^2 = m \cdot a = m \cdot \omega^2 \cdot r$  .

En (1) no se adiciona  $d$  en  $r^3$  ya que esta  $r$  se refiere a la velocidad angular, que es la misma para el CM y para todos los objetos alejados del CM .

$$\begin{aligned} \therefore \quad &- G \cdot m_T \cdot m [ ( 1 / (r \pm d)^2 ) - (r \pm d) / r^3 ] = \\ &= - ( f_g / r ) \cdot [ ( r^3 / (r \pm d)^2 ) - r^3 \cdot (r \pm d) / r^3 ] = - ( f_g / r ) \cdot [ ( r^3 / (r \pm d)^2 ) - (r \pm d) ] = \\ &= ( f_g / r ) \cdot [ - ( r^3 / (r \pm d)^2 ) + (r \pm d) ] = ( f_g / r ) \cdot [ ( (r \pm d)^3 - r^3 ) / (r \pm d)^2 ] = \end{aligned}$$

$( f_g / r ) \cdot [ ( r^3 \pm 3r^2 \cdot d - r^3 ) / r^2 ] = \pm ( f_g / r ) \cdot 3 \cdot d$  , como se quería demostrar !

En la expresión anterior se han despreciado todos los términos en los que no aparece, al menos,  $r^2$  .

.....

*Fuerza de Coriolis*

Si un hombre camina por el radio de una pista circular (el piso de una calesita, por ejemplo) que gira con velocidad angular ( $\vec{\omega}$ ) constante, nota que es especial la posición que debe adoptar su cuerpo para compensar una fuerza que aparece al caminar sobre ese sistema no inercial. Esta es la fuerza ficticia de Coriolis, que ya pasamos a deducir.



A efectos de realizar mejor los dibujos, imaginemos que mientras el hombre pasa del eje a la periferia del círculo, la plataforma dio una vuelta. Y también supongamos que la velocidad del hombre respecto de la plataforma,  $\vec{v}_{hp}$ , ha sido constante. En estas condiciones resulta que la trayectoria del hombre respecto de Tierra (su proyección sobre el suelo a través de un imaginario piso transparente de la calesita) es una espiral.

Segmento  $\overline{OA}$  : trayectoria del hombre respecto de la plataforma (Figura 1).  
 Espiral  $\overline{OA}$  : trayectoria del hombre respecto de Tierra (Figura 2).

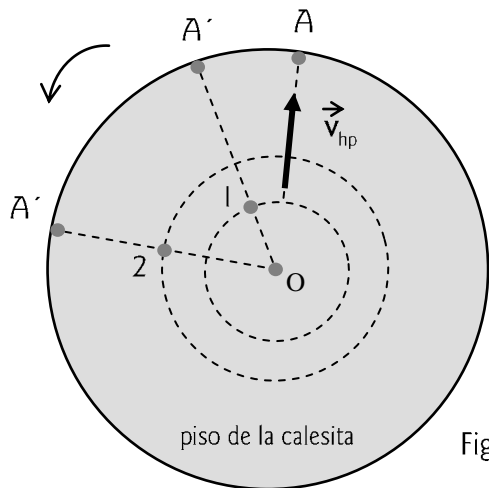


Figura 1

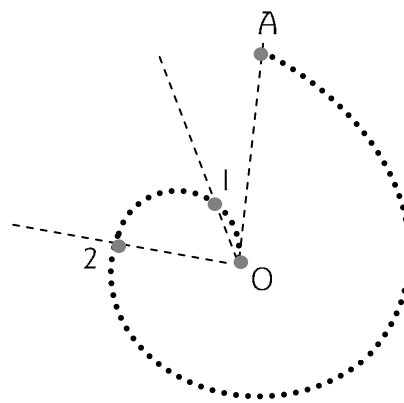


Figura 2

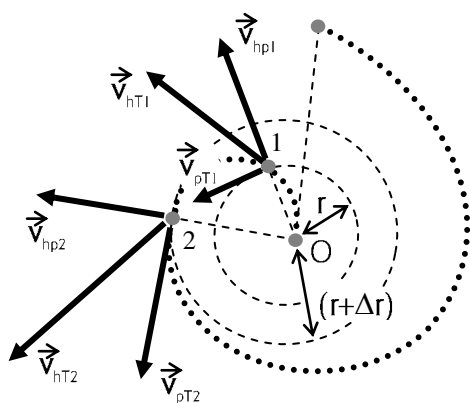


Figura 3

$\vec{v}_{hp}$  = velocidad hombre / plataforma  
 $\vec{v}_{hT}$  = velocidad hombre / Tierra  
 $\vec{v}_{pT}$  = velocidad plataforma / Tierra

$$\therefore \boxed{\vec{v}_{hT} = \vec{v}_{hp} + \vec{v}_{pT}}$$

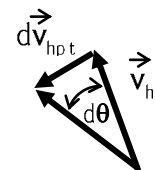
En 1 :  $\vec{v}_{hT1} = \vec{v}_{hp1} + \vec{v}_{pT1}$

En 2 :  $\vec{v}_{hT2} = \vec{v}_{hp2} + \vec{v}_{pT2}$

El pasaje de 1 a 2 implica un cambio en el vector  $\vec{v}_{hT}$ . Es decir, cambian los vectores  $\vec{v}_{hp}$  y  $\vec{v}_{pT}$ , aunque el primero lo hace solamente en dirección.

El cambio de dirección de  $\vec{v}_{hp}$  es tangente a la circunferencia que describe la pista. Y en esa dirección también hay un incremento del módulo de  $\vec{v}_{pT}$ . Por lo tanto el cambio de  $\vec{v}_{hT}$  implica aceleración, en la que el módulo de la componente tangencial vale:

$$a_t = dv_{hp_t} / dt + dv_{pT_t} / dt$$



$dv_{hp_t}$  se obtiene multiplicando  $v_{hp}$  por  $d\theta$  :  $dv_{hp_t} = v_{hp} \cdot d\theta \iff$

En cambio  $dv_{pT_t}$  es la diferencia entre  $v_{pT2}$  y  $v_{pT1}$  cuando  $\Delta r \iff dr$  (ver Figura 3).

$$dv_{pT_t} = v_{pT2} - v_{pT1} = \omega \cdot (r + dr) - \omega \cdot r = \omega \cdot dr$$

Resulta, entonces:  $a_t = v_{hp} \cdot d\theta/dt + \omega \cdot dr/dt = v_{hp} \cdot \omega + \omega \cdot v_{hp}$

$$a_t = 2 \cdot v_{hp} \cdot \omega$$

El vector  $\vec{a}_t$ , ubicado en el plano del círculo y en el sentido antihorario con el que gira la calesita, se obtiene del producto vectorial  $\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{hp}$ , ya que el vector  $\vec{\omega}$  es perpendicular al plano del piso y saliente para el giro considerado (regla del tirabuzón).

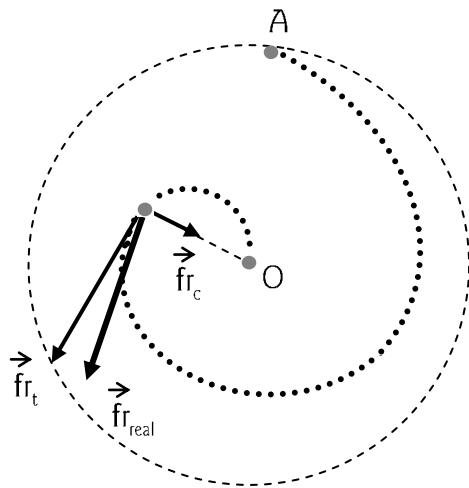
Esta aceleración tangencial, analizada sobre la trayectoria *vista desde el Sistema Inercial Tierra*, es real. La genera una fuerza tangencial real que aparece sobre el caminante, que no puede ser otra que la fuerza de roce con el piso, cuyo módulo es:  $fr_t = m \cdot a_t = m \cdot 2 \cdot v_{hp} \cdot \omega$ .

Por otra parte, esta fuerza tiene también una componente centrípeta dada por:  $fr_c = m \cdot \omega^2 \cdot r$ .

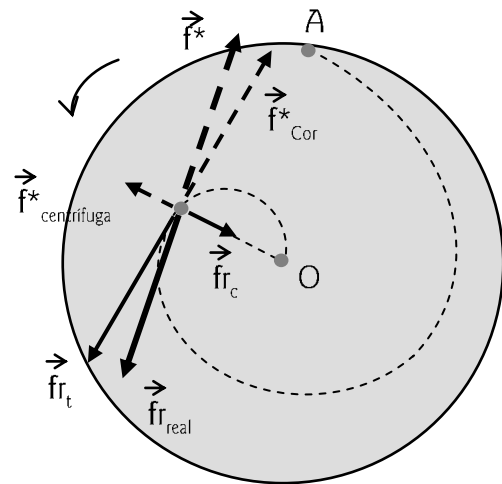
Pero *visto desde la plataforma*, Sistema No Inercial, es indudable que actúa sobre el hombre una fuerza ficticia que compensa la fuerza real, para justificar que su marcha sea de velocidad constante ( $\sum \vec{f}_{reales} + \vec{f}^* = m \cdot \vec{a} = 0$ ). A la componente tangencial de esa fuerza ficticia se la llama *fuerza de Coriolis*, en homenaje a quien la estudió. La componente radial es la ya estudiada *fuerza centrífuga*.

$$\vec{f}_{Cor}^* = 2 \cdot m \cdot (\vec{v}_{hp} \wedge \vec{\omega})$$

Desde Tierra (S. I.)



Desde plataforma (S. N. I.)

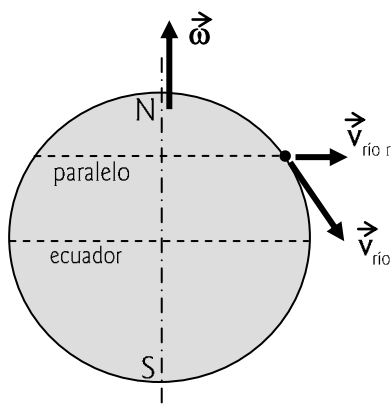


Como consecuencia de la rotación de la Tierra, la *fuerza de Coriolis* es la causante de fenómenos naturales curiosos, como los que se van a ver a continuación.

### Ejemplo 145

Se comprueba visualmente que una de las orillas de un río que corre a lo largo de un meridiano terrestre de Norte a Sur, está más gastada que otra. Esto es debido a la rotación del planeta, que se constituye así en un S.N.I. . Si el río se encuentra en el hemisferio norte, deducir cuál es esa orilla.

Solución:



Para ver hacia qué lado es empujado el río, hay que ver cuál es el sentido de la fuerza de Coriolis. Para ello hay que rebatir el vector  $\vec{v}_{\text{río } r}$  (proyección de  $\vec{v}_{\text{río}}$  sobre el plano circular del paralelo) sobre el vector  $\vec{\omega}$ . El resultado de este producto es un vector saliente a este papel:  $\vec{f}_{\text{cor}}^*$ .

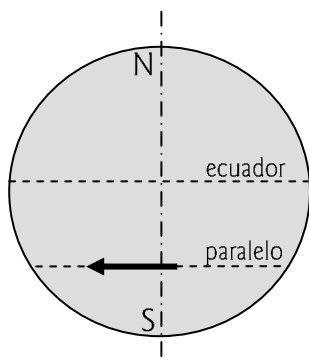
*¡ El río es empujado, pues, hacia la costa occidental !*

.....

### Ejemplo 146

Un tren avanza sobre un paralelo en el hemisferio sur, de Este a Oeste. Deducir hacia qué vía se reclina: ¿la norte, o la sur?

Solución:



La fuerza de Coriolis aparece cuando un móvil avanza por una dirección radial de un disco que gira; o cuando tiene una velocidad con componente radial. Pero en el caso del tren de este ejemplo, no existe ninguna componente radial. Por lo tanto,

*¡ debido a la fuerza de Coriolis, no se reclina sobre ninguna de las vías !*

.....

Para terminar con este tema, digamos que los vientos arremolinados son producto de la expansión radial del aire cuando por efectos del calor y de la variación de temperatura se produce un corrimiento radial.

Algunos remolinos que se observan en los desagües de las piletas pueden ser debidos a la rotación de la Tierra. Si el agua desciende por un tubo cónico vertical conectado a la pileta, y la cañería no presenta formas como para forzar su circulación (recuérdese que la aceleración de Coriolis es función de la pequeña velocidad angular terrestre y por lo tanto la fuerza que podría desviar el agua es pequeña) los remolinos que se producen en nuestro hemisferio sur son siempre antihorarios.

.....

Experiencias sencillas

\* Verificación de  $\Sigma \vec{f} = m \cdot \vec{a}_{CM}$

Si lanzamos en forma oblicua, girando, un lápiz o una varilla, notamos que su centro geométrico (prácticamente coincidente con su centro de masas) describe una parábola; se puede ver mejor si se pinta con pintura fosforescente la zona del centro geométrico. Esto se debe a que la única fuerza actuante es el peso, y por lo tanto la aceleración del CM es  $\vec{g}$ .

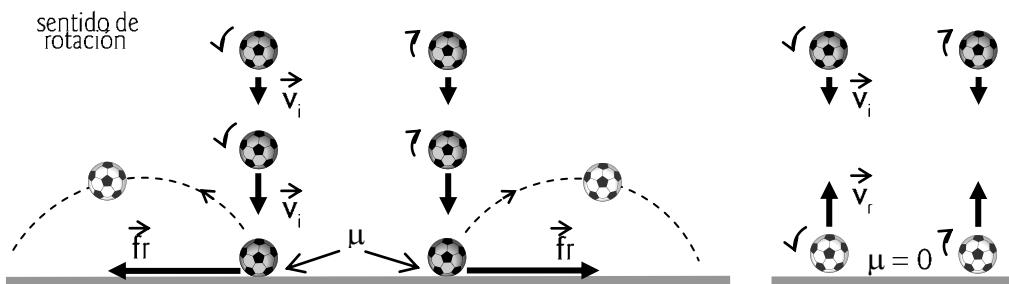
Si ahora insertamos en la punta del lápiz una goma de borrar, y lanzamos al conjunto girando, notaremos que ya no rota en torno del centro geométrico del lápiz sino en torno a un punto cercano a la goma, el que describe una parábola; se desplazó el CM hacia ese lugar.

\* Verificación de  $\vec{J} = \Delta \vec{p}$  y  $\vec{r}_{CM} \wedge \vec{J} = \Delta \vec{L}_{CM}$

Tomamos un lápiz y lo apoyamos sobre una mesa horizontal, de manera que esté paralelo al borde de la mesa cercano a nosotros. Si aplicamos a uno de los extremos del lápiz un golpe con un dedo ( $\vec{J}$ ), tratando de que el mismo sea paralelo a otro borde de la mesa, notaremos cómo el lápiz sale girando sobre la mesa en torno a su centro geométrico, mientras éste se desplaza paralelo al borde mencionado (con la dirección y el sentido del golpe aplicado).

\* Observación del sentido de la fuerza de roce

Si dejamos caer una pelota girando, al tocar la mesa rugosa o el suelo va a rebotar hacia el lado en que la impulsa la fuerza de roce; de lo contrario, ante una mesa lisa, la pelota rebotaría verticalmente hacia arriba:



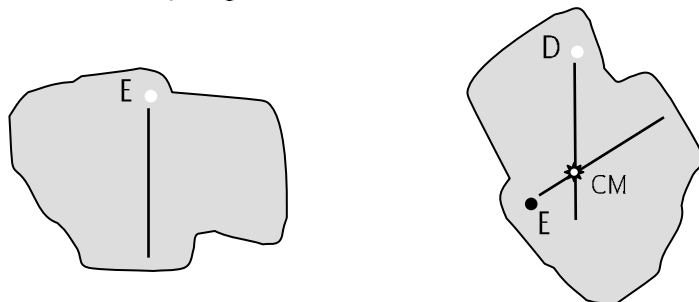
\* Inclina la mesa en tu casa para usar su tablero de plano inclinado, y deja rodar partiendo desde el reposo y del mismo lugar a cuerpos cilíndricos macizos y huecos (saleros, anillos, soportes de papel higiénico, palos de amasar, y otros objetos que puedes encontrar en la casa). Verás que, independientemente de su tamaño y peso, los cuerpos cilíndricos macizos llegan antes al final del recorrido.

\* Una manera de hallar el momento de inercia de un cuerpo rígido plano de forma irregular (o no) respecto de un eje perpendicular que pasa por un punto E del mismo ( $I^E$ ), es haciéndolo oscilar con pequeñas amplitudes alrededor de E y medir su periodo

de oscilación (es conveniente que dé muchas “idas y vueltas” para medir el tiempo total, dividir por el número de oscilaciones y de esa manera disminuir el error en la medida de un periodo  $T$ ). De la expresión vista:  $T = 2\pi \cdot (I^E / m \cdot g \cdot d)^{1/2}$  para este tipo de movimientos pendulares, en la que  $m$  es la masa del cuerpo rígido y  $d$  la distancia entre el eje que pasa por  $E$  y el centro de masas, se despeja la incógnita  $I^E$ .

Ahora: ¿cómo conocer la ubicación del  $CM$ , es decir, la distancia  $d$ ? ...

Cuelga al cuerpo rígido de  $E$  y traza a partir de ese punto una línea vertical, con la ayuda de una plomada. Luego cuélgalo de otro punto y repite la operación trazando otra línea vertical. El centro de masas, que coincide con el centro de gravedad porque consideramos el campo gravitatorio constante, se encuentra en la intersección de las líneas dibujadas sobre el cuerpo rígido:



Para verificar prácticamente la validez de la expresión  $T = 2\pi \cdot (I^E / m \cdot g \cdot d)^{1/2}$ , y que por lo tanto estamos siguiendo un camino correcto con este procedimiento para averiguar el  $I^E$  de cualquier cuerpo rígido, usa un aro y hazlo oscilar alrededor de un eje horizontal fijo, como en el caso anterior. Aquí sabemos que la distancia entre el centro de masas y el eje es el radio del aro, porque el  $CM$  se halla en el centro de su circunferencia.

# **FLUIDOS IDEALES**

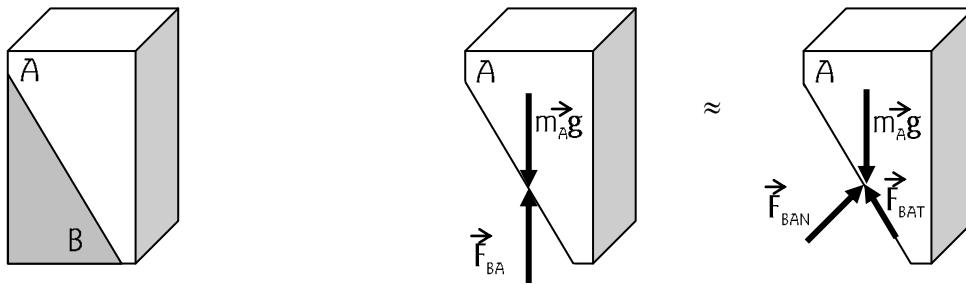


## FLUIDOS IDEALES

Es obvio que “fluidos” se refiere a algo que fluye. Un líquido o un gas fluyen ocupando recipientes y adoptando sus formas, con la diferencia que los líquidos establecen niveles horizontales. Los fluidos no soportan esfuerzos tangenciales (o de corte), y sus moléculas adoptan posiciones al azar, a diferencia de la estructura cristalina de los sólidos.

La razón por la cual esto sucede, a diferencia de los sólidos, es que las fuerzas intermoleculares son más débiles en los fluidos, los que se comportan de la manera conocida ante la fuerza externa gravitatoria. “Entre las estrellas”, o en el ambiente de una cápsula satelital, los líquidos forman enormes “gotas” y los gases se apelmazan (al fin y al cabo, enormes nubes de hidrógeno formaron las primeras estrellas y galaxias por atraerse sus átomos, en vez de “fluir” por el espacio).

Tomemos a un sólido (un prisma, por ejemplo) en reposo, compuesto de dos porciones imaginarias, A y B, como las que se indican. El diagrama de cuerpo aislado de la porción superior A, que también está en equilibrio, implica:



Hay una componente tangencial al plano de unión,  $\vec{F}_{BAT}$ , que es la que llamamos “esfuerzo tangencial”. En los fluidos ideales esta fuerza es nula, mientras que en líquidos como la miel, por ejemplo, es de bajo valor y se llama “viscosidad”. Los líquidos se derraman más o menos rápidamente en función del valor de su viscosidad. El agua se parece mucho a un fluido ideal mientras que la breya es lo contrario: demora mucho en adquirir la forma del recipiente que la contiene; su viscosidad es grande.

Dado que en cualquier superficie que se considere en el seno de los fluidos prevalecen las fuerzas normales, como también en las superficies del recipiente que los contiene, se define la magnitud *escalar* presión:

$$p = \vec{F} / \vec{s}$$

en la que  $\vec{F}$  es la fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie  $\vec{s}$ , la que se representa arbitrariamente con un vector normal a la misma, en la dirección de la fuerza.

$$[p] = [F] / [s] = \text{N/m}^2 = \text{Pa (Pascal)}, \text{ en el S.I.}$$

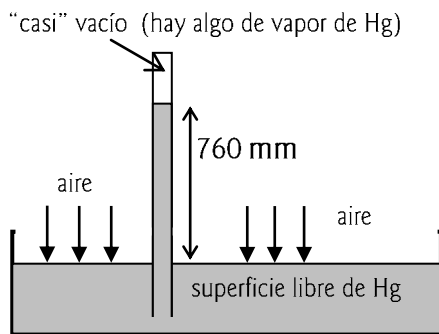
La atmósfera, el aire que nos rodea, decimos que tiene a nivel del mar una atmósfera (1atm) de presión. A nivel del mar, sobre cada  $\text{cm}^2$  de nuestra piel el aire ejerce una fuerza de aproximadamente  $1,033 \text{ kgf}$ . Si no “implotamos” sometidos a semejante fuerza, es porque respiramos el aire a esa presión: desde adentro de nuestro cuerpo, hacia afuera, existe la misma



fuerza por cada  $\text{cm}^2$ . Los buzos que se sumergen en aguas profundas sufren mayores presiones externas, como veremos; para compensarlas deben respirar aire (oxígeno) provisto por los tubos de su equipo a una presión equivalente a la externa.

$$1 \text{ atm} \approx 1.033 \text{ kgf/cm}^2 = 1.033 (9.8 \text{ N})/\text{cm}^2 = 1.013 \text{ N/cm}^2 = 1013 \text{ HPa}$$

El **Torr** es también una unidad de medida de presión. Proviene de Torricelli, apellido del científico que realizó estudios sobre presiones y midió la atmosférica con su famoso experimento: llenó un tubo de vidrio con mercurio y luego lo dio vuelta y sumergió en una cuba de mercurio; el resultado fue el siguiente:



A nivel del mar, en condiciones atmosféricas normales, la presión del aire hace que suba 760 mm el nivel de mercurio dentro del tubo (la justificación se verá más adelante). Por lo tanto:

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg}$$

Se definió:  $1 \text{ Torr} = 1 \text{ mm Hg}$

$$\therefore 1 \text{ atm} = 760 \text{ Torr}$$

Otra unidad de medida difundida de presión es el **bar**:

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \approx 750 \text{ Torr} \quad ; \quad 1 \text{ milibar} = 10^2 \text{ Pa} = 0.750 \text{ Torr}$$

Resulta:  $1 \text{ atm} = 1013 \text{ milibar}$

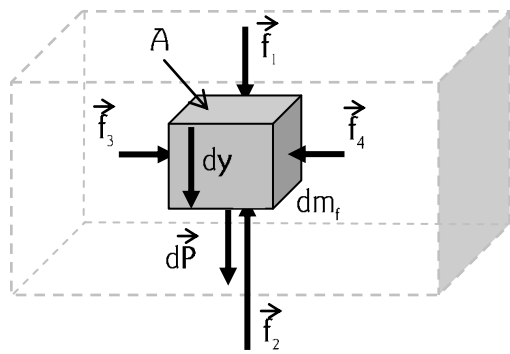
Todavía se usan el **bar** y el **milibar** para expresar la presión atmosférica. Los instrumentos para medir estas presiones, algunos de los cuales son la cuba y el tubo de mercurio de Torricelli [ *Evangelista Torricelli - Italia - 1608 a 1647* ], se llaman *barómetros*, por estas unidades de medida. Los instrumentos llamados *manómetros* miden también presiones pero usando a la presión atmosférica de referencia: si se conectan a una garrafa de gas, p. ej. , miden la diferencia entre la presión real del gas de la garrafa y la presión atmosférica.

En lo que sigue usaremos los conceptos de  $\delta$  , *densidad* (ya vista en Sistemas de Partículas), y  $\rho$  , *peso específico*:  $\rho = dP / d(\text{vol}) = dm \cdot g / d(\text{vol})$  . Se desprende que estas magnitudes están vinculadas de la manera:  $\rho = \delta \cdot g$  .

## ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS

### Teorema Fundamental

Tomemos una porción de un fluido en reposo dentro del recipiente que lo contiene, el que a su vez se encuentra en equilibrio (reposo o MRU) respecto de Tierra. Si esta porción es un cubito de masa  $dm_f$  , densidad  $\delta_f$  , volumen  $d(\text{vol}_f)$  , lado vertical  $dy$  y superficie de la cara horizontal  $A$  , entonces, si  $\vec{f}_i$  son las fuerzas que el resto del fluido ejerce sobre la masita, puede deducirse:



$$\begin{aligned}
 \sum f_x &= 0 \implies f_4 = f_3 \\
 \sum f_y &= 0 \implies dP + f_1 = f_2 \\
 dP &= dm_f \cdot g = d(\text{vol}_f) \cdot \delta_f \cdot g = A \cdot dy \cdot \delta_f \\
 f_1 &= p_1 \cdot A \quad ; \quad f_2 = p_2 \cdot A \quad ; \quad p_2 = p_1 + dp \\
 A \cdot dy \cdot \delta_f \cdot g + p_1 \cdot A &= p_2 \cdot A
 \end{aligned}$$

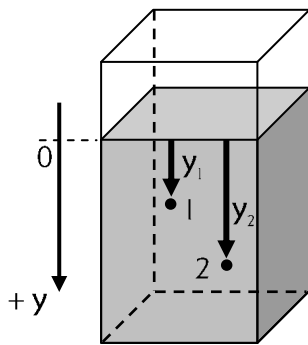
$$\therefore \boxed{dp = \delta_f \cdot g \cdot dy}$$

Esta ecuación nos dice que hay un gradiente de presión en el sentido “hacia la Tierra”; es decir, a medida que avanzamos hacia las profundidades de un líquido o un gas, experimentamos mayores presiones.

**Ejemplo 147**

Calcular la diferencia de presión existente en el seno de un líquido de densidad  $\delta_l$  contenido en un recipiente abierto en reposo, entre los puntos 1 y 2 .

Solución:



$$\begin{aligned}
 dp &= \delta_l \cdot g \cdot dy \\
 \therefore \int_{p_1}^{p_2} dp &= \int_{y_1}^{y_2} \delta_l \cdot g \cdot dy
 \end{aligned}$$

Si consideramos a  $\delta_l$  y a  $g$  constantes, cosa que se puede hacer con muy buena aproximación dadas las características de los líquidos y el hecho de que los recipientes o las piletas son de una profundidad pequeña en

relación al campo espacial de  $\vec{g}$ , resulta:

$$\boxed{p_2 - p_1 = \delta_l \cdot g \cdot (y_2 - y_1)}$$

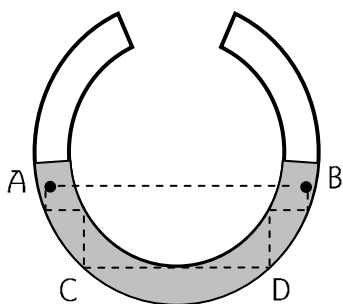
Del ejemplo anterior se desprende que todos los puntos que se encuentran en el mismo nivel o a la misma profundidad ( $y_2 = y_1$ , por ejemplo), tienen la misma presión ( $p_2 = p_1$ ). Por otra parte, la presión, a cierta profundidad  $h$  respecto del nivel libre sobre el que actúa la atmósfera, de la expresión anterior se deduce que vale:

$$p = p_0 + \delta_l \cdot g \cdot h$$

Si se trata del agua, el término  $\delta_l \cdot g \cdot h$  vale aproximadamente **1 atm** para  $h = 10 \text{ m}$  (verifícalo, considerando que  $\delta_{\text{agua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ ). Esto quiere decir que a **10 m** de profundidad la presión es de **2 atm** y a **100 m** es de **11 atm** .

También se cumple que hay igualdad de presiones en los mismos niveles en líquidos

homogéneos (la misma densidad en cada “diferencial de volumen”) que ocupan tubos en “U” :

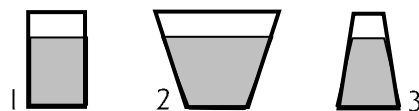


Siguiendo caminos escalonados, simétricos, desde el segmento C-D hasta los puntos A y B , se deduce que no hay diferencia de presión entre A y B . Piensa que en todos los puntos de CD la presión es la misma, por lo visto previamente, y deduce esa conclusión.

Pero si a este líquido contenido en el tubo en “U” le agregamos otro inmisible, de distinta densidad, sucedería que en el mismo nivel las presiones serían distintas. Haz el dibujo con la ubicación cualitativa de los niveles superiores suponiendo que a la rama derecha se le agrega aceite que flotará sobre el agua, y analiza el caso de las presiones sobre una línea horizontal que pasa en una rama por el aceite y en la otra por el agua.

“Curiosidades”

En cada uno de los siguientes casos la presión en el fondo del recipiente es la misma, porque los vasos contienen un líquido de igual densidad y nivel. Pero si los vasos tienen la misma base en  $cm^2$  , parece que hubiera una contradicción por el hecho de que las mismas presiones implican iguales fuerzas sobre iguales fondos (iguales superficies), siendo los pesos de los líquidos desiguales.



¿Cómo se entiende esto? .....

Sucede que en 2 el recipiente ayuda a sostener al líquido:



mientras que en 3 lo empuja hacia abajo:



Ahora, si se pesara a cada recipiente con su líquido, suponiendo la masa del recipiente prácticamente nula, ¿indicaría lo mismo la balanza? ... ¿Sí? ... ¿No? ... ¿Por qué?

**Ejemplo 148**

Calcular la diferencia de presión existente en el aire entre puntos de distinta altura.

Solución:

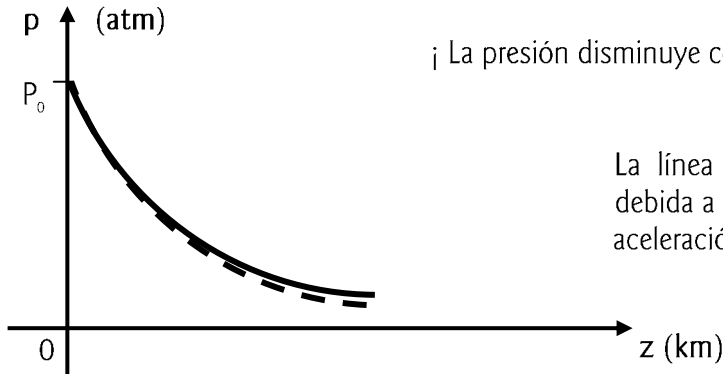
Para resolver el problema usaremos otra vez:  $dp = \delta_r \cdot g \cdot dy$ . Pero ahora tomaremos un eje  $z$  con sentido positivo hacia arriba, porque las alturas se miden desde el suelo. Además, llamaremos  $\delta$  a la densidad del aire (gas) que aquí no es constante sino que depende de la presión :  $\delta_0/p_0 = \delta/p$  .

La ecuación inicial queda, entonces:  $dp = -\delta \cdot g \cdot dz$

Integrando: 
$$\int_{p_0}^p dp = - \int_0^z (\delta_0 / p_0) \cdot p \cdot g \cdot dz$$

$$\int_{p_0}^p dp/p = - \int_0^z (\delta_0/p_0) \cdot g \cdot dz \quad \Leftrightarrow \quad \ln p \Big|_{p_0}^p = - (\delta_0/p_0) \cdot g \cdot z$$

$$\therefore \quad \boxed{p = p_0 \cdot e^{- (\delta_0 / p_0) \cdot g \cdot z}}$$



¡ La presión disminuye con la altura en forma exponencial !

La línea punteada indica una corrección debida a las variaciones de temperatura y de aceleración de la gravedad con la altura.

*Principio de Pascal*

Blaise Pascal [ Francia - 1623 ] enunció que:

*“La presión que se aplica al fluido contenido en un recipiente se transmite íntegramente al resto del fluido y a las paredes del recipiente que lo contiene”*

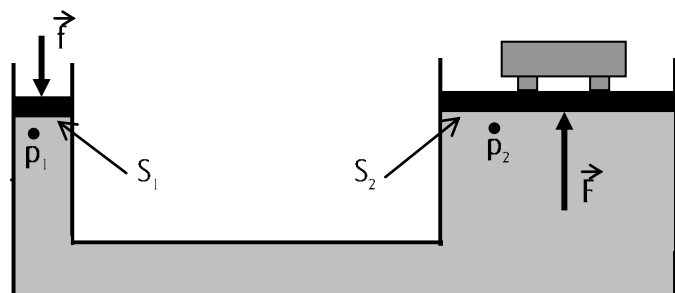
Este principio, que no es independiente sino que es una ley consecuencia de las leyes de la mecánica, se cumple en los fluidos reales (compresibles) luego de que la onda de propagación de la perturbación (agregado de presión) haya recorrido todo el fluido a la velocidad del sonido en dicho fluido.

Todos los días hacemos uso de esta propiedad de los líquidos, al apretar el freno hidráulico de algún auto, o al usar el crique hidráulico para reponer una rueda. Gracias a que la presión se transmite a todo el fluido podemos lograr un gran efecto multiplicador en las fuerzas que empleamos. Veámoslo a continuación con un esquema muy sencillo.

**Ejemplo 149**

Una prensa hidráulica consiste en un tubo que en un extremo tiene una sección muy reducida respecto a la del otro extremo, como indica la figura siguiente.

Si la relación entre los diámetros de las secciones circulares es de 8 a 1 (16 cm y 2 cm), y sobre el pistón pequeño se aplica una fuerza de 10 N, ¿qué peso podrá sostener el pistón grande? Es decir, ¿cuál es la fuerza  $\vec{F}$  que aparece distribuida en la sección grande?



Solución:

De acuerdo al Principio de Pascal:  $p_1 = p_2 \Rightarrow f / S_1 = F / S_2$

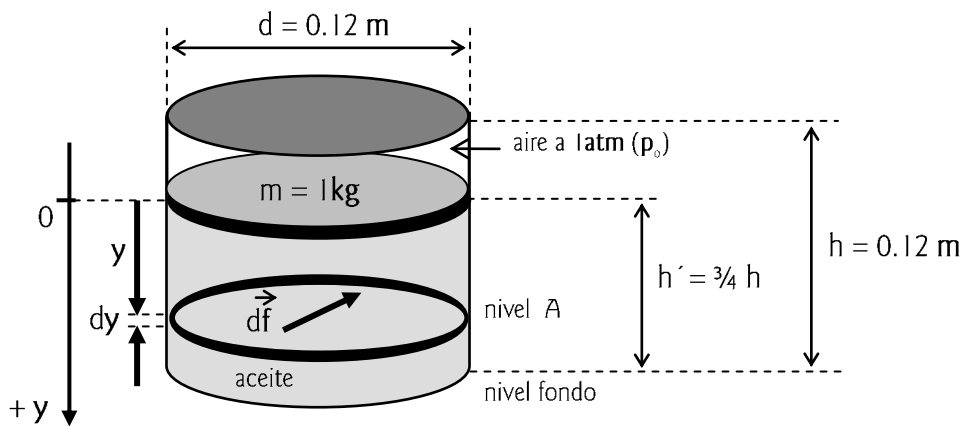
$$F = f \cdot (S_2 / S_1) = f \cdot [\pi \cdot (D_2^2 / 4) / \pi \cdot (D_1^2 / 4)] = f \cdot 16^2 / 2^2 = f \cdot 64$$

$$F = f \cdot 64 = 640 \text{ N}$$

### Ejemplo 150

Un recipiente cilíndrico de 0.12 m de altura y 0.12 m de diámetro contiene aceite de densidad:  $\delta_{ac} = 0.9 \text{ gr/cm}^3$  hasta las 3/4 partes de su altura. Con el cilindro en reposo y apoyado sobre una superficie horizontal, se aplica un émbolo (cilindro metálico chato) de  $m = 1 \text{ kg}$  sobre la superficie libre del aceite. Calcular la fuerza total ejercida por éste sobre la pared cilíndrica del recipiente,  $\vec{f}_l$ , y sobre su fondo,  $\vec{f}_f$ .

Solución:



Consideraremos  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

El aro de diámetro  $d$  y espesor  $dy$  sufre, en el nivel A, la presión:

$$p_A = p_0 + mg / \pi \cdot d^2/4 + \delta_{ac} \cdot g \cdot y = 101300 \text{ Pa} + 884.2 \text{ Pa} + 9000 \text{ N/m}^3 \cdot y$$

$$p_A = 102184 \text{ Pa} + 9000 \text{ N/m}^3 \cdot y$$

Luego, la fuerza que el aceite hace sobre ese aro es:  $df = p_A \cdot \pi \cdot d \cdot dy$

$$\text{con lo que: } f_l = \int_0^{1/4 h} df = \int_0^{0.09} (102184.2 \text{ Pa} + 9000 \text{ N/m}^3 \cdot y) \cdot \pi \cdot d \cdot dy$$

$$f_l \approx 3480 \text{ N}$$

En el nivel fondo la presión es:

$$p_f = p_0 + mg / \pi \cdot d^2/4 + \delta_{ac} \cdot g \cdot 0.09 = 102184.2 \text{ Pa} + 810 \text{ Pa} = 102994.2 \text{ Pa}$$

La fuerza que el aceite hace sobre el fondo es:

$$f_f = p_f \cdot \Pi \cdot d^2/4 \approx 1165 \text{ N}$$

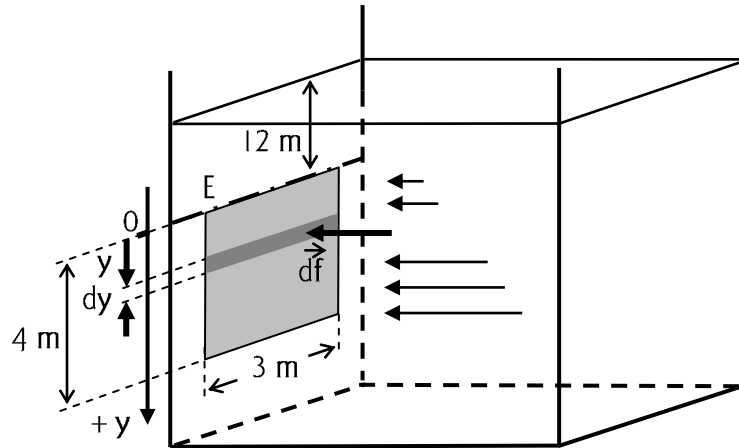
**Ejemplo 151**

Una compuerta vertical, de 3 m de ancho y 4 m de altura, está engoznada en la pared de una cuba con agua a lo largo de su arista paralela a la superficie, a 12 m de profundidad. a) Calcular el par de rotación total que actúa sobre la compuerta con respecto a la línea de la bisagra como eje (E) . b) Si la bisagra fuera vertical, a lo largo de una de sus aristas verticales, calcular el par de rotación total que actúa sobre la compuerta con respecto a esa bisagra (O) .

Solución:

Supondremos que la cuba se encuentra rodeada de aire, a la misma presión de una atmósfera por todos lados. De esta manera el excedente de presión debido a la presión atmosférica del lado del agua queda compensado por el de la presión atmosférica del lado de afuera de la cuba.

a)



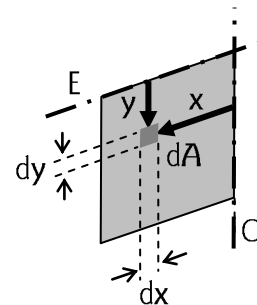
$$dM^E = df \cdot y \quad ; \quad df = p \cdot dA = p \cdot dy \cdot 3 \quad ; \quad p = \delta g \cdot (12 + y)$$

$$dM^E = p \cdot dy \cdot 3 \cdot y = \delta g \cdot (12 + y) \cdot dy \cdot 3 \cdot y$$

$$\therefore \quad M^E = \int_0^4 \delta g \cdot (12 + y) \cdot dy \cdot 3 \cdot y = 3\,520\,000 \text{ Nm}$$

b) Respecto del eje vertical O :

$$M^O = \int df \cdot x = \int p \cdot dA \cdot x = \int p \cdot dy \cdot dx \cdot x = \int_0^3 x \cdot dx \cdot \int_0^4 (12 + y) \cdot \delta g \cdot dy = 2\,520\,000 \text{ Nm}$$



Más importante que los resultados numéricos es la interpretación de lo que está pasando físicamente: una compuerta que pueda girar alrededor del eje E (horizontal) lo hace

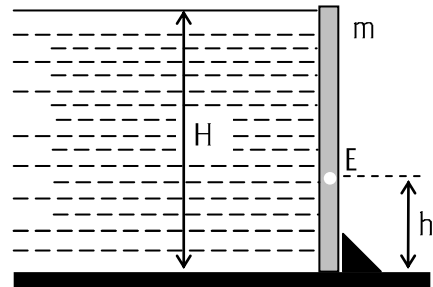
“naturalmente”; una compuerta que tenga la posibilidad de girar alrededor de un eje vertical, se “alabea” - se retuerce - si no es lo suficientemente rígida. En todo caso, el eje vertical y la compuerta deben ser diseñados teniendo en cuenta esta cuestión.

.....

### Ejemplo 152

El dique de la figura, de longitud  $l$  (perpendicular a este papel) y masa  $m$  puede girar libremente alrededor de  $E$  en sentido horario.

- Determinar la máxima altura  $H$  que puede tener el agua para que la compuerta no gire.
- Realizar el diagrama de cuerpo aislado y determinar la fuerza que soporta el eje cuando el agua está en su altura máxima.

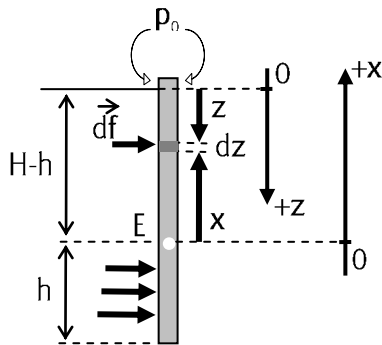


DATOS:  $h = 1 \text{ m}$  ;  $m = 1000 \text{ kg}$  ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$

Solución:

a)

Para que no gire:  $M^E = 0$



$$M^E = \int df \cdot x = \int p \cdot dA \cdot x = \int p \cdot l \cdot dz \cdot x$$

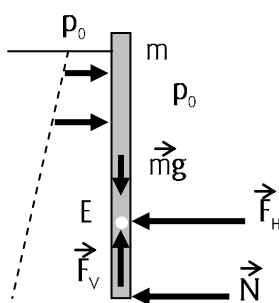
$$p = \delta g \cdot z \quad ; \quad x = H - h - z$$

$$M^E = \delta g \cdot z \cdot l \cdot dz \cdot (H - h - z) =$$

$$= \delta g \cdot L \cdot \int_0^H (H - h - z) \cdot z \cdot dz = 0$$

$$\therefore \boxed{H = 3h}$$

b)



$\vec{N}$  es la fuerza que proporciona la cuña: .

Pero en el caso límite, cuando el dique está a punto de girar,  $N = 0$  .

$$\text{De } \Sigma F = 0 \Rightarrow F_H - F = 0 \quad ; \quad F_V - mg = 0$$

$$F = \int dF = \int_0^H p \cdot dz \cdot l = \int_0^H \delta g \cdot z \cdot l \cdot dz$$

$\therefore$

$$\boxed{F_H = \delta g \cdot z \cdot l \cdot H^2/2}$$

$$\boxed{F_V = mg}$$

¡ Pero cuidado con los sentidos de las fuerzas ! : están dibujadas las que actúan sobre el dique; de manera que las que soporta el eje (es lo que pregunta el enunciado) son de sentido contrario.

.....

Principio de Arquímedes

Arquímedes [ *Siracusa - Sicilia - 285 a 212 a.C.* ]

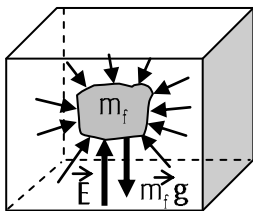
Cualquier cuerpo que se sumerja en un fluido contenido en un recipiente ubicado sobre la Tierra (o cualquier otro planeta o satélite), sufre una fuerza hacia “arriba”. Si el cuerpo tiene una densidad mayor que la del fluido, el cuerpo se hundirá, a pesar de la acción de dicha fuerza; si su densidad es menor, aquella fuerza, llamada *empuje*, lo elevará hasta la superficie libre. Esto también sucede con el aire de la atmósfera, que no está contenido en un recipiente pero que, por su peso, está confinado al volumen que ocupa rodeando al planeta.

Lo anterior es consecuencia de las distintas presiones que existen en el seno de un fluido, como se viera en el *Teorema Fundamental*: siendo éstas mayores en la parte inferior del cuerpo sumergido, el fluido ejerce una fuerza mayor en dicha zona que en la superior, por lo que el cuerpo sufre una fuerza resultante hacia arriba.

Pero, concretamente, ¿cuánto vale esa fuerza - empuje - ? ...

“Un cuerpo sumergido en un fluido recibe un empuje de abajo hacia arriba que equivale al peso del fluido desalojado por dicho cuerpo”.

Esta es la Ley de Arquímedes, que a continuación se justificará.



Tomemos a un fluido en reposo dentro de un recipiente en sobre el planeta. Cualquier porción  $m_f$  de este fluido está en reposo porque la suma de las fuerzas que actúan sobre esa porción es cero. Una fuerza es la que provee el planeta, con su atracción gravitatoria, y la otra es la del resto del fluido que rodea a  $m_f$ . Obviamente, esta última, llamada *empuje*, debe equilibrar a  $m_f g$ . Si ahora se sumerge un

cuerpo de masa  $m$  ocupando el mismo lugar que la porción analizada, el resto del fluido “no se da cuenta” del cambio y empuja hacia arriba con la fuerza (empuje) de módulo  $m_f g$ .

Por esta razón decimos que un cuerpo de mayor densidad que la del fluido se hunde:



$$m \cdot g = \delta \cdot \text{vol.} \cdot g$$

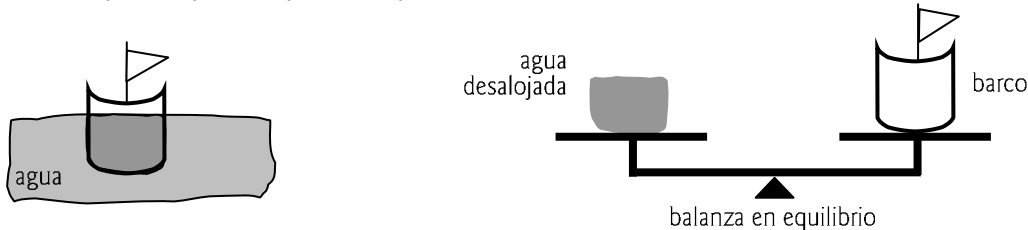
$$E (= m_f g) = \delta_f \cdot \text{vol.} \cdot g$$

Como  $m g$  y  $E$  son las únicas fuerzas que actúan sobre el cuerpo sumergido, la que prevalezca hará que éste se hunda o emerja; de ser iguales, el cuerpo permanece en el seno del fluido, donde fue depositado. Así, comparando las ecuaciones, se ve que si  $\delta > \delta_f$ , el cuerpo se hunde.

¿Por qué flota un barco de miles de toneladas de hierro? ¿No se hunde el hierro, acaso? ... Lo que sucede es que el barco es de Fe, pero hueco. En el agua, desaloja un volumen de este



líquido tal que, su peso, equivale al peso del barco:



Dado que el empuje es una fuerza ejercida por el fluido “engañado”, que cree equilibrar a una porción del mismo que ya ha sido desalojada, resulta que el empuje actúa sobre el CM de dicha porción; es decir, su dirección pasa siempre por el CM del volumen del fluido desalojado. Esta es la causa de las “vueltas de campana” que a veces sufren los barcos cuando están inadecuadamente cargados y sometidos a oleajes; si el CM del barco cargado se encuentra por encima del CM del volumen de agua desalojada, cualquier pequeño desequilibrio conduce a la vuelta de campana:

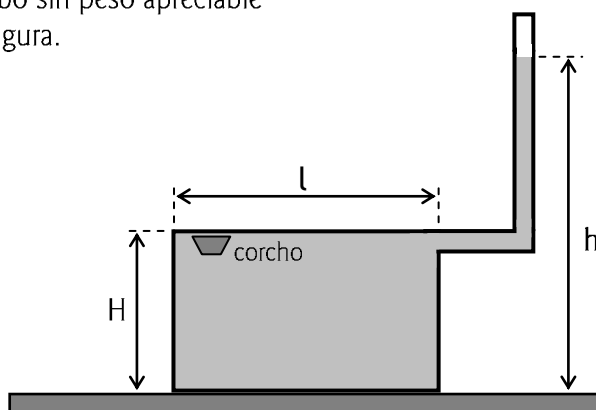


Como se ve, se genera una cupla que produce una aceleración angular anti horaria, en este caso. Si la carga hubiese estado depositada en el fondo, el CM del conjunto carga-barco estaría

por debajo del CM del agua desalojada, y la cupla generada en los desequilibrios de la navegación tendería a equilibrar al barco, en vez de volcarlo. Como en el caso de los cuadros que se cuelgan en las paredes. (Piensa en esta analogía dibujando un cuadro y el clavo que lo sostiene. Piensa también por qué si depositas un escarbadientes en el agua no flota parado sino que enseguida se acuesta).

### Ejemplo 153

Una caja prismática abierta, de peso  $\vec{P}$ , altura  $H$ , y base cuadrada de lado  $l$ , se encuentra con su parte abierta apoyada sobre el piso horizontal. En determinado momento se comienza a llenar la caja con agua, a través de un tubo sin peso apreciable conectado en su costado, como indica la figura.

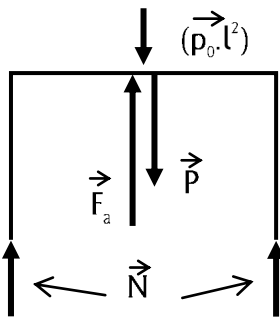


- Si el agua se vierte en forma lenta y se llena la caja e incluso se supera su altura hasta lograr un nivel  $h$  en el tubo, calcular el valor mínimo de  $h$  para que la caja despegue del piso.
- Si la caja contiene un pequeño corcho, liviano, que flota en el agua, decir (justificando) si la fuerza que ejerce el agua mandando al corcho hacia la parte superior de la caja es proporcional a la altura  $h$ .

Solución:

- En el sentido vertical, sobre la caja actúan cuatro fuerzas: la del aire ( $\vec{p}_0 \cdot l^2$ ), la del agua

( $\vec{F}_a$ ), la de la Tierra ( $\vec{P}$ ), y la del piso ( $\vec{N}$ ):



En el límite,  $N = 0$ .  $\therefore p_0 \cdot l^2 + P = F_a$

Por otro lado:

$$F_a = p \cdot l^2 = [p_0 + \delta \cdot g \cdot (h_{\min} - H)] \cdot l^2$$

$$\therefore \boxed{h_{\min} = H + P / (\delta \cdot g \cdot l^2)}$$

b) Cuando el agua en el tubo supera el nivel  $H$ , comienza a empujar hacia arriba la parte superior de la caja (tapa), como se ha visto. Pero hasta que no adquiera cierto nivel, la caja permanece en reposo. Por lo tanto una porción del agua debajo de la tapa está también en reposo, pero esta vez bajo la acción de su peso, del resto del fluido (empuje) y de la tapa. De manera que un cuerpo real que ocupe esa porción estará bajo la acción de su propio peso, de la tapa y de la fuerza que ejerce el agua. Esta última no es la misma que el empuje analizado por Arquímedes, según se ha visto.

No obstante, cabe enfatizar que el empuje sobre un cuerpo libre, sumergido en un fluido, no depende de la profundidad. Si la concentración de sales fuera la misma en todo el mar, y este fuera absolutamente incompresible, el peso específico del mar sería el mismo en cualquier lugar; por lo tanto el empuje (“peso del fluido desalojado”) sobre un objeto sumergido sería el mismo a 10 000 m de profundidad que cerca de la superficie libre.

.....

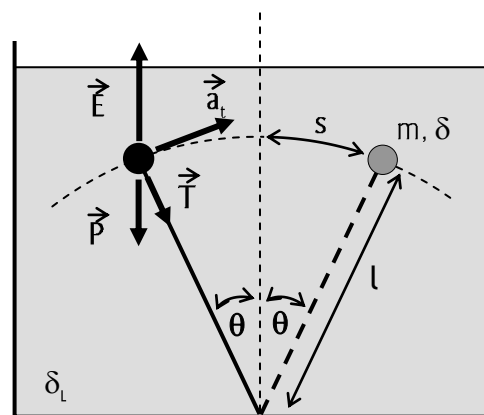
**Ejemplo 154**

Un cuerpito de masa  $m$  y densidad  $\delta$  está sujeto a un hilo enganchado por su otro extremo al fondo de un recipiente con líquido de densidad  $\delta_l$ . Si se aparta el hilo un pequeño ángulo respecto de la vertical, ¿cuál será el periodo de las oscilaciones de la masa  $m$ ?

DATOS:  $\delta < \delta_l$  ;  $m$  ;  $l$

Solución:

Por ser homogéneo y tener una densidad inferior a la del líquido en el que está sumergido, el cuerpito tiende a subir a la superficie. Pero no puede hacerlo por su vínculo con el piso, a través del hilo; tan solo puede describir un arco de circunferencia de radio  $l$ . Es como el péndulo analizado en *DINÁMICA...*, pero visto al revés.



Las componentes tangenciales de  $\vec{P}$  y  $\vec{E}$  generan la aceleración tangencial  $\vec{a}_t$ . La fuerza que provee el hilo,  $\vec{T}$ , no tiene componente en esa dirección.

$$\Sigma F_t = E_t - P_t = - m \cdot a_t$$

( El signo “-” se debe a que  $a_t$  y  $\theta$  tienen distintos sentidos. Ver péndulo ideal. )

$$E \cdot \text{sen } \theta - P \cdot \text{sen } \theta = - m \cdot a_t$$

Pero:  $E = \delta_l \cdot \text{vol. } g$       y       $P = \delta \cdot \text{vol. } g$

Luego:  $\delta_l \cdot \text{vol. } g \cdot \text{sen } \theta - \delta \cdot \text{vol. } g \cdot \text{sen } \theta = m \cdot a_t = - \delta \cdot \text{vol. } a_t$

$$\delta_l \cdot g \cdot \text{sen } \theta - \delta \cdot g \cdot \text{sen } \theta = m \cdot a_t = - \delta \cdot a_t$$

$$(\delta_l/\delta) \cdot g \cdot \text{sen } \theta - g \cdot \text{sen } \theta = - a_t$$

Para  $\theta$  menor a (1/10) rad ,  $\text{sen } \theta \approx \theta$  ;  $\theta = s/l$

$$(\delta_l/\delta) \cdot g \cdot (s/l) - g \cdot (s/l) = - a_t$$

$$a_t = - g \cdot (s/l) [ (\delta_l/\delta) - 1 ] = - g \cdot (l/l) [ (\delta_l/\delta) - 1 ] \cdot s$$

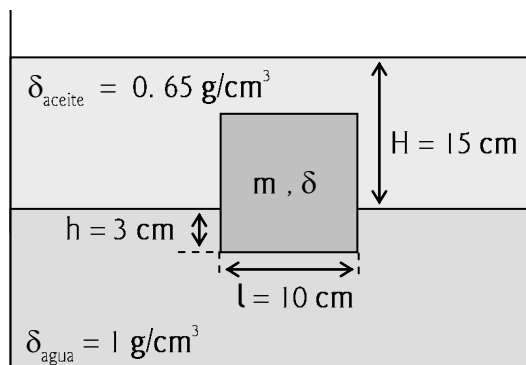
Vemos que la aceleración es proporcional a la posición, cambiada de signo. Se trata, pues, de un movimiento circular armónico simple en el que  $g \cdot (l/l) [ (\delta_l/\delta) - 1 ] = \omega^2$ .

Como  $\omega^2 = 2\pi/T$ , resulta:

$$T = 2\pi \cdot [ (l/g) \cdot \delta / (\delta_l - \delta) ]^{1/2}$$

### Ejemplo 155

Un bloque cúbico de madera de 10 cm de lado flota en un líquido compuesto de aceite y agua, como indica la figura. Si su cara inferior se encuentra a 3 cm de la superficie de separación de estos líquidos,



- a) ¿cuál es la masa  $m$  del bloque?
- b) ¿Cuál es la presión manométrica en la cara inferior del bloque?

Solución:

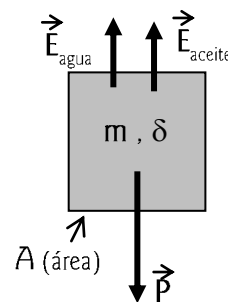
El bloque se encuentra en equilibrio en esa posición bajo la acción del peso y de los empujes del agua y del aceite:

a)

$$\underbrace{\delta \cdot \text{vol. } g}_P = \underbrace{\delta_{\text{agua}} \cdot 3 \text{ cm. } A \cdot g}_{E_{\text{agua}}} + \underbrace{\delta_{\text{aceite}} \cdot (10 - 3) \text{ cm. } A \cdot g}_{E_{\text{aceite}}}$$

$$m = (1 \text{ g/cm}^3) \cdot 3 \text{ cm. } 100 \text{ cm}^2 + (0.65 \text{ g/cm}^3) \cdot 7 \text{ cm. } 100 \text{ cm}^2$$

$$m = 755 \text{ gramos}$$



b) Presión manométrica:  $p - p_0$  - Ver página 250 -

$$p - p_0 = p_{\text{aceite}} \text{ en la superficie de separación} + p_{\text{agua}} =$$

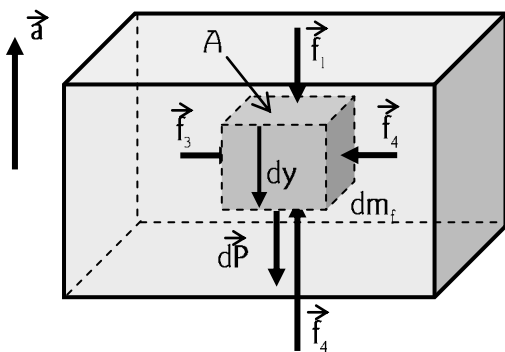
$$= \delta_{\text{aceite}} \cdot g \cdot 15 \text{ cm} + \delta_{\text{agua}} \cdot g \cdot 3 \text{ cm} = g \cdot [ (0.65 \text{ g/cm}^3) \cdot 15 \text{ cm} + (1 \text{ g/cm}^3) \cdot 3 \text{ cm} ]$$

$$p - p_0 = 12\,495 \text{ dyn/cm}^3$$

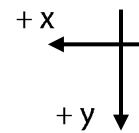
.....

*Fluidos en reposo dentro de recipientes acelerados*

El recipiente de la figura, con aceleración  $\vec{a}$  hacia arriba, está lleno de fluido de densidad  $\delta_f$  en reposo respecto del recipiente. Veamos cuánto vale  $dp$  entre las caras superior e inferior de una pequeña porción de fluido de volumen  $dvol_f$  y masa  $dm_f$ .



Visto desde Tierra (S.I.):



$$\sum f_x = 0 \implies f_4 = f_3$$

$$\sum f_y = dm_f \cdot a \implies dP + f_1 - f_2 = -dm_f \cdot a$$

$$dP = dV_f \cdot \delta_f \cdot g = A \cdot dy \cdot \delta_f \cdot g$$

$$f_1 = p_1 \cdot A \quad ; \quad f_2 = p_2 \cdot A \quad ; \quad p_2 = p_1 + dp$$

$$A \cdot dy \cdot \delta_f \cdot g + p_1 \cdot A - p_2 \cdot A = -A \cdot dy \cdot \delta_f \cdot a \quad \therefore \quad \boxed{dp = \delta_f \cdot (a + g) \cdot dy}$$

¿Cómo se interpreta esto? Un fluido en un recipiente acelerado hacia arriba se comporta como si el recipiente estuviera en reposo, pero sobre un planeta en el que la aceleración de la gravedad es  $\vec{a} + \vec{g}$ . El empuje que sufriría un cuerpo colocado en el lugar de la porción de fluido analizada, sería de  $dm_f \cdot (\vec{a} + \vec{g})$ ; es decir, equivaldría al “peso” del fluido desalojado en “ese” planeta.

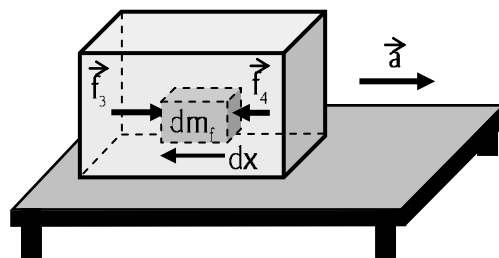
Por otra parte se observa que si en el espacio libre, “entre las estrellas” ( $g = 0$ ), se acelera un recipiente con fluido, habría un gradiente de presión de valor  $dp = \delta_f \cdot a \cdot dy$  como si el recipiente estuviera en reposo sobre un planeta con aceleración de la gravedad igual a  $\vec{a}$ .

Si en vez de provocar una aceleración hacia arriba lo hubiésemos hecho hacia abajo, el gradiente habría sido:  $dp = \delta_f \cdot (g - a) \cdot dy$ , y el empuje:  $dm_f \cdot (g - a)$ . Lo que indica que si se deja caer libremente ( $a = g$ ) un recipiente con fluido, desaparece el gradiente de presión y el empuje sobre un cuerpo depositado en dicho fluido es CERO. Si fuera una pileta cayendo, podríamos caminar mientras tanto por su fondo sin sentir fuerza alguna que nos tratase de elevar a la superficie.

*Aceleración lateral*

El recipiente de la figura anterior lo consideraremos ahora deslizándose sobre una mesa con

aceleración horizontal constante. Una porción de fluido cualquiera ( $dm_f$ ) en equilibrio respecto del resto del fluido y del recipiente, será acelerada respecto de Tierra por el resto del fluido.



Valdrá la ecuación:

$$\sum \vec{f}_x = dm_f \cdot \vec{a} \qquad f_3 - f_4 = dm_f \cdot a \qquad +x \longleftarrow$$

Con las consideraciones anteriores, y teniendo en cuenta el desarrollo del *Teorema Fundamental*, el gradiente de presión en la dirección  $x$  debido a  $\vec{a}$ , es:  $dp = \delta_f \cdot a \cdot dx$ .

En realidad, el fluido no se da cuenta que se encuentra dentro de un recipiente acelerado lateralmente. “Siente” un único campo de fuerzas y se comporta como si el recipiente estuviera detenido en un lugar en el que la aceleración gravitatoria fuera  $\vec{a} + \vec{g}$ . Por lo tanto el gradiente de presión es la suma de los que se deben a  $\vec{a}$  y  $\vec{g}$ :

$$dp_t = \delta_f \cdot g \cdot dy + \delta_f \cdot a \cdot dx$$

En cuanto al *empuje*, ya deja de ser vertical. Si decimos que la porción  $dm_f$  de fluido está en reposo dentro del recipiente acelerado - S.N.I. -, la suma de las fuerzas *peso* (debida al planeta), *ficticia* (debida a la aceleración del recipiente), y *empuje* (debida a la acción del resto del fluido sobre la porción considerada), vale *cero*. Luego, conociendo la dirección y el módulo de  $d\vec{P}$  y  $\vec{f}^*$ , podemos determinar los del empuje:

$$E^2 = (f^{*2} + dP^2) \qquad f^* = dm_f \cdot a$$

$$E = dm_f \cdot (a^2 + g^2)^{1/2} \qquad \text{tg } \theta = f^*/dP = a/g$$

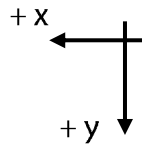
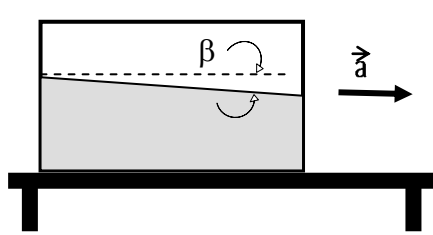
Cualquier cuerpo colocado en el lugar de  $dm_f$ , en estas circunstancias, sufriría el empuje  $\vec{E}$  calculado. Si el cuerpo tiene una densidad menor a la del fluido, “flotaría” o se iría hacia arriba en la dirección señalada con  $\theta$ ; si el cuerpo es de densidad superior a la del fluido, se “hundiría” siguiendo también la misma dirección de  $\vec{E}$ .

Se puede verificar en la práctica lo antedicho con un globo de He y un hilo atado a la butaca de un avión: cuando el aparato está detenido en la pista, el hilo se mantiene tenso en la dirección vertical; pero cuando el avión corre por la pista acelerado buscando la velocidad de despegue, el hilo cambia de dirección yendo el globo hacia adelante. El aire contenido en la nave está en reposo en un recipiente acelerado (avión) y sucede lo analizado.

Si el fluido es un líquido, la superficie libre del mismo ya no es un plano horizontal, como cuando el recipiente está en equilibrio. El plano de la superficie libre se inclina “hacia adelante”, como puede demostrarse teniendo en cuenta que en esta superficie la presión es 0 (si la experiencia se hace en un ambiente sin aire), o la que corresponde a la presión atmosférica.

Supongamos que el recipiente está abierto y que lo rodea la atmósfera que ejerce una

presión  $p_0$ . En ese caso hay que sumar  $p_0$  (por Pascal) a  $\delta_f \cdot g \cdot dy + \delta_f \cdot a \cdot dx$ , e igualar el resultado a  $p_0$ , que es la presión que soportan las moléculas superficiales en contacto con el aire:



$$p_0 + \delta_f \cdot g \cdot dy + \delta_f \cdot a \cdot dx = p_0$$

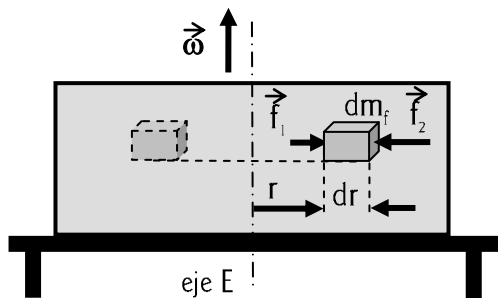
$$\therefore \delta_f \cdot g \cdot dy + \delta_f \cdot a \cdot dx = 0$$

$$dy/dx = -a/g$$

$$\text{tg } \beta = -dy/dx = a/g$$

¡ Observar que  $\theta$  y  $\beta$  resultan iguales, por lo que el empuje es perpendicular a esta superficie libre !

¿ Y si el recipiente gira con velocidad angular  $\omega$  constante, en torno a un eje vertical ? ...



$dm_f$  es una porción de fluido en reposo respecto del resto del fluido y del recipiente que gira.  $f_1$  y  $f_2$  son las componentes horizontales del empuje que ejerce el resto del fluido sobre esa porción. La componente vertical, al igual que el peso, no han sido dibujadas.

Si  $dm_f$  gira respecto de tierra describiendo una circunferencia en un plano horizontal, es obvio que en la posición en que se encuentra en la figura,  $f_2$  debe ser mayor que  $f_1$  para suministrar la aceleración centrípeta que el movimiento circular requiere.

Luego:  $f_2 - f_1 = dm_f \cdot a_c$

con:  $a_c = \omega^2 \cdot r$        $f_2 = (p + dp) \cdot A$        $f_1 = p \cdot A$        $dm_f = \delta_f \cdot A \cdot dr$

Resulta:  $dp = \delta_f \cdot \omega^2 \cdot r \cdot dr$        $\Rightarrow$        $p = p_e + \delta_f \cdot \omega^2 \cdot r^2 / 2$

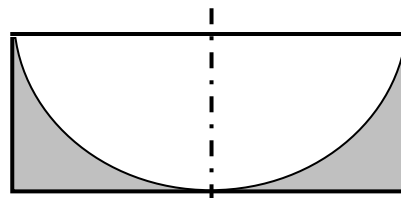
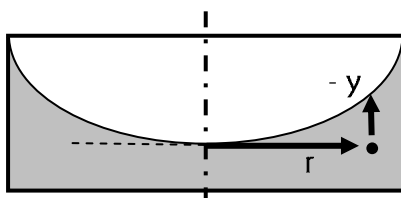
en donde se puede apreciar que, si no hay rotación ( $\omega = 0$ ), no hay incremento de presión en el sentido radial; por otra parte, la presión aumenta a medida que nos alejamos del eje.

Si se trata de un líquido, la forma de la superficie libre se obtiene teniendo en cuenta que en ésta la presión es  $p_0$ , en un ambiente con aire:

$$p_0 + \delta_f \cdot g \cdot dy + \delta_f \cdot \omega^2 \cdot r \cdot dr = p_0$$

$$y = -\omega^2 \cdot r^2 / (2 \cdot g)$$

La superficie forma una parábola, pudiendo darse el caso en el que todo el líquido se vaya hacia las paredes del recipiente, dejando el fondo seco:



Haciendo un análisis similar al del caso en que el recipiente tenía una aceleración lateral, es fácil comprobar que aquí el *empuje* del fluido tiene una dirección que depende del lugar en que se lo considere, y su módulo vale:

$$E = dm_f \cdot [ (\omega \cdot r)^2 + g^2 ]^{1/2}$$

### DINÁMICA DE LOS FLUIDOS

A continuación haremos un breve análisis del movimiento de ciertos fluidos dentro del recipiente que los contiene. Para ello consideraremos qué es lo que pasa en algún punto del espacio (coordenadas x, y, z) en un instante t determinado, describiendo la situación a través de la densidad  $\delta_f$ , la presión  $p$ , y la velocidad  $\vec{v}$  del fluido.

¿Por qué “breve” análisis y “ciertos fluidos” ? Porque, es de imaginarse, no es lo mismo el estudio del movimiento de la lava de un volcán, “pesada” y lenta en su desplazamiento, que el estudio de los torbellinos del aire a la salida de una turbina de avión, o los remolinos en el corazón de una tormenta. Mucho se ha aprendido sobre la dinámica de estos fluidos a través de observaciones “in situ” o en túneles diseñados para simular situaciones reales; pero esto escapa al tratamiento que aquí damos al tema “fluidos”, en el que solo se pretende analizar qué es lo que pasa con aquellos cuya dinámica es simple pero ilustrativa y útil para justificar y prever muchos fenómenos naturales y el comportamiento de nuestros objetos o máquinas inmersos en fluidos o usando fluidos.

De manera que veremos solamente flujos *irrotacionales*, *estacionarios*, *incompresibles* y *no viscosos*; es decir, flujos “ideales”.

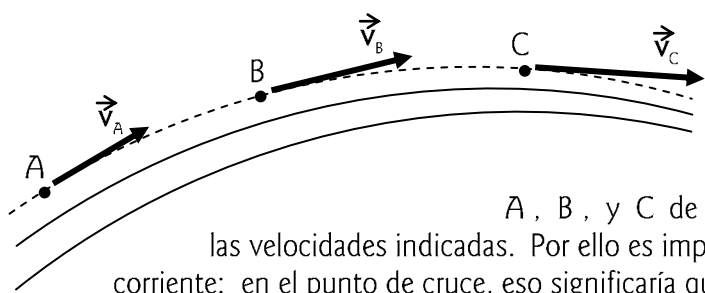
Es *irrotacional* el flujo sin remolinos. Aquel que no haría girar una pequeña rueda con paletas inmersa en el fluido.

Es *estacionario* el flujo que en cada punto del espacio tiene la misma velocidad: las partículas de fluido que pasan por ese punto, una detrás de otra, tienen la misma velocidad. Pero en otro punto del espacio o de la cañería que las contiene pueden tener otra velocidad, aunque siempre igual para cada partícula que pasa por allí.

Es *incompresible* el flujo si no varía la densidad del fluido en su desplazamiento.

Es *no viscoso* si no presenta resistencias al movimiento entre capas; si no tiene fuerzas tangenciales, como quedó expresado en el inicio del tema “fluidos”.

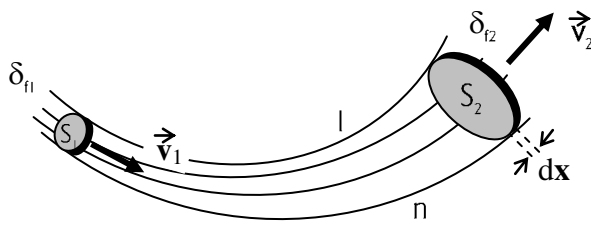
En un flujo estacionario las partículas del fluido se desplazan como formando tubos de flujo coaxiales. Cada tubo de flujo está formado por líneas de corriente o de flujo que no se cruzan, en las que en cada punto del espacio las partículas de fluido pasan con idéntica velocidad.



Estas son líneas de corriente de algún tubo de flujo imaginario. Las partículas que pasen por los puntos

A, B, y C de la línea punteada, tendrán siempre las velocidades indicadas. Por ello es imposible que se crucen dos líneas de corriente: en el punto de cruce, eso significaría que habría dos velocidades posibles.

Ecuación de Continuidad



El fluido del tubo de flujo estacionario de la figura, compuesto por  $n$  líneas de corriente, atraviesa las secciones  $S_1$  y  $S_2$  con velocidades  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ . Si en el tiempo  $dt$  cada partícula avanza  $dx$ , por  $S_1$  pasa un volumen  $d(\text{vol}_1)$  de fluido igual a  $S_1 \cdot dx_1$ , y por  $S_2$  un volumen

$d(\text{vol}_2)$  igual a  $S_2 \cdot dx_2$ . Si además consideramos al fluido sin fuentes ni sumideros, el caudal que pasa por una sección es el mismo que el que pasa por la otra:  $q_1 = q_2$ .

$$q_1 = dm_1/dt = \delta_{f1} \cdot d(\text{vol}_1)/dt = \delta_{f1} \cdot S_1 \cdot dx_1/dt = \delta_{f1} \cdot S_1 \cdot v_1$$

$$q_2 = dm_2/dt = \delta_{f2} \cdot d(\text{vol}_2)/dt = \delta_{f2} \cdot S_2 \cdot dx_2/dt = \delta_{f2} \cdot S_2 \cdot v_2$$

Igualando:

$$\delta_{f1} \cdot S_1 \cdot v_1 = \delta_{f2} \cdot S_2 \cdot v_2$$

Si el fluido fuera incompresible ( $\delta_{f1} = \delta_{f2} = \delta_{in}$ ):

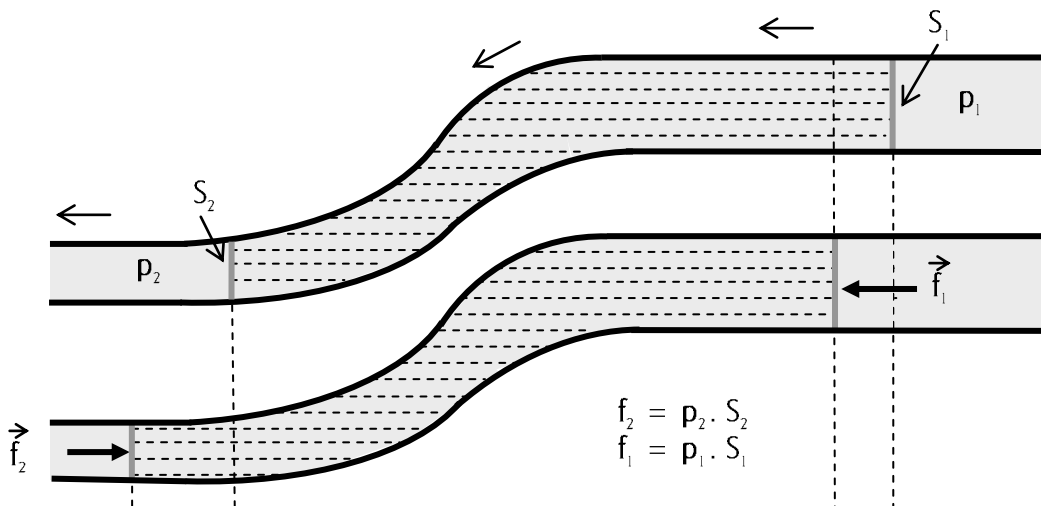
$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

Es sencillo apreciar esto en la práctica. Al regar con una manguera de plástico, observamos cómo el chorro de agua llega más lejos si estrangulamos la manguera: aumenta la velocidad de salida por disminución de la sección transversal de la misma.

Ecuación de Bernoulli

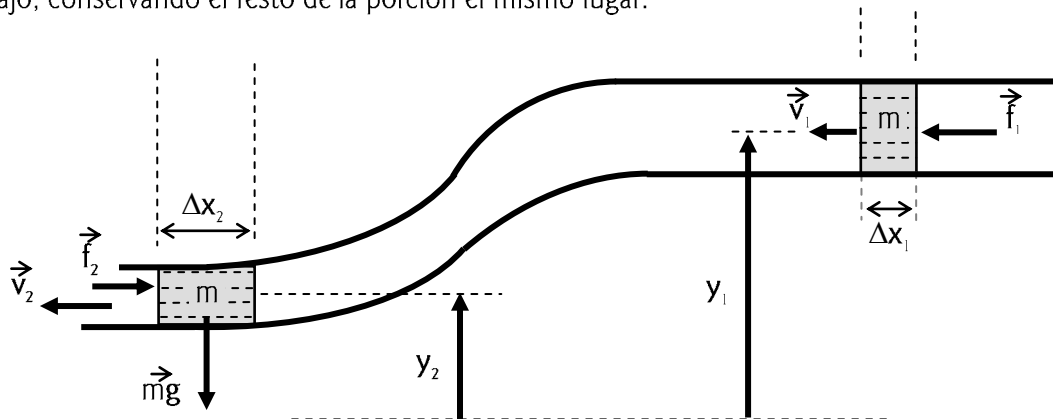
En "Hidrostatica" aplicamos las leyes de Newton para resolver algunos problemas. Veamos ahora cómo se aplican estas leyes en "Hidrodinámica", a través de la forma del Teorema "Trabajo-Energía".

Por el caño de la figura circula un fluido incompresible de densidad  $\delta_f$ , de derecha a izquierda, en forma estacionaria. Analicemos qué le sucede a una porción de este fluido, irrotacional y no viscoso, que pasa de una posición a otra, como se indica.





En el caso de esta forma de caño, la porción en análisis está influenciada por el resto del fluido ( $p_1, p_2$ ) y también por la gravedad: el fluido desciende por su peso. Observando las figuras se ve que todo sucede como si un volumen de masa  $m$  se hubiese desplazado de arriba hacia abajo, conservando el resto de la porción el mismo lugar:



Aplicaremos ahora el teorema Trabajo-Energía ( $W_{todas} = \Delta Ec$ ):

$$f_1 \cdot \Delta x_1 - f_2 \cdot \Delta x_2 + m \cdot g \cdot (y_1 - y_2) = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$$

$$m = \delta_f \cdot vol_1 = \delta_f \cdot vol_2 \quad \Leftrightarrow \quad m = \delta_f \cdot \Delta x_1 \cdot S_1 = \delta_f \cdot \Delta x_2 \cdot S_2$$

$$p_1 \cdot S_1 \cdot (m / \delta_f \cdot S_1) - p_2 \cdot S_2 \cdot (m / \delta_f \cdot S_2) + m \cdot g \cdot (y_1 - y_2) = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$$

Multiplicando cada término por  $\delta_f / m$ :

$$p_1 - p_2 + \delta_f \cdot g \cdot y_1 - \delta_f \cdot g \cdot y_2 = \frac{1}{2} \delta_f \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \delta_f \cdot v_1^2$$

$$\therefore \quad p_1 + \delta_f \cdot g \cdot y_1 + \frac{1}{2} \delta_f \cdot v_1^2 = p_2 + \delta_f \cdot g \cdot y_2 + \frac{1}{2} \delta_f \cdot v_2^2 = k \text{ (constante)}$$

*Ecuación de Bernoulli*

Daniel Bernoulli [ *Holanda, 1700 - Suiza, 1782* ]

Cada uno de estos términos tiene dimensiones de *presión*, como puede verificarse con las unidades de medida. Pero a los términos  $p_i + \delta_f \cdot g \cdot y_i$  se los llama *presión estática* mientras que  $\frac{1}{2} \delta_f \cdot v_i^2$  recibe el nombre de *presión dinámica*. Se observa que si el fluido se detiene ( $v_1 = v_2 = 0$ ) resulta:  $p_1 + \delta_f \cdot g \cdot y_1 = p_2 + \delta_f \cdot g \cdot y_2$ , como se había visto en el caso "hidrostático" del *Ejemplo 147*.

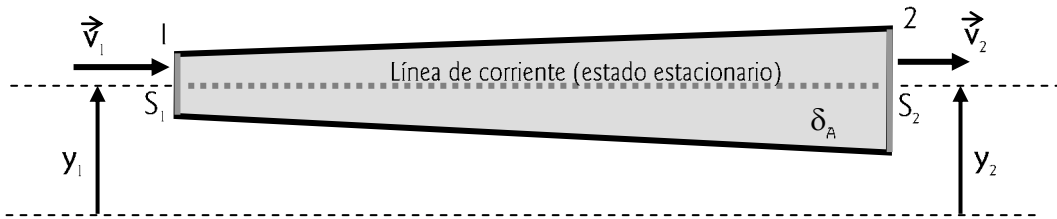
¿Qué nos dice a simple vista la ecuación de Bernoulli? ...

En primer lugar, tiene absoluta validez sobre líneas de corriente de flujos estacionarios, irrotacionales, incompresibles y no viscosos. Por lo tanto, si tomamos a los puntos 1 y 2 sobre una de estas líneas, y la velocidad disminuye en el punto 2, por ejemplo, necesariamente aumenta la presión estática en dicho punto en relación a la presión estática en el punto 1; y viceversa: si  $v_2 \uparrow$ ,  $(\frac{1}{2} \delta_f \cdot v_2^2) \uparrow$ , la presión estática en 2 baja.

Es decir, sobre la misma línea de corriente, la *presión total* (estática + dinámica) se conserva.

Ejemplo 156

Por el caño de sección variable, colocado en forma horizontal, circula agua de izquierda a derecha. Considerando al agua incompresible, de densidad  $\delta_A$ , y conociendo las secciones



$S_1$  y  $S_2$  ( $S_2 > S_1$ ), explicar cualitativamente cómo será la relación de presiones en las secciones mencionadas, aplicando la ecuación de Bernoulli.

Solución:

La ecuación de Bernoulli se puede aplicar entre puntos de una línea de corriente de un flujo estacionario. Por lo tanto, sobre la línea dibujada, en las secciones  $S_1$  y  $S_2$ :

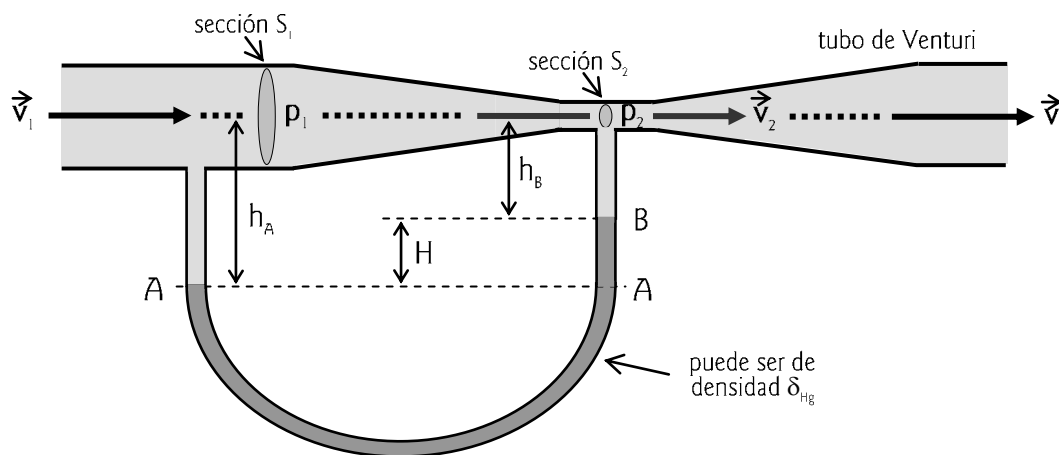
$$p_{T1} = p_{T2} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{p_1 + \delta_A \cdot g \cdot y_1 + \frac{1}{2} \delta_A \cdot v_1^2}_{p_{T1}} = \underbrace{p_2 + \delta_A \cdot g \cdot y_2 + \frac{1}{2} \delta_A \cdot v_2^2}_{p_{T1}}$$

Siendo  $y_1 = y_2$ , resulta:  $p_1 + \frac{1}{2} \delta_A \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \delta_A \cdot v_2^2$

Según la ecuación de continuidad,  $v_2$  debería ser menor que  $v_1$  por una cuestión de conservación del caudal. Por lo tanto es como si el agua del tubo dibujado fuese frenada por el resto del fluido; es decir, deberá ser mayor la fuerza que el resto del agua hace en la sección  $S_2$  que la que hace en la sección  $S_1$ . La presión  $p_2$  deberá ser mayor que  $p_1$ , por lo antedicho, lo que queda verificado por la ecuación de Bernoulli.

.....

Por otra parte, hay un dispositivo que utiliza estas leyes para medir velocidades de flujos de fluidos. Es el medidor de Venturi:



La rapidez a medir es  $v_1$ . Corresponde a un fluido de densidad  $\delta$  que circula por una cañería

en la que se ha insertado el tubo de Venturi, que tiene adherido un tubito con mercurio (u otro líquido) en forma de “U”. El fluido que pasa por la cañería y por el Venturi está obligado a aumentar su velocidad en la sección  $S_2$ , cumpliéndose la ecuación de continuidad ya vista:  $S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$ .

De la figura:  $p_A = p_B + \delta_{Hg} \cdot g \cdot H$

Pero:  $p_A = p_1 + \delta \cdot g \cdot h_A$  y  $p_B = p_2 + \delta \cdot g \cdot h_B$

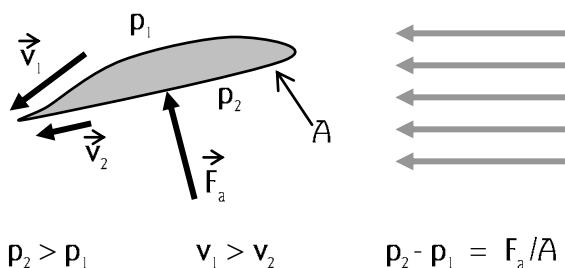
Luego:  $p_1 - p_2 = \delta_{Hg} \cdot g \cdot H - \delta \cdot g \cdot H$

Combinando esta última ecuación con las anteriores, resulta:

$$v_1 = S_2 \cdot [ 2 (\delta_{Hg} - \delta) \cdot g \cdot H / \delta \cdot (S_1^2 - S_2^2) ]^{1/2}$$

Aunque las condiciones del flujo de un fluido no sean las ideales que conducen al análisis de Bernoulli, en la práctica se observa que, en situaciones parecidas, vale aquello de que “cuando aumenta la velocidad, disminuye la presión estática”. Esto puede verificarse en el vuelo de los aviones con sus alas “aerodinámicas”, o los submarinos con sus aletas, o en la pelota de fútbol que realiza una “comba” en un tiro de esquina, o en los aerosoles, o en los sifones de los inodoros, etc., etc..

La sección de las alas de los aviones, por ejemplo, es tal que el aire circula por encima de ellas a mayor velocidad que por debajo, lo que ocasiona una diferencia de presiones entre las caras superior e inferior de las alas que produce una fuerza neta ascensional ( $\vec{F}_a$  en la figura).



superior e inferior de las alas que produce una fuerza neta ascensional ( $\vec{F}_a$  en la figura).

Los alerones son porciones de ala móviles con los que se regula la dirección y magnitud de esta fuerza durante las

maniobras de desplazamiento de los aviones hacia arriba o hacia abajo.

Otro tanto pasa con los submarinos y sus aletas, los que también se mueven en un fluido. En cambio los autos de carrera tienen alerones “invertidos”, que producen una fuerza de empuje hacia abajo, obligando al auto a circular pegado al suelo.

### Ejemplo 157

Un avión vuela con velocidad constante, de manera que la rapidez del aire respecto de la superficie superior de las alas es de  $50 \text{ m/s}$ , y respecto de la superficie inferior de las mismas es de  $40 \text{ m/s}$ . Considerando la densidad del aire de  $1.20 \text{ kg/m}^3$ , el área de un lado de cada ala de  $9 \text{ m}^2$ , calcular el peso del avión.

Solución:

Si el aparato vuela con  $\vec{v} = \text{cte.}$ , quiere decir que  $\sum \vec{f} = 0$ . Por lo tanto la fuerza “peso”

debe ser igual a la “ascensional”, causada por la diferencia de presiones que se establece como consecuencia de la distintas rapidezces alrededor de las alas.

Si es laminar el flujo del fluido alrededor de las alas, se pueden tomar dos líneas de corriente que pasan encima y debajo de cada ala, respectivamente. Como ambas líneas nacen y mueren en el mismo fluido, se puede aplicar Bernoulli para puntos 1 y 2 ubicados sobre cada una de ellas:

$$p_{T1} = p_{T2} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{p_1 + \delta_A \cdot g \cdot y_1 + \frac{1}{2} \delta_A \cdot v_1^2}_{p_{T1}} = \underbrace{p_2 + \delta_A \cdot g \cdot y_2 + \frac{1}{2} \delta_A \cdot v_2^2}_{p_{T1}}$$

Aquí no tiene sentido tener en cuenta el segundo término de cada miembro, porque la diferencia de presiones estáticas debida al espesor de las alas, es despreciable ( $y_1 - y_2 \cong 0$ ).

Queda:  $p_1 + \frac{1}{2} \delta_A \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \delta_A \cdot v_2^2$ .

Reemplazando valores, resulta una diferencia de presión:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \delta_A \cdot (v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2} 1.20 \text{ kg/m}^3 \cdot (50^2 - 40^2) \text{ m}^2/\text{s}^2 = 540 \text{ N/m}^2$$

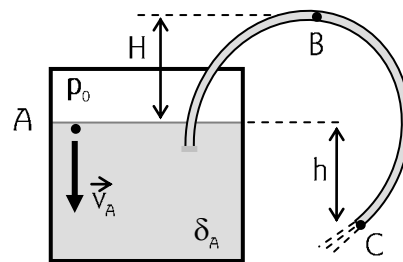
$$\therefore F_a / A = p_2 - p_1 = 540 \text{ N/m}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_a = P = 540 \text{ N/m}^2 \cdot 2.9 \text{ m}^2 = 9720 \text{ N}}$$

Empero, téngase en cuenta que este resultado no es exacto porque el flujo no es puramente laminar, por un lado, y porque no se tuvo en cuenta el efecto de sustentación de las otras partes aerodinámicas del avión. Sin embargo es muy aproximado y habla de la utilidad de la ecuación de Bernoulli cuando se trata de movimientos de fluidos en relación a objetos inmersos en él.

.....

**Ejemplo 158**

El sifón es un dispositivo utilizado para extraer nafta, por ejemplo, del tanque de un automóvil. Pero también es el que justifica el funcionamiento de los inodoros de los sanitarios domiciliarios, entre otras funciones prácticas. Para el caso de la figura siguiente, calcular la presión en la parte superior del tubo (B), la velocidad de salida del líquido (C), y hasta qué altura podría elevarse el tubo (H), si el líquido a extraer es agua.



Solución:

Supondremos que por todo el tubo (ABC) el agua circula en forma de flujo estacionario. Por lo tanto aplicaremos Bernoulli entre A y C, y entre A y B, para ver qué deducimos.

Entre A y C:  $\underbrace{p_0 + \frac{1}{2} \delta_A \cdot v_A^2}_{p_{TA}} = \underbrace{p_0 - \delta_A \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \delta_A \cdot v_C^2}_{p_{TC}} \quad \therefore \quad \boxed{v_C = (2gh)^{1/2}}$

¡ Obsérvese que, a la salida de la manguera, el líquido sale con mayor velocidad cuanto más baja esté dicha salida (mayor h) !

[ Incluso se puede demostrar que si se hacen dos agujeros de igual sección en el fondo de una pileta, y se conecta una manguera a uno de ellos, saldrá más caudal por la manguera que por el agujero libre ]

$$\text{Entre } A \text{ y } B: \quad \underbrace{p_0 + \frac{1}{2} \delta_A \cdot v_A^2}_{p_{TA}} = \underbrace{p_B + \delta_A \cdot g \cdot H + \frac{1}{2} \delta_A \cdot v_B^2}_{p_{TB}}$$

Pero  $v_B = v_C$ , porque el tubo es de sección constante.

$$\therefore p_B = p_0 - \delta_A \cdot g \cdot H - \delta_A \cdot g \cdot h = p_0 - \delta_A \cdot g \cdot (H+h)$$

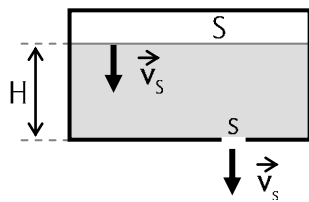
de lo que se deduce que la altura máxima  $H$  será aquella para la que el término  $\delta_A \cdot g \cdot (H+h)$  sea igual a  $p_0$ . ( $H+h \cong 10 \text{ m}$ ).

.....

### Ejemplo 159

Una vasija derrama agua por un agujero de sección  $s$  ubicado en su fondo. Si la sección de la vasija es  $S$  (con  $S \gg s$ ), y el líquido tiene inicialmente una altura  $H$ , calcular el porcentaje de error que se comete al despreciar la velocidad de la superficie del mismo, y cuánto tiempo tarda en derramarse toda el agua.

Solución:



$$\underbrace{p_0 + \delta_A \cdot g \cdot H + \frac{1}{2} \delta_A \cdot v_s^2}_{p_{Ts}} = \underbrace{p_0 + \frac{1}{2} \delta_A \cdot v_s^2}_{p_{Ts}}$$

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad:  $v_s \cdot S = v_s \cdot s$ , surge:

$$v_s = [(2gH)^{1/2}] \cdot [1 / (1 - s^2/S^2)]^{1/2}$$

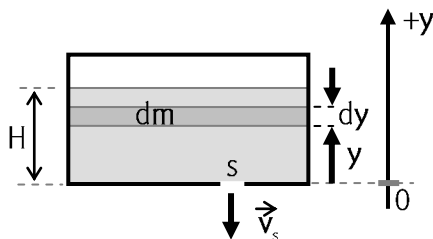
Pero si se desprecia  $s$  frente a  $S$ :  $s \ll S$ , resulta:  $v_s' = (2gH)^{1/2}$ .

El error porcentual en esta aproximación es:  $e \% = [(v_s - v_s') / v_s] \cdot 100$

En cuanto al tiempo de derrame, el caudal de agua que se derrama por "s" es:

$$q = dm/dt = \delta_A \cdot s \cdot v_s$$

en donde  $dm$  es una "masita" de sección  $S$  y espesor  $dy$ , como se aprecia en la figura:



$$dm = d(\text{vol.}) \cdot \delta_A = dy \cdot S \cdot \delta_A$$

$$\begin{aligned} \therefore dt &= (dy \cdot S \cdot \delta_A) / (\delta_A \cdot s \cdot v_s) = \\ &= (S/s) \cdot (1/v_s) \cdot dy \end{aligned}$$

Pero  $v_s$  depende de  $y$ :  $v_s = [(2 \cdot g \cdot y)^{1/2}] \cdot [1 / (1 - s^2/S^2)]^{1/2}$

Resulta: 
$$\int_0^t dt = - \int_H^0 (S/s) \cdot (1/v_s) \cdot dy$$

El signo menos proviene de considerar el sistema de referencias de la figura, en el que se ve que  $v_s$  y  $dy$  tienen distintos sentidos.

Finalmente: 
$$t = 2 \cdot [(S^2 - s^2)^{1/2} / [(s \cdot (2g)^{1/2})]] \cdot H^{1/2}$$

**Ejemplo 160**

Una tubería en forma de “l” contiene agua en su parte vertical hasta 3 m por encima de una válvula, como señala la figura. Luego de abierta la válvula, calcular cuál será la velocidad del agua cuando adopta por completo la posición horizontal.



Solución:

En principio, estaríamos tentados en aplicar Bernoulli para resolver este problema. Pero observemos que en la expresión  $p + \delta_f \cdot g \cdot y + \frac{1}{2} \delta_f \cdot v^2 = k$  el segundo término carece de sentido porque toda la porción de agua cae con la aceleración de la gravedad, y no habría diferencia de presión entre la parte superior de la columna de agua y su parte inferior. Por otra parte, la presión es la misma en ambos extremos ( $= p_0$ ), lo mismo que la velocidad.

Se responde entonces al planteo del problema considerando que el agua cae por su peso, el que ejecuta un trabajo que equivale a la variación de energía cinética. Como el centro de masas se encuentra en el centro geométrico del prisma acuoso, el peso ejecuta un trabajo a lo largo de  $3\text{ m} / 2$ . Resulta:

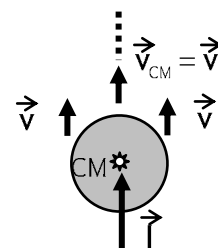
$$m \cdot g \cdot (3\text{ m} / 2) = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad \boxed{v = [2 \cdot g \cdot (3\text{ m} / 2)]^{1/2} = 5.42\text{ m/s}}$$

**Ejemplo 161**

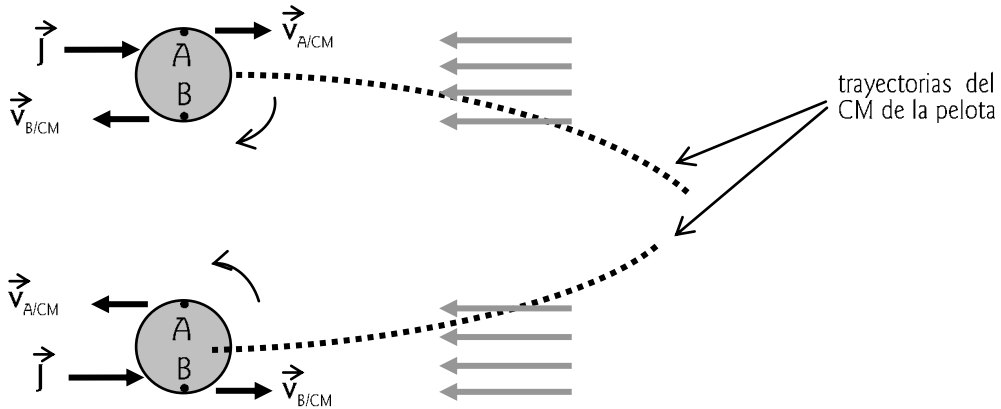
¿A qué se debe que la pelota de fútbol describa distintas curvas en el aire, según cómo sea golpeada (“pateada”) ?

Solución:

Si se golpea a la pelota en la dirección de su CM, sale despedida sin girar, y todas sus partes atraviesan el aire a la misma velocidad  $\vec{v}$ ; la pelota se desplaza “trasladándose”.



Pero si el golpe se efectúa en un costado, como ilustra la figura de abajo, la pelota comienza a girar a la vez que avanza su CM (ver CUERPO RÍGIDO). En el giro arrastra moléculas del aire de manera que aparezca mayor velocidad relativa pelota-aire del lado del extremo opuesto al golpe; aquí la presión disminuye, y la pelota “dobla”, como diría Daniel Pasarella.



Ante esto: ¿tenía razón Pasarella cuando sentenció que “en Bolivia la pelota no dobla” ? (¿O que, en todo caso, “dobla” menos?).

Contesta la pregunta teniendo en cuenta las condiciones atmosféricas en las alturas.

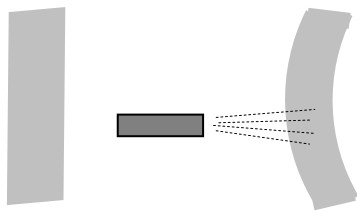
.....

## Experiencias sencillas

### Verificación de la ecuación de Bernoulli

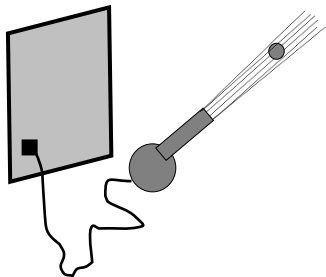
Todos hemos verificado experimentalmente esto de que la pelota describe una especie de parábola en el plano horizontal si se la golpea de costado, ya sea jugando o viendo jugar a los demás. Y hemos presenciado otros fenómenos a los que, quizás, no asociamos hasta ahora con comportamientos de fluidos en movimiento. Como, por ejemplo, el hecho de que se suelen abrir hacia afuera las ventanas, los días de viento.

\* Si simulamos una ventana con una hoja de papel colgando, y soplamos a través de un cañito (puede ser un sorbete de gaseosa) paralelamente a uno de sus lados, veremos cómo la hoja se dobla hacia allí.



Tanto la hoja como la ventana en los días de viento se mueven hacia la zona de menor presión estática; esto es, hacia el lugar en el que el aire circula a mayor velocidad.

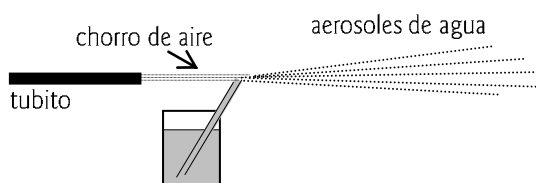
\* Con un secador de cabello se puede sostener una pelotita de ping pong en una posición casi increíble, debido a las mismas causas.



Se enciende el secador y se lo coloca de manera que expulse el aire en dirección vertical, hacia arriba. Luego se coloca la pelotita en esa corriente, sosteniéndola inicialmente hasta que quede flotando. En esta situación se gira el secador, lentamente, hasta lograr el efecto que indica la figura.

Sucede que el aire que se encuentra fuera de la corriente, por estar quieto, ejerce mayor presión y actúa como aro de sostén sobre la pelota: no la deja abandonar la corriente. Lógicamente, si la inclinación es muy grande, el peso vence a la fuerza de sujeción, y la pelotita cae.

\* También se puede pulverizar agua (generar "aerosoles") con una experiencia muy sencilla:



Al soplar por el tubito, el agua sube por el sorbete porque la presión atmosférica sobre la superficie del líquido que se encuentra en el vaso es superior a la de la corriente de aire; luego, al encontrarse con ésta a la salida del sorbete, el agua se

pulveriza (se transforma en aerosol) por los impactos de las moléculas del aire.





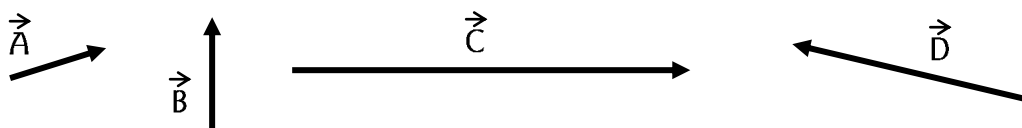
# **APÉNDICE**



## APÉNDICE

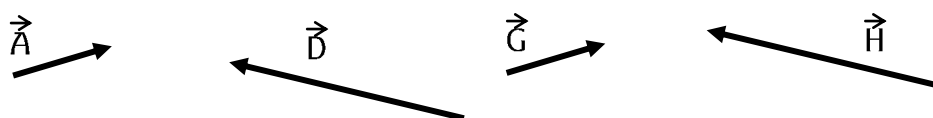
### VECTORES

A diferencia de las cantidades escalares (temperatura, tiempo, longitud, energía ...), que con un número y una unidad de medida dan idea de lo que se quiere expresar, las cantidades vectoriales se representan con una intensidad o módulo, una dirección y un sentido (entre otras, la posición, el desplazamiento, la velocidad, el ímpetu lineal, el impulso ...) expresados por una flechita cuyo tamaño en la escala adoptada es la intensidad de la magnitud física respectiva.



Los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$ , y  $\vec{D}$  son distintos en tamaño, dirección y sentido. Si los cuatro representan velocidades de vehículos, por ejemplo, el más rápido es el del vector  $\vec{C}$ , y marcha en sentido horizontal de izquierda a derecha (Oeste a Este); más despacio y moviéndose de abajo hacia arriba (de Sur a Norte) va el vehículo a cuya velocidad corresponde el vector  $\vec{B}$ .

Dos vectores son iguales cuando coinciden todos sus elementos: módulo, dirección y sentido:

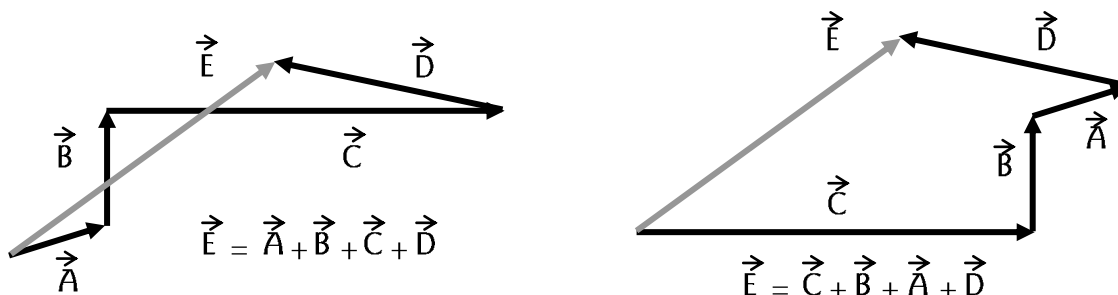


En la figura,  $\vec{A} = \vec{C}$  y  $\vec{B} = \vec{D}$ .

### Suma y resta de vectores

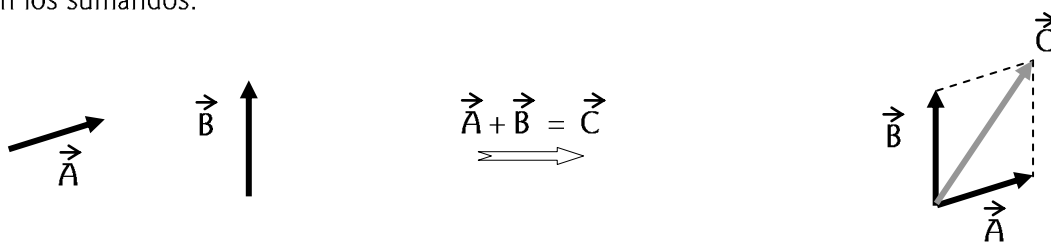
Al igual que con las cantidades escalares, solo se pueden sumar o restar los vectores de la misma magnitud física. Así como no tiene sentido decir que 2 litros + 3 años es igual a 5 metros, tampoco tiene sentido sumar o restar una velocidad con una fuerza.

Sumemos los vectores de la primera figura. Busquemos el vector  $\vec{E}$ .



Obsérvese que se cumple la propiedad conmutativa en la suma. Siempre que se respete el sentido, la dirección y la intensidad de cada vector, no importa cómo se coloquen uno a continuación del otro; el resultado (en este caso  $\vec{E}$ ) es el mismo. Y también se hubiese llegado a ese resultado sumando primero a dos cualesquiera de esos vectores y luego sumando, al resultado obtenido, el resto de los vectores; esta es la propiedad asociativa, igual que la que vale para los números o las cantidades escalares.

Por otra parte, la suma de dos vectores puede hacerse también conformando un paralelogramo con los sumandos:



En cuanto a la resta, primero conviene definir al vector “oposición”. Se llama así al que únicamente difiere de otro en el sentido. Es el caso de los vectores  $-\vec{A}$  y  $-\vec{D}$  que son opuestos de  $\vec{A}$  y  $\vec{D}$  respectivamente:

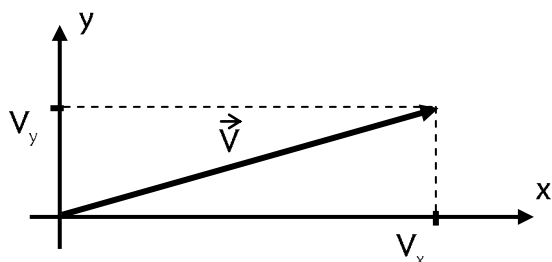


Así, una resta de vectores se transforma en una suma. Por ejemplo:



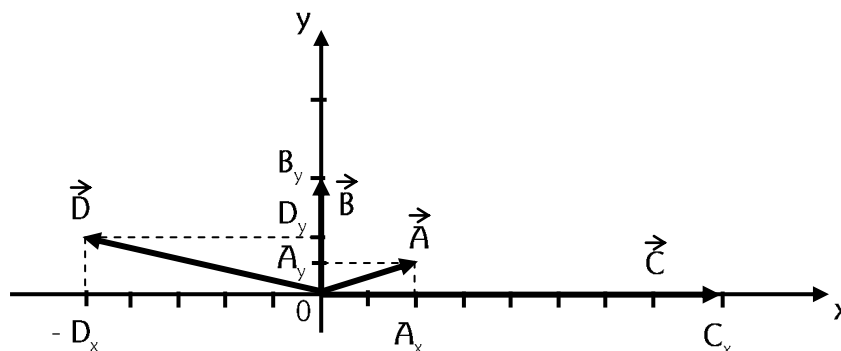
Hemos visto el modo geométrico de suma y resta de vectores. Pero si son muchos, es conveniente sumarlos (o restarlos) a través de la suma (o resta) de sus componentes sobre un sistema de coordenadas ortogonales.

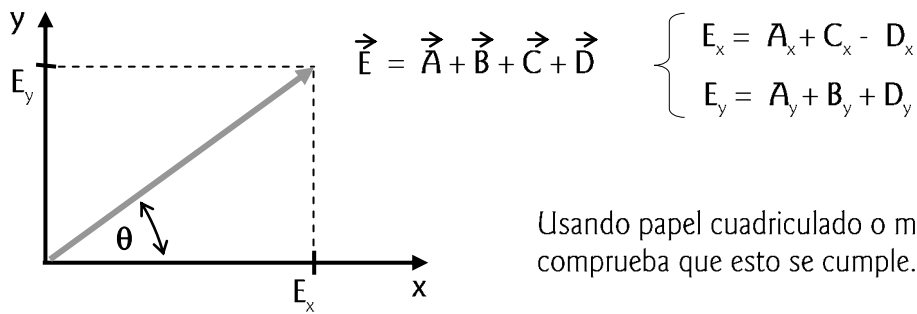
Un vector proyectado sobre los ejes  $x$  e  $y$  de uno de estos sistemas, determina sus componentes ortogonales:



$V_x$  y  $V_y$  son números. Si  $\vec{V}$  es el vector velocidad que indica la marcha hacia el N-E de un móvil,  $V_x$  es la rapidez con que avanza hacia el Este y  $V_y$  la rapidez con que se dirige al N.

Sumemos ahora nuestros vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$ , y  $\vec{D}$  a través de sus componentes:





Usando papel cuadrulado o milimetrado, comprueba que esto se cumple.

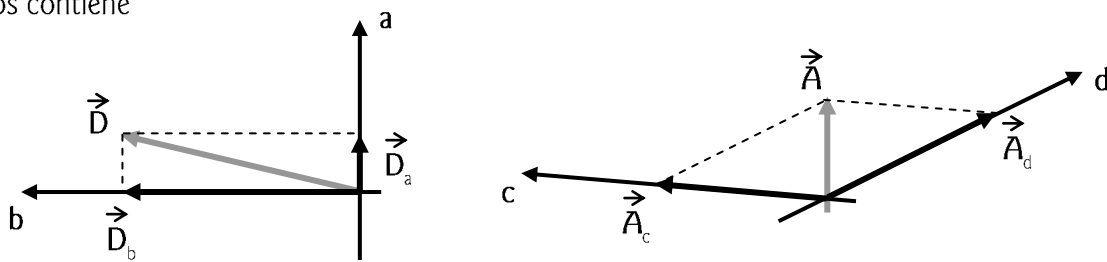
Sumando las componentes ortogonales de los vectores se obtienen las componentes ortogonales de la resultante, en este caso  $E_x$  y  $E_y$ . Es fácil deducir que el módulo de  $\vec{E}$  se calcula a través de Pitágoras:

$$E = (E_x^2 + E_y^2)^{1/2}$$

y su dirección a través de:

$$\text{tg } \theta = E_y / E_x$$

Pero un vector también puede descomponerse en dos o tres vectores, según se trate de un espacio de dos dimensiones (el plano) o uno de tres (el que ocupamos). El proceso de descomposición es el inverso al de la suma. Para ver cómo se hace, tomaremos a los vectores  $\vec{D}$  y  $\vec{A}$  para descomponerlos sobre sistemas de coordenadas que se encuentran en el plano que los contiene



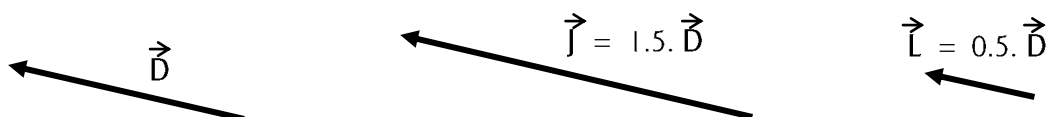
$\vec{D}_a$  y  $\vec{D}_b$  son vectores componentes del vector  $\vec{D}$   
 $\vec{A}_c$  y  $\vec{A}_d$  son vectores componentes del vector  $\vec{A}$

Multiplicación de vectores

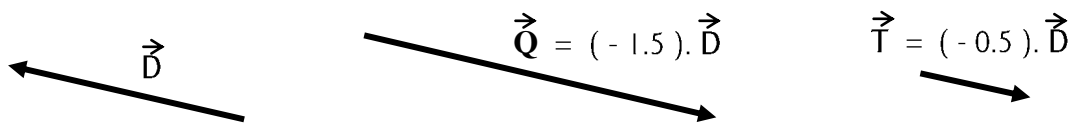
La multiplicación de vectores de distinta especie es factible porque permite definir cantidades de magnitudes físicas nuevas. A la física le resulta conveniente “inventar” estas cantidades para describir la naturaleza. Por ello, aunque parezca extraño, el producto de dos vectores de distinta especie a veces resulta útil que dé como resultado un número y otras veces conviene que el producto sea un vector o un tensor.

Pero antes veamos el producto de un vector por un número.

Si multiplicamos a  $\vec{D}$  por  $k$  ( $k > 0$ ) se obtiene otro vector, de la misma dirección y del mismo sentido, pero de distinto tamaño:



Si multiplicamos a  $\vec{D}$  por  $k_1$  ( $k_1 < 0$ ) se obtiene otro vector, de la misma dirección pero de distinto tamaño y sentido:



Ahora multipliquemos a los vectores entre sí.

Producto escalar

Queremos multiplicar al vector  $\vec{A}$  por el vector  $\vec{D}$  y que el resultado del producto sea un número (no un vector).

Entonces, definimos al producto escalar así:  $\vec{A} \cdot \vec{D} = A \cdot D \cdot \cos \theta$  en donde  $A$  y  $D$  son los módulos de los respectivos vectores y  $\theta$  es el ángulo entre las direcciones de los mismos:



¡ El resultado de un producto vectorial puede ser un número positivo, negativo y hasta cero !

El producto escalar  $\vec{A} \cdot \vec{D}$  se resuelve también a través de la suma de los productos entre los componentes ortogonales:  $A_x \cdot D_x + A_y \cdot D_y$ . Puedes verificarlo dibujando vectores en escala y tomando medidas del ángulo entre sus direcciones y del valor entre sus proyecciones sobre los ejes  $x$  e  $y$ . Debe cumplirse que:

$$A \cdot D \cdot \cos \theta = A_x \cdot D_x + A_y \cdot D_y$$

Producto vectorial

Ahora queremos multiplicar al vector  $\vec{A}$  por el vector  $\vec{D}$  y que el resultado del producto sea un vector perpendicular al plano en el que están contenidos  $\vec{A}$  y  $\vec{D}$ . Decimos que el módulo de este vector perpendicular obtenido del producto es:  $|\vec{A} \wedge \vec{D}| = A \cdot D \cdot \sin \theta$ , en donde  $\theta$  es el menor ángulo formado por los vectores que se están multiplicando. El sentido del vector resultante también es arbitrario; pero se usa preferentemente la "regla del tirabuzón": se rebate el primer vector (en este caso  $\vec{A}$ ) sobre el segundo, de manera que el vector resultante tenga el sentido que tendría el avance de un tirabuzón que gire como  $\vec{A}$ . Por esta razón no es conmutativo el producto vectorial. Es:  $\vec{A} \wedge \vec{D} = -(\vec{D} \wedge \vec{A})$ .

No se agotan aquí las posibilidades de multiplicar vectores. Hay cantidades físicas más complejas que requieren de otras definiciones, como por ejemplo la del tensor. En este caso hablaríamos de 9 números asociados, obtenidos por el producto de cada componente de un vector por las tres componentes de otro vector. Pero la *Mecánica Clásica* tratada en este texto no requiere estas herramientas de matemática.

