FÍSICA: Dinámica

Tutoriales para la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia

Viau - Gibbs
Tintori Ferreira

eudem

Viau, Javier
Física : dinámica : tutoriales para la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia / Javier Viau ; María Alejandra Tintori Ferreira ; Horacio Gibbs. - 1a edición para el alumno - Mar del Plata : EUDEM, 2020.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-4440-77-8

1. Física. I. Tintori Ferreira, María Alejandra. II. Gibbs, Horacio. III. Título.
CDD 532.05

Este libro fue evaluado por la Dra. Norma Canosa

Primera edición digital: mayo 2020

ISBN 978-987-4440-77-8

Editorial de la Universidad Nacional de Mar del Plata
3 de Febrero 2538 / Mar del Plata / Argentina

Arte y Diagramación: Luciano Alem

Imagen de tapa: Leonardo Cisneros

Libro Universitario Argentino

A nuestros alumnos…

Prólogo

¿Qué diferencia al hombre de su pariente más cercano genéticamente? En mi humilde opinión la grandeza del hombre, su superioridad con respecto a las demás especies está en lograr que el conocimiento sea una aventura colectiva que, como en un carrusel, evoluciona continuamente.

En esa aventura participan algunos seres humanos geniales, con ideas que surgen de la búsqueda de la belleza y la simetría, y muchísimos otros seres humanos, algunos de ellos afectos a realizar experimentos, observar hechos medibles y tratar de inferir a partir de lo que observan un conjunto de leyes o axiomas, otros que buscan verificar las consecuencias de esas ideas fantásticas, otros que tienen el ingenio para convertir esas ideas en objetos concretos, en tecnología y bienes que mejoran nuestra vida y finamente, otros que tienen, como los poetas, la habilidad de elegir las palabras exactas que hacen que esas ideas puedan transmitirse y penetrar en la mente de todos. Estos últimos tienen la capacidad de darles a esas ideas un enunciado más intuitivo, las vuelcan en libros para que queden a disposición del resto de los seres humanos y sobre todo, para que en el futuro puedan aprender esas ideas aquellos que aún no han nacido.

Ese carrousel nunca se detiene y cada vez que da la vuelta el conocimiento es más certero, más claro, más entendible, más asequible desde el punto de vista humano. Cada vuelta produce nuevas aplicaciones tecnológicas. Cada vuelta permite que quienes nos suceden puedan entender en menos tiempo esas ideas y aprendan a usarlas rápidamente para poder dedicar su mente a pensar en ideas aún más complejas.

El lenguaje usado por el hombre también va volviéndose más complejo, hacen falta nuevas palabras para expresar las nuevas ideas. Hacen falta símbolos cortos para identificar ideas complejas. Y que esos símbolos tengan significado unívoco para todos. Por eso es la matemática el lenguaje de la ciencia.

A la especie humana le tomó varios siglos y el trabajo de muchos científicos, llegar a la síntesis lograda por Newton sobre las leyes básicas de la dinámica. Eso muestra claramente que no se trata de ideas simples de deducir por la simple observación de la naturaleza.

Sin embargo una vez conocidas, analizadas, pensadas y escritas en forma precisa durante varios siglos más, han llegado a ser entendibles para todos los seres humanos sin requerir ser genios para lograrlo. Desde la redacción inicial que les diera Newton hasta la forma actual en que esas ideas están expresadas en los libros modernos hubo muchas vueltas de nuestro carrousel y ahora en un curso de menos de un año cualquier adolescente pueden entenderlas ... por supuesto para aquellos que tienen interés en subirse al carrousel.

Esta obra está dirigida según explican los autores a docentes y a alumnos, criterio muy acertado en mi opinión pues la enseñanza y el aprendizaje son un mismo hecho: quien enseña, aprende. Los autores hacen hincapié en un método sistemático para el planteo y la resolución de problemas básicos. Esta metodología permite facilitar la aplicación eficiente y ordenada y el desarrollo de un método deductivo de razonamiento. Sin embargo complementan su propuesta con datos históricos, con información que permite al lector comprender el proceso iterativo que ha sido necesario hasta poder plantear de este modo sistemática la resolución.

Lamentablemente también existe una parte de la humanidad que no participa de la aventura colectiva ni se sube al carrousel. Son los que miran la vida desde el punto de vista del poder económico y no del poder de la mente humana. No les importa el bien de la especie humana, sino que centran todo en su propio egoísmo. Por supuesto que para estos últimos no hay ninguna utilidad en este tutorial.

Por el contrario, recomendamos especialmente este tutorial de dinámica a quienes estén deseosos de subirse al carrousel es ideal este tutorial de dinámica. Los autores se han preocupado en elegir las palabras y los ejemplos y en mostrar un método sistemático para ver cómo funcionan las ideas en casos concretos. Ese es sin duda el primer paso para poder hacer propias esas leyes, es decir adquirir la capacidad de utilizarlas correctamente para resolver casos concretos y poder así valorar la impresionante potencia que tienen.

Mar del Plata, Mayo de 2014

Hilda Ángela Larrondo
Departamento de Física
Facultad de Ingeniería
UNMDP

Prefacio a la primer edición

El actual desarrollo científico-tecnológico determina la necesidad de una formación científica que permita a los ciudadanos interesarse sobre el mundo natural y tomar decisiones acerca de cuestiones que afectan el futuro de nuestra sociedad. A pesar de esto, el mundo adolece de científicos e ingenieros para sustentar el desarrollo alcanzado que no muestra límites. Asimismo, somos partícipes de una creciente globalización en donde la divulgación científica abunda y llega por diversas vías a la sociedad y lo único que logra alimentar es opinión que hace uso del sentido común, en contraposición con el racionalismo que caracteriza a la ciencia. Así se plantea un gran desafío al tener que luchar para sortear los obstáculos epistemológicos que, con el afán de divulgar ciencia realimentan una sociedad cada vez más alejada del verdadero conocimiento científico, que solamente puede ser accedido a través de un profundo racionalismo.

Algunas de las características que tienen en común los científicos y los jóvenes es su curiosidad, sus ganas de conocer y de saber más y de encontrar los secretos que esconde la naturaleza. Sin embargo, la mirada del mundo de la ciencia se ha distanciado del alcance de todos debido a su alto grado de racionalismo y se ha convertido en algo así como una profesión de elite. Incluso, esta ruptura comienza en la escuela, cuando las inquietudes que surgen naturalmente en un niño chocan con la dura realidad de dogmas y métodos de aprendizaje que nada tienen que ver con un pensamiento libre, amplio y fresco que debe caracterizar y formar a un científico.

En este sentido, un análisis del modelo didáctico que los docentes reproducen en las escuelas públicas de nuestro distrito nos permitió detectar el uso casi exclusivo del modelo por transmisión verbal de conocimientos científicos o modelo tradicional, que reproduce una visión distorsionada de la ciencia como un conjunto de conocimientos acabados, descontextualizados del proceso por el cual fueron producidos. Este diagnóstico se relaciona con los bajos resultados que los alumnos argentinos alcanzan en exámenes nacionales e internacionales como PISA (Programme for International Student Assessment) y SERCE (Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo) en el área de ciencias.

En síntesis, la necesidad de aportar al profesorado nuevas estrategias didáctico-pedagógicas emerge como consecuencia de los bajos rendimientos de los alumnos, las recientes reformas curriculares y las nuevas perspectivas y expectativas acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias.

Dada esta perspectiva y como continuación de nuestros primeros tutoriales para la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia (Viau, J. et al. 2014. *Física Cinemática - Tutoriales para la enseñanza y aprendizaje de la Ciencia*, Mar del Plata, Argentina EUDEM), hemos dedicado nuestro esfuerzo a escribir la continuación de los mismos, abordando la dinámica dentro del contexto de la Mecánica Clásica y bajo el formalismo de Newton. Creemos que este nuevo tutorial, brinda un enfoque que, sustentado por un marcado tenor didáctico, se caracteriza por acercar al docente y al alumno una visión profunda e innovadora de la dinámica, con un alto contenido filosófico, histórico y epistemológico, sin perder de vista el racionalismo con que merece ser tratada.

Es nuestro objetivo introducir al docente y al alumno en lo que entendemos por una metodología para la resolución de problemas de dinámica. Nuestra experiencia docente pone en evidencia la gran dificultad que manifiestan los alumnos en la resolución de problemas de física. Dificultad que proviene no sólo de los obstáculos epistemológicos que conviven con ellos al iniciar cursos pre-universitarios o universitarios, sino también de la complejidad que encierra la propia física para alcanzar a comprender su racionalismo.

Es así que presentamos en estos tutoriales una continuación de lo que podríamos denominar una metodología para la resolución de problemas, en este caso extendida hacia la dinámica.

La obra en todo su desarrollo hace uso de esta metodología, brindando una amplia gama de problemas que son resueltos siguiendo sus lineamientos. Creemos que es necesario orientar a quién por primera vez se inicia en el estudio de la física ya que en general encuentra en la resolución de los problemas un obstáculo que le es difícil de superar. Si bien los alumnos en general han realizado cursos previos de análisis matemático o álgebra, en ellos se los "entrena" para resolver problemas de matemáticas. Sin embargo, desde la física se necesita que el alumno adquiera un marco de razonamiento que le permita comprender que un problema toma una verdadera dimensión cuando se lo puede expresar racionalmente por medio de la teoría científica que le da sustento, en este caso la Mecánica Clásica. Es difícil para el alumno comprender que un enunciado es parte del problema, y que el problema adquiere una verdadera dimensión en la medida que es posible expresarlo racionalmente. La metodología que proponemos creemos que permitirá incorporar en el alumno un esquema de razonamiento que debe ser internalizado a los efectos de abordar un problema de física para que se torne en práctica metacognitiva.

La práctica pedagógica actual ha privilegiado la transmisión de conocimientos en forma sistematizada en detrimento de la naturaleza propia del conocimiento científico. Es nuestra intención a lo largo de toda la obra lograr la motivación del alumno, introduciéndolo en un campo que se caracteriza por el profundo racionalismo que lo identifica, y nunca abandonando la premisa fundamental de que el aprender con placer e incorporar conocimientos es al fin de cuentas un placer en sí mismo.

Javier Viau
María Alejandra Tíntori Ferreira
Horacio Gibbs

1 DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

La Dinámica se basa en la aplicación a una partícula de los principios de Newton (Woolsthorpe, Inglaterra, 1642- Londres, Inglaterra, 1727) que conforman la Mecánica Clásica o de Newton. Los principios, obrando en conjunto, permiten predecir el movimiento de la partícula, y alcanzar el status predictivo que caracteriza a toda teoría científica. Predecir un movimiento significa poder anticipar que es lo que va a ocurrir sin necesidad siquiera de experimentarlo.

1.1 UN POCO DE HISTORIA

Newton, en 1687 publica sus famosos PRINCIPIA ("*Philosophiæ naturalis principia mathematica*", traducido del latín como: Principios matemáticos de la filosofía natural) tal vez el más trascendental libro de física jamás escrito, en dónde está contenida la Mecánica de Newton o también denominada Mecánica Clásica. En él se plasman más de 2000 años de ciencia, que transcurren desde Tales de Mileto (Mileto, Turquía, 639 a.C.- Mileto, Turquía, 547 a.C.) hasta esta fecha. No vamos a ahondar mucho en la historia, y por ejemplo explicar porque la ciencia se puede decir que comienza en Mileto y con Tales, pero si es importante tener en cuenta que el período griego comprendido entre el 323 a.C. (muerte de Alejandro Magno) y el 30 a.C. (suicidio de Cleopatra) es muy importante no sólo para llegar a Newton y sus PRINCIPIA sino también para el movimiento científico que se desarrolló en el período renacentista comprendido entre los siglos XV y XVI.

Que queremos significar con esto, simplemente la idea que Newton no estaba solo; Newton mismo esbozó la frase: "a hombros de gigantes". Él llegó a publicar sus PRINCIPIA porque existieron hombres como: Euclides, Arquímedes, Hiparco, Copérnico, Kepler, Descartes y Galileo, por mencionar sólo algunos de los que más influyeron en esta corta historia de 2000 años.

La influencia de Galileo (Pisa, Italia 1564 - Arcetri, Italia, 1642), - nace Newton y muere Galileo, 1642- respecto de la importancia de un racionalismo matemático para explicar la naturaleza es sin dudas un eslabón para destacar. Un racionalismo que fue utilizado por Arquímedes (Siracusa, Italia, 287 a.C. – Siracusa, Italia, 212 a. C.) e Hiparco (Nicea, Turquía, 190 a. C. – Rodas, Grecia, 120 a.C.), y que sin dudas dieron sustento al mecanicismo que finalmente triunfó y permitió que el renacimiento diera lugar a la Mecánica Clásica.

La física newtoniana con las características que posee: predicción, precisión, experimentación o verificación, no se desprende del sentido común, contradiciendo incluso experiencias y creencias que fueron un obstáculo para el desarrollo de una física mecanicista.

"*Lo que los fundadores de la ciencia moderna, y entre ellos Galileo, debían, pues hacer, no era criticar y combatir ciertas teorías erróneas, para corregirlas o sustituirlas por otras mejores. Debían hacer algo distinto. Debían destruir un mundo y sustituirlo por otro. Debían reformar la estructura de nuestra propia inteligencia, formular de nuevo y revisar sus conceptos, considerar el ser de un modo nuevo, elaborar un nuevo concepto del conocimiento, un nuevo concepto de la ciencia e incluso sustituir un punto de vista bastante natural, el del sentido común, por otro que no lo es en asboluto*" (Alexander Koyre, Estudios de Historia del Pensamiento Científico, siglo XXI, 1973, pp 155).

1.2 LA MECÁNICA Y LOS PRINCIPIOS DE NEWTON

La Mecánica de Newton o Clásica está basada en tres principios más conocidos como principios de Newton. ¿Qué son principios? Entendamos por principios a hipótesis, conjeturas o suposiciones a las cuales se ha llegado no necesariamente por una vía experimental. O si se quiere, la razón ha dado lugar a dichas hipótesis teóricas fundadas en un racionalismo matemático que no necesariamente son posibles de plasmar experimentalmente. Estos tres principios en forma aislada no tienen mayor alcance, pero juntos conforman una teoría científica como es la Mecánica de Newton, que con un carácter predictivo, permitió a la humanidad explicar y predecir el movimiento de todo cuerpo macroscópico. Con la Mecánica se pudieron explicar las órbitas planetarias y encajarlas en las observaciones registradas de las mismas desde tiempos babilónicos (1500 a.C.), así como también predecir la existencia de nuevos planetas que eran desconocidos incluso con la existencia del telescopio (Neptuno en 1846 y Plutón en 1930).

Cada principio lleva un nombre propio además de un orden (primero, segundo y tercero), y cabe destacar que si bien el segundo y tercer principio fueron concebidos por Newton, el primer principio encierra en sí mismo un tenor filosófico trascendental en la historia de la ciencia, y fue postulado por Descartes y Galileo (distintos autores dan a uno o a otro la autoría) en su forma final que integra a la Mecánica de Newton.

Los principios de Newton marcan el comienzo de un racionalismo que cambió radicalmente el marco de razonamiento de los científicos y permitió en pocos años alcanzar un grado de desarrollo que dio posteriormente sustento a las dos mecánicas que la precedieron: la Mecánica Relativista y la Mecánica Cuántica.

1.3 ALCANCES Y LIMITACIONES DE LA MECÁNICA DE NEWTON

La Mecánica de Newton permite realizar los cálculos necesarios, por ejemplo, para enviar un cohete tripulado a la Luna y traerlo de nuevo (proyecto Apolo). Pero con la Mecánica de Newton no se logra predecir el movimiento de un electrón en el interior de un átomo, ni estudiar el movimiento de un cuerpo cercano a la velocidad de la luz.

Sintéticamente, la mecánica de Newton tiene su alcance de aplicación para cuerpos macroscópicos que se mueven a velocidades inferiores a la de la luz y es la que contiene el racionalismo adecuado para ser aplicado a estas situaciones.

Los tres principios de Newton hacen referencia a una partícula: un objeto ideal puntual o un cuerpo con dimensiones pequeñas de tal forma que un único vector posición permite ubicarlo en el espacio.

Esto también significa, y se va a comprender más claramente cuando se estudie el movimiento de un cuerpo macroscópico (cuerpo rígido), que referirse a una partícula significa fijar la atención en un punto matemático ideal. Un punto que se traslada en el espacio y que no rota, pues no se puede apreciar una rotación ya que un único vector posición lo ubica en el espacio cartesiano. Los principios de Newton aplicados a dicho punto permiten predecir su movimiento.

1.4 PRIMER PRINCIPIO DE NEWTON PRINCIPIO DE INERCIA

Enunciado

"Todo cuerpo (partícula) permanece en estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme (MRU), a menos que actúen causas (fuerzas) capaces de modificar dicho estado".

Observaciones

1. El primer principio postula que para la mecánica el reposo y el MRU son estados equivalentes:

Reposo $\equiv$ MRU

(Observar que se utilizó el símbolo "≡" que denota equivalencia y no igualdad)

Esto significa, que no hay ninguna experiencia que pueda ser realizada dentro de un móvil para reconocer un estado de reposo o de MRU. Pensemos por ejemplo en una nave espacial, lejos de cualquier planeta y aislada en el espacio exterior. No hay ninguna experiencia que pueda llevarse a cabo dentro de dicha nave que indique si está en reposo o en MRU. Para la mecánica de Newton dichos estados son *equivalentes*, no pudiendo distinguir entre los mismos.

2. El primer principio hace referencia a una experiencia ideal jamás realizada. No es posible realizar una experiencia en la cual se desarrolle un MRU, pues para un MRU es necesario un espacio y tiempo infinitos.

Esto fue lo que inspiró a los filósofos griegos (en tiempos de los griegos no había una clasificación entre físicos, matemáticos, etc.) a rechazar la posibilidad de tal movimiento. Este movimiento requeriría un espacio infinito para desarrollarse, y el universo Aristotélico tenía una dimensión finita. Las estrellas (denominadas fijas) no estaban tan lejos de la Tierra, se encontraba para ellos a unos cuantos radios terrestres. Esa era la concepción de las dimensiones del universo que se manejaban en aquel entonces y fueron las que perduraron hasta entrado el renacimiento.

Es por ello, que Platón (Atenas, Grecia a.C- 427- Atenas, Grecia, 347 a. C) pensó que el MCU (movimiento circular uniforme) era un movimiento esperable para la órbita de los planetas. No sólo porque era repetitivo (lo que explicaba las armonías de los movimientos planetarios), sino también porque una circunferencia supone un espacio finito para desarrollar un movimiento. No olvidemos que tenían que encajar las orbitas de los planetas dentro de un universo finito.

Apolonio de Pérgamo a finales del siglo III a.C. basándose en la teoría geocéntrica creó a su vez un modelo geométrico en el que los planetas se movían en una órbita circular (epiciclo) cuyo centro se movía, a su vez, en otra órbita, también circular alrededor de la Tierra que era el centro de todo el sistema. Con esta combinación de movimientos se explicaba, con alguna aproximación, los movimientos retrógrados y estacionarios de los planetas. Con el paso del tiempo y la mejora en la calidad de las observaciones, fue necesario ir añadiendo cada vez más círculos al modelo para explicar los nuevos datos; haciéndolo impracticable. Hasta tiempos de Kepler (1596 año en que publicó sus trabajos) no se llegó a la elipse como trayectoria, lo cual demuestra no sólo el tiempo transcurrido sino también las dificultades que debió atravesar la ciencia para avanzar en su descripción de la naturaleza.

3. El primer principio es acausal, esto significa que un móvil en un MRU no necesita de causas para mantenerlo y desarrollarlo. Aquí también se viola el famoso principio Aristotélico de la causación: todo movimiento tiene una causa. Para Aristóteles no era aceptable un movimiento sin causas, y aquí el primer principio se refiere precisamente a un cuerpo en MRU sin causas para mantener dicho estado de movimiento.

4. El primer principio postula: hay sistemas de referencias (SR) buenos y sistemas de referencias malos. Los SR buenos son aquellos en donde es válido el primer principio mientras que los malos son aquellos en donde no se cumple. Así, define lo que se entiende por un sistema de referencia inercial (donde es válido el principio de inercia) y por lo tanto serán válidos los otros dos. De aquí su importancia: sirve como marco para establecer lo que se conoce como un sistema de referencia inercial (SRI), en donde son válidas las leyes de la Mecánica de Newton. Detengámonos un momento en esta idea y analicemos los siguientes ejemplos que permitirán ir introduciéndonos en lo que puede ser un marco inercial y uno no inercial (uno donde es válido el primer principio y otro donde no lo es).

Imaginemos un vagón de tren que se mueve en un MRU, y que nos encontramos dentro de ese vagón sentados frente a una mesa en donde descansa una taza de café que estamos cómodamente deleitando. Para nosotros, la taza se encuentra en reposo, y todo lo que está sobre la mesa también. Estamos frente a un aparente buen SR, en donde los cuerpos colocados en reposo, permanecen en reposo.

Ahora imaginemos que el tren frena bruscamente, ¿qué ocurre? Empezamos a ver que la taza se mueve, y que todos los objetos que están sobre la mesa también lo hacen. Es más, como la frenada fue realmente brusca, todos los objetos se caen. ¿Qué causa mueve a los objetos?, ¿Por qué se mueven si nadie los empuja? Precisamente, este tren acelerado (frenando bruscamente) no representa un buen sistema de referencia, ya que los objetos se mueven sin causa alguna.

Un sistema de referencia inercial exige causas para cambiar el estado de reposo. En los sistemas de referencia no inerciales, no es válido el principio de inercia (los cuerpos abandonan su estado de reposo sin causas) y por lo tanto no son válidos los otros dos y la mecánica de Newton.

Volveremos con más ejemplos que permitirán ir afianzando esta idea.

Conclusión

- El primer principio de Newton define lo que se entiende por un SR inercial y establece el marco de aplicación de los otros dos principios. Es el andamio que sustenta a la Mecánica de Newton.

1.5 SEGUNDO PRINCIPIO DE NEWTON PRINCIPIO DE MASA

Enunciado

"Si $\vec{R}$ es la resultante de todas las fuerzas aplicadas a una partícula, $\vec{R}$ será igual a la variación de la cantidad de movimiento $\vec{p}$ que experimenta la partícula en el intervalo Δt en que actúa".

Vemos que este principio hace referencia a una nueva magnitud: la cantidad de movimiento $\vec{p}$ de una partícula, definida como el producto de la masa de la partícula por su velocidad instantánea:

$$\boxed{\vec{p} = m\,\vec{v}} \tag{1.1}$$

La forma matemática del segundo principio es:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{R}\,dt = d\vec{p} \\ \\ \vec{R}\,\Delta t = \Delta\vec{p} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \vec{R} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \\ \\ \vec{R} = \dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \end{array} \tag{1.2}$$

Unidades de medida: $[\vec{R}]$ = Newton = N $\qquad$ $[\vec{p}]$ = Newton.segundos = N.s

Observaciones

1. ***Masa*** $(\boldsymbol{m})$: hasta este momento, en donde estamos introduciéndonos en el segundo principio de Newton (principio de masa) la entendíamos como la cantidad de materia: cuantos más átomos, mayor es la masa. Sin embargo se verá que el segundo principio de Newton habla de una masa inercial (m_I), que de alguna forma u otra distingue a dos cuerpos, y a su movimiento, frente a la aplicación de una misma fuerza.

En la aparente simpleza del concepto de masa se escondió una clave menospreciada por la ciencia que estuvo oculta si se quiere, por más de tres siglos hasta el advenimiento de la mecánica relativista. Volveremos con este concepto al estudiar la ley de gravitación universal.

2. ***Cantidad de movimiento*** $(\vec{p})$: la cuantificación del movimiento tiene que ver con la masa del cuerpo m y con la velocidad $\vec{v}$, y es una magnitud vectorial. Se está introduciendo el concepto de "cuantificar" el movimiento. Esta "cantidad de movimiento" y variación de la cantidad de movimiento, es otro de los conceptos que fueron atesorados por la ciencia a lo largo de la historia y que de alguna manera fue desarrollado antes de Newton por Descartes.

Es importante en este momento detenernos y pensar que para que dos cuerpos tengan la misma cantidad de movimiento, el producto $m\vec{v}$ para cada uno de ellos tiene que ser igual. También hay que destacar el carácter vectorial de $\vec{p}$, pues la cantidad de movimiento lleva consigo el concepto de dirección, sentido y módulo.

3. Llamamos resultante $\vec{R}$ a la sumatoria de todas las fuerzas aplicadas a la partícula. El segundo principio de Newton hace referencia a esta sumatoria que da lugar a la resultante $\vec{R}$ y no a una fuerza individual. Matemáticamente podemos escribir

$$\vec{R} = \Sigma\vec{F}$$

4. El segundo principio expresa que la única causa capaz de variar la cantidad de movimiento de una partícula en un Δt es que exista en dicho intervalo una fuerza neta $\vec{R}$ que produzca dicha variación.

$$\vec{R} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_i}{\Delta t}$$

$\vec{R}$ en un Δt produce una variación de la cantidad de movimiento, si $\vec{R} \neq 0$
Si $\vec{R} = 0$, no hay variación de la cantidad de movimiento.

5. Reformularemos el segundo principio. Si la masa es constante, pueden realizarse las siguientes operaciones matemáticas y obtener el siguiente resultado.

$$\vec{R} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \qquad \text{ó} \qquad \vec{R} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a} \tag{1.3}$$

6. Es importante aclarar que hemos utilizado en el segundo principio diferencias finitas (Δ) y diferencias infinitesimales (d) en forma indistinta (1.2 y 1.3). Esto parecería un error, pero a los efectos de introducirnos en el estudio y aplicación de este principio consideramos oportuno brindar ambos tipos de formalismos. Cabe destacar que las diferencias finitas tienen validez para intervalos de tiempo pequeños, donde las fuerzas aplicadas experimenten poca variación.

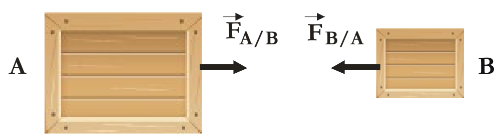
1.6 TERCER PRINCIPIO DE NEWTON PRINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN

Enunciado

"Si un cuerpo A ejerce sobre otro cuerpo B una fuerza que arbitrariamente denominaremos "*acción*", el cuerpo B ejercerá sobre el A una fuerza igual y se sentido contrario que arbitrariamente denominaremos "*reacción*"".

Figura 1.1

Cuerpos en interacción mutua.



Entonces:

$$\boxed{\vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = 0} \tag{1.4}$$

Observaciones

1. El principio de acción y reacción instaura un concepto que en mecánica se conoce como "*interacción*" entre dos cuerpos, que da lugar al concepto de fuerza. Para que una fuerza exista, deben existir simultáneamente quien la ejerza y quien la reciba. Siempre que se piense en la existencia de una fuerza sobre un cuerpo, debe pensarse en que este se encuentra en interacción con otro, y que dicha interacción está regida por el principio de acción y reacción: las fuerzas son iguales y de sentido contrario.

2. Al conjunto $\vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = 0$ que caracteriza a una interacción entre los cuerpos A y B y se manifiesta por la aparición de un par de fuerzas aplicadas a cada uno de ellos, se lo denomina par de acción y reacción.

3. Para evitar la utilización de tanta cantidad de subíndices a los efectos de referenciar los cuerpos que intervienen en la interacción, es común simplificar dicha notación utilizando una nomenclatura que haga uso de "primas", como se indica: $\vec{F} + \vec{F}' = 0$.

Así, para cada interacción, que da lugar a un par de acción y reacción, se utilizará una letra que la identifique, $\vec{F}$ en este caso, y con "prima" $\vec{F}'$se identificará a la reacción.

4. El tercer principio se refiere a dos cuerpos y fuerzas aplicadas a cuerpos diferentes. Para que dos fuerzas puedan ser llamadas "pares de acción y reacción", deben estar aplicadas a distintos cuerpos y lógicamente ser de la misma naturaleza que es la que da origen a la interacción.

5. Cabe aclarar aquí, que en la naturaleza hay sólo cuatro tipos de interacciones posibles que dan lugar a cuatro tipos de fuerzas. Dos de ellas tienen una acción a corta distancia y se desarrollan entre las partículas que componen el núcleo atómico, no estando a nuestro alcance de estudio, pues la mecánica de Newton no tiene injerencia en esta región.

Las otras dos interacciones son: la interacción gravitatoria, que da lugar a las fuerzas de atracción gravitatoria que estudiaremos en breve, y la interacción electromagnética que da lugar a las fuerzas de carácter electromagnético que pueden ser de atracción o repulsión. Ambos tipos de fuerza son de acción a distancia, y por ser más débiles (menos intensas) a las gravitatorias se las suele denominar débiles y a las electromagnéticas fuertes.

Cabe aclarar aquí, que dentro del núcleo atómico, en donde hay dos interacciones más, una es débil y la otra fuerte.

Así, en los problemas que se presenten encontraremos cuerpos sometidos a la acción de varias fuerzas, debido a su interacción con los cuerpos que los rodean, y todas estas fuerzas pertenecen a dos categorías posibles: gravitatorias o electromagnéticas.

6. El tercer principio hace referencia a la simultaneidad entre acción y reacción; las fuerzas son instantáneas (simultáneas) y no hay retardo en la aparición entre ambas. Esto traerá aparejado algún problema que analizaremos en breve, y que de alguna forma es parte de las limitaciones de la mecánica de Newton que exigió ser corregida y dio lugar a la mecánica relativista.

7. Nuevamente se trata de una ley que es acausal: no hay un cuerpo que ejerza la acción y otro que ejerza la reacción. Existe la interacción, pero no que uno sea la causa del otro. Esto es una sutileza filosófica, pero es interesante notar que los principios de Newton en forma independiente son acausales, mientras que toda la mecánica de Newton que está basada en los mismos es totalmente causal. Para la mecánica de Newton las causas son las Fuerzas.

1.7 LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Es la ley que racionaliza la denominada atracción gravitatoria a la que se ven sometidos dos cuerpos que poseen masa. Esta ley universal pone de manifiesto la interacción que se desarrolla entre los cuerpos como consecuencia de su masa.

Enunciado

"Sean dos cuerpos uno de masa m y otro de masa M, separados desde sus centros por una distancia r. El módulo de la fuerza de atracción gravitatoria entre ellos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación entre los centros de los cuerpos".

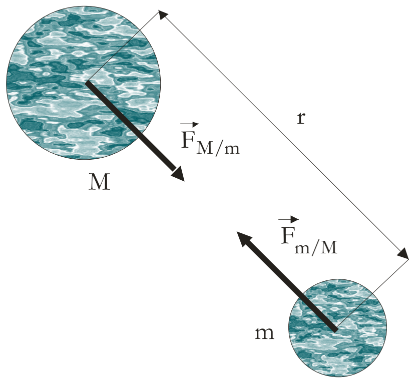
Matemáticamente esta ley se expresa de la siguiente forma, y se ilustra en la figura 1.2:

$$\boxed{\left|\vec{F}_{M/m}\right| + \left|\vec{F}_{m/M}\right| = G\frac{m\,M}{r^2}} \qquad (1.5)$$

Donde G es la constante de gravitación universal $G = 6{,}67.\,10^{-11}\,\frac{N.m^2}{kg^2}$

Figura 1.2

Fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas.



Observaciones

1. Esta ley, no es un principio más dentro de la mecánica de Newton. La mecánica de Newton está totalmente cerrada y fundada en sus tres principios. Sin embargo Newton encontró y postuló la ley de gravitación universal, que formaliza racionalmente (matemáticamente) como dos cuerpos que poseen masa se atraen.

2. Es importante destacar la dependencia de la fuerza con la masa y la separación: a mayor masa, mayor fuerza, y a mayor distancia menor fuerza. Sin embargo como la dependencia con la distancia es cuadrática, si aumentamos la separación al doble, la fuerza disminuye 4 (cuatro) veces. Esta fuerza por lo tanto se hace pequeña en la medida que la separación entre los cuerpos es grande.

3. ¿Y el Peso de un cuerpo? ¿Qué se entiende por Peso de un cuerpo? Acaso, ¿el denominado Peso de un cuerpo no es consecuencia de la atracción que la Tierra le ejerce a todos los cuerpos? Veamos qué es lo que se entiende por Peso de un cuerpo dentro del marco de la ley de gravitación universal.

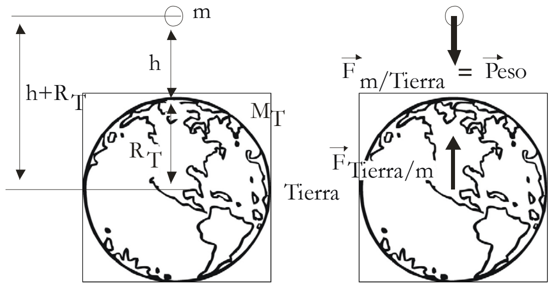
En la figura 1.3 se puede observar que para cuerpos que se encuentren a una altura h, cerca de la superficie de la Tierra (cerca significa a distancias mucho menores que el radio de la Tierra) puede ser realizada la siguiente aproximación: la distancia del centro de la Tierra al objeto puede aproximarse al valor del radio terrestre, ya que variaciones de h dentro de este límite no cambiarán significativamente este valor.

En forma matemática:

$$\left|\vec{F}_{Tierra/m}\right| = \left|\vec{F}_{m/Tierra}\right| = G\,\frac{\overbrace{m\,M_T}^{M_T\,=\,5{,}972x10^{24}\,kg}}{\underbrace{(R_T+h)^2}_{R_T\,\cong\,6.400\,km\,\gg\,h}} \cong \underbrace{\left(\frac{G\,M_T}{{R_T}^2}\right)}_{9{,}8\frac{m}{s^2}\,=\,|\vec{g}|} m \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{P}eso\right| = m\,|\vec{g}| \tag{1.6}$$

Figura 1.3

Atracción de la Tierra a un cuerpo.



Así deducimos que la fuerza peso $\vec{P}$, es la fuerza con que la Tierra atrae a todo cuerpo que se encuentre cerca de su superficie y puede aproximarse como $\vec{P} = m\vec{g}$, donde $\vec{g}$ es la denominada aceleración de la gravedad.

4. ***Masa inercial y masa gravitatoria*** (m_I y m_g): Llegado a este punto realizaremos una serie de comentarios sobre el concepto de masa, ya que el mismo lo hemos visto aplicado en el segundo principio de Newton como así también en la ley de gravitación universal. Es momento de preguntarnos, ¿son iguales las masas a que hacen referencia el segundo principio y la ley de gravitación universal? ¡Qué pregunta! ¿no? Aunque parezca mentira, no es tan sencilla de responder, y aún hoy en día está abierto el debate y continúa la realización de experiencias que permitan comprobar si es así o no.

Ahondemos un poco en estos conceptos.

En primer lugar analicemos un poco lo que entendemos por masa. El concepto que se tenía de masa, antes de haber introducido el segundo principio de Newton estaba estrechamente ligado a un concepto realista, masa era cantidad de materia. A mayor cantidad de protones, neutrones y electrones, mayor es la masa que posee un cuerpo.

Incluso hasta podríamos, pensando en forma realista (así pensaban los griegos, y así en realidad pensaron los científicos, sobre todo los empiristas) asegurar que la masa es algo tangible, que podemos ponderarla. Es así que surge la idea de balanza: una balanza de platillos (la de la justicia), en donde podríamos comparar la masa de dos cuerpos depositados en cada uno de sus platillos. Quién puede dudar de esta experiencia para comparar masas y del concepto que se busca clarificar: desde este punto de vista masa es cantidad de materia.

Sin embargo, el segundo principio de Newton, tal vez el mayor logro en búsqueda de un racionalismo matemático alcanzado en el renacimiento, plantea la siguiente disyuntiva: masa es el cociente entre fuerza y aceleración: $m = \vec{F}/\vec{a}$.

Nos preguntamos ahora, y la materia, donde está en esta expresión racional. ¿Qué es lo real entonces, la masa, la fuerza o la aceleración? Vemos que el racionalismo muestra una idea de la masa que no va acompañada con el realismo de nuestros sentidos. El racionalismo se escapa de la visión glotona que indica la realidad, y permite ingresar en un mundo matemático, en donde la naturaleza alcanza su verdadera formulación. La forma racional del segundo principio de Newton sugiere una nueva experiencia para comparar la masa de dos cuerpos.

Proponemos el siguiente experimento mental: imagine un bloque sobre una superficie perfectamente lisa (un bloque de hielo sobre una pista de hielo). Si estando inicialmente en reposo se aplica un empujón, lo pondremos en movimiento, y continuará así en un MRU pues no hay causas (fuerzas) que lo modifiquen. Pudiendo experimentar con el bloque repetidamente, empujándolo siempre con la misma intensidad, se observará que la velocidad final que adquiere luego de todos ellos es la misma. Este resultado es así debido a que la aceleración que adquiere durante el tiempo que actúa la fuerza (el empujón) es la misma y como consecuencia después de cada empujón la velocidad será la misma.

Pero qué ocurre, si experimentamos con un bloque doble, del doble de masa. Adquirirá evidentemente menor velocidad luego de recibir los empujones, que se supone siempre son iguales. En consecuencia, y pensando en el segundo principio de Newton que es el que sustenta esta experiencia, podemos concluir:

Si la misma fuerza obra durante el mismo intervalo de tiempo sobre dos bloques diferentes, sus aceleraciones resultantes no serán iguales. La aceleración dependerá de la masa del cuerpo, y es menor si es mayor la masa.

De acuerdo con esta experiencia vislumbramos un método para determinar la masa, o mejor aún para comparar las masas de distintos cuerpos. Así, si sobre distintos cuerpos, inicialmente en reposo, actúan fuerzas idénticas y la velocidad final de uno de ellos resulta ser el triple que la del otro, entonces concluimos que la masa más grande será tres veces mayor.

Es posible entonces concluir: esta nueva forma de comparar masas, basada en el segundo principio de Newton, nada tiene que ver con la balanza de platillos antes mencionada. Es más, hasta Newton, no se podría haber imaginado este nuevo método.

Profundicemos un poco más entonces en nuestro estudio, para tratar de explicar que es lo que estamos midiendo en ambos casos.

En el método de los empujones, no interviene en nada la gravedad, o sea la atracción de la Tierra. Si no queda claro esto, imagínese entonces que los empujones se dan en el espacio exterior, en donde nuestros bloques están lejos de cualquier planeta que pudiera ejercer influencia sobre ellos. Sin embargo, nuestros bloques siguen teniendo masa (materia), y responderán de forma diferente al mismo empujón.

La situación cambia en el caso de la balanza. No tiene sentido esta forma de comparar masas si la Tierra no ejerciera una fuerza de atracción (peso) sobre cada uno de los cuerpos depositados en sus platillos.

La diferencia entonces entre los dos métodos radica en que con los empujones la gravedad no interviene y con la balanza sí.

Entonces preguntamos ahora, ¿si se determina la relación de las dos masas siguiendo los dos caminos esbozados arriba obtendremos el mismo resultado?

La respuesta que hasta hoy da la experiencia es rotunda: si, ambos resultados son iguales. De todas maneras llamemos *masa inercial* (m_I) a la que obtenemos a los empujones *y masa gravitatoria* (m_g) a la que obtenemos con la balanza.

Hemos comentado que experimentalmente resultan iguales, pero es fácilmente imaginable que podría no suceder así. Entonces surge otra pregunta, ¿qué sean iguales es algo accidental o tendrá una significación más profunda? Desde el punto de vista de la mecánica clásica, la igualdad es realmente accidental. Sin embargo, desde el punto de vista de la física moderna, podemos decir que dicha identidad constituye una clave fundamental para la comprensión de la naturaleza. Desde esta premisa, se desarrolló la teoría general de la relatividad.

Para finalizar, es importante destacar como Newton llega a la ley de gravitación universal. El no realizó experiencias para dar cuenta de esta ley. Incluso es importante resaltar, que la verificación experimental a nivel de laboratorio fue alcanzada por Henry Cavendish ((Niza, Francia, 1731 - Londres, Reino Unido, 1810) en el año 1797, más de cien años después que Newton la formulara en forma racional. Newton alcanza la forma racional de dicha ley en función de los trabajos de Kepler con las órbitas planetarias. La única forma matemática que permitía encajar las leyes de Kepler con una fuerza atractiva entre el Sol y los planetas (y entre ellos mismos) es la que formuló Newton bajo el nombre de ley de gravitación universal. Aclaremos también, que la palabra universal juega un papel filosófico importante, ya que indica que esta ley es válida no sólo aquí en la Tierra, sino en cualquier parte del universo, dando cuenta esto de que las leyes de la naturaleza son de carácter universal.

2 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En *Física: Cinemática* (Viau, J. et al. 2014. *Física Cinemática - Tutoriales para la enseñanza y aprendizaje de la Ciencia*, Mar del Plata, Argentina EUDEM) se presentó un método para abordar la resolución de los problemas; en este capítulo lo extenderemos para aplicarlo en dinámica.

Se destacó también, que el método propuesto en sí no lleva a la solución final de las consignas planteadas, sino que apunta a poder lograr una expresión racional matemática del problema, lo que consideramos fundamental para alcanzar la resolución.

En dinámica se ha comenzado a recorrer el camino en donde las causas (fuerzas) conducen a la predicción del movimiento.

El primer principio de Newton, orienta sobre un buen sistema de referencia, que es el que se debe adoptar para aplicar los otros dos principios.

El segundo y tercer principio vinculan las interacciones (fuerzas) con las aceleraciones. Conociendo las aceleraciones, junto con las condiciones iniciales del problema, por cinemática será posible obtener matemáticamente las ecuaciones de movimiento de los cuerpos (partículas) que intervengan.

Por lo tanto, se debe agregar a la metodología propuesta en *Física: Cinemática*, el estudio de las fuerzas (interacciones) que se desarrollan entre los cuerpos que intervienen en el problema. Estudiar las fuerzas significa, poder representarlas (son vectores) identificando los pares de acción y reacción, utilizar leyes que permitan conocer sus módulos (por ejemplo la ley de gravitación universal), y sumarlas de forma tal de determinar las aceleraciones que ocasionan sobre los cuerpos que actúan.

El estudio de las interacciones se resume en la realización del denominado diagrama de cuerpo aislado (DCA).

2.1 DIAGRAMA DE CUERPO AISLADO (DCA)

Se denomina así, al diagrama que surge de representar todas las interacciones presentes en un cuerpo. Como las interacciones son fuerzas, y estas vectores, debe quedar claro que en la representación de las mismas se deberán indicar las direcciones y sentidos correspondientes.

Indicaciones a tener en cuenta para realizar un DCA:

- ✓ En un DCA se deben aislar los cuerpos que intervienen en el problema, e indicar los pares de acción y reacción que surgen de su interacción con los demás cuerpos presentes.
- ✓ Cada par de acción y reacción representará una interacción, y se utilizará una letra para designarlo. De forma de evitar la utilización de subíndices, utilizaremos la nomenclatura con “primas” para las reacciones, ya indicada para el tercer principio a los efectos de simplificar la escritura.
- ✓ Es importante tener presente el tercer principio de Newton al momento de identificar una fuerza: debe existir alguien que la ejerza.
- ✓ Si bien los cuerpos hasta este punto son partículas, es conveniente tratar de representar las fuerzas en donde están aplicadas y no todas en su centro. Así, por ejemplo, la normal (denominación que se le asigna a la fuerza que el apoyo ejerce sobre un cuerpo apoyado) la representaremos aplicada

en la superficie en contacto con el apoyo del cuerpo, la fuerza de rozamiento aplicada entre las superficies donde se desarrollan, y el peso en el centro de geometría (en realidad centro de gravedad, veremos este concepto más adelante) del cuerpo. Una adecuada ubicación de las fuerzas ayudará a visualizar la existencia o no de las mismas.

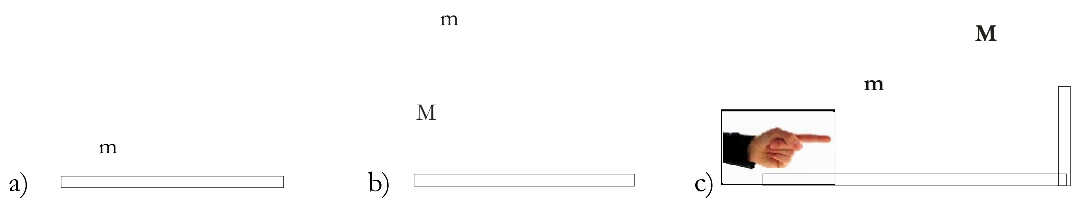
- ✓ El alumno en general está tentado a inventar fuerzas producto de su sentido común. Una vez más aprovechamos para hacer hincapié en esto: la Física no es producto del sentido común, es una ciencia racional entregada plenamente a un planteo matemático de un problema dentro del marco de los principios de las teorías que le dan sustento, en este caso la Mecánica.

- ✓ Si por algún motivo, sabiendo de la existencia de una fuerza en algún punto, se desconoce la dirección y sentido de la misma, debe plantearse una dirección y sentido que sean lo suficientemente genéricas de forma tal de esperar que la racionalización del problema de cuenta de las mismas.

Será ilustrado con una serie de problemas la realización de los denominados DCA.

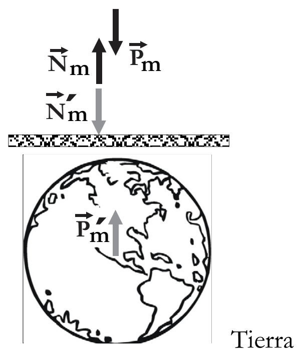
Problema 2.1

Para los cuerpos indicados en cada una de las figuras realizar un diagrama de cuerpo aislado (DCA): un diagrama en donde se aíslen los cuerpos y se identifiquen esquemáticamente las fuerzas que obran sobre los mismos debido a su interacción con los otros cuerpos. Indicar todas las fuerzas con sus respectivas reacciones.



Respuesta

a)



Comentarios

El único cuerpo que interesa es el que está depositado sobre la superficie. En el DCA se ve reflejada su interacción con la superficie de apoyo a través del par $\vec{N}$ y $\vec{N}'$ y la interacción gravitatoria con la Tierra manifestada por $\vec{P}$ y $\vec{P}'$.

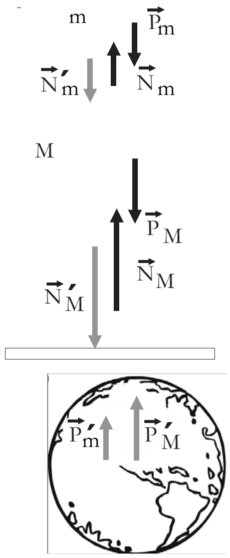
Cabe aclarar en este punto que la denominación de "Normal" al apoyo, es consecuencia de su dirección: perpendicular a la superficie.

Como una manera de reafirmar los conocimientos, surge la formulación de las siguientes dos cuestiones:

Algunas cuestiones

- ✓ ¿La Normal ($\vec{N}$) y el peso ($\vec{P}$), conforman un par de acción y reacción?
- ✓ ¿El peso ($\vec{P}$) y la normal ($\vec{N}$) son iguales?

b)



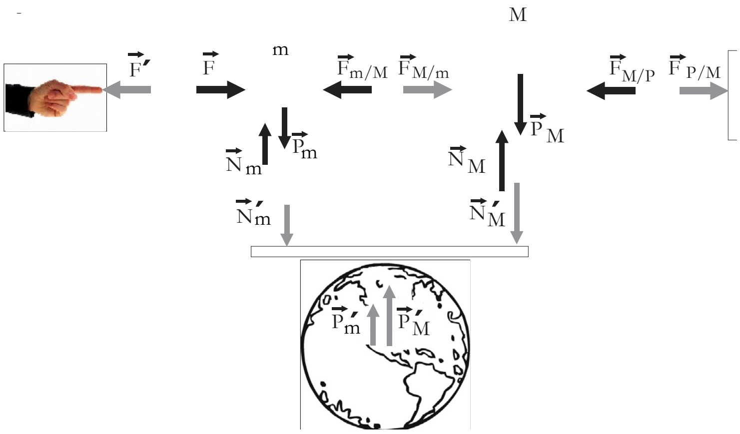
Comentarios

Es conveniente comenzar a realizar un DCA con el cuerpo que menos interacciones posee, en este caso m.

Vemos aquí una situación con dos cuerpos en interacción mutua con la superficie de contacto y con la Tierra.

Se observa la necesidad de utilizar subíndices para identificar las distintas fuerzas normales que se desarrollan y los pesos de los cuerpos, todas ellas con sus respectivas reacciones.

c)



Comentarios

Aquí se plantea la aplicación de una fuerza mediante una mano, que podría ser cualquier otro agente externo.

Se utilizaron subíndices dobles para identificar las distintas interacciones que se desarrollan entre ambos bloques y la pared.

En general el alumno en la realización de este DCA muestra las siguientes dificultades:

✓ Tiende a transportar la fuerza $\vec{F}$ en forma directa sobre el cuerpo M, lo cual representa un error, pues la mano está en interacción directa con el cuerpo "m".

✓ Como la pared vertical ejerce una fuerza de tipo Normal, la utilización de una nomenclatura $\vec{F}_{P/M}$ podría dar lugar a confusión. Precisamente hemos utilizado este tipo de nomenclatura en lugar de $\vec{N}_{P/M}$ para poner en evidencia que hay una libertad total al momento de elegir una nomenclatura para identificar las distintas interacciones que se desarrollan en un problema.

2.2 PAUTAS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE DINÁMICA

Abordaremos la metodología que proponemos para la resolución de un problema en dinámica, que sin dudas podrá ser tomada como el método a seguir para cualquier problema de mecánica en general, ya que de aquí en adelante aplicaremos estos pasos a los que incorporaremos nuevas herramientas que ayudarán en la tarea.

En *Física: Cinemática* fueron mostrados los lineamientos a seguir, con la diferencia que los mismos estaban fundados en aceptar las causas que daban lugar al movimiento. ¿Qué queremos decir con esto?

Recordemos que en cinemática el objetivo fue describir el movimiento tratando de encontrar las ecuaciones de movimiento que respondan a éste. En la obtención de dichas ecuaciones, las aceleraciones que son las que están vinculadas con las causas, estaban dadas en cada problema. O sea, hasta entonces no había sido necesario encontrar las aceleraciones de las partículas para poder escribir las ecuaciones de movimiento.

La dinámica, como parte integrante de la Mecánica Clásica basada en los principios de Newton, se funda en las interacciones que dan lugar a las fuerzas. Por lo tanto, el objetivo es estudiar las interacciones (causas) de forma tal de poder hallar las aceleraciones de los cuerpos y llegar así a la situación planteada en cinemática.

A continuación resumimos lo expuesto anteriormente en los siguientes pasos que ilustraremos con una serie de ejemplos. Estos pasos, al igual que en *Física: Cinemática* no deben ser tomados como una receta (la física no responde a recetas), simplemente permiten ordenadamente tomar partido de un problema a los efectos de racionalizarlo.

Metodología: pasos a seguir

1. Lectura del problema.
2. Lectura y boceto.
3. DCA y primer principio de Newton.
4. Aplicación del segundo y tercer principio de Newton.
5. Aplicación de posibles formulaciones para algunas fuerzas.
6. Análisis del sistema de ecuaciones obtenido y búsqueda de posibles ligaduras entre variables.
7. Resolución del sistema de ecuaciones: cálculo de las aceleraciones.
8. Análisis de los resultados obtenidos en situaciones extremas que pudieran indicar la validez de los mismos.
9. Planteo cinemático del problema: obtención de las ecuaciones de movimiento si fuera requerido.
10. Dar respuesta a las consignas si es que en los pasos anteriores no quedaron resueltas.

A modo ilustrativo y para poder reafirmar esta metodología se propone la resolución del siguiente problema en donde se seguirán los pasos sugeridos.

Problema 2.2

En un ascensor y sobre el piso del mismo se encuentra una balanza del tipo que se encuentra en las farmacias. Sobre la balanza decide pesarse un estudiante de física. Indicar cuál será la lectura de la balanza en las siguientes situaciones:
a) el ascensor asciende con $\vec{v}$ constante
b) el ascensor asciende ganando velocidad, con $\vec{a}$ constante
c) el ascensor desciende ganando velocidad, con $\vec{a}$ constante

Se puede apreciar que se trata de un problema en donde las aceleraciones están dadas, lo que de alguna forma lo aleja del objetivo de la dinámica que es establecer precisamente las causas que dan lugar a las mismas. Sin embargo, tiene un fin didáctico que permitirá introducir al alumno en la metodología que sugerimos se debe seguir para resolver un problema de dinámica.

1 y 2) Lectura y boceto

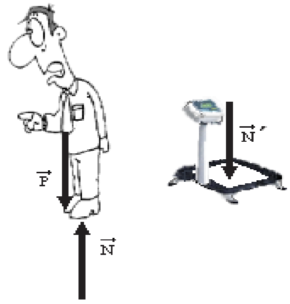
De la lectura surge el siguiente boceto que ilustra la situación planteada

3) DCA y primer principio de Newton

Un buen SR en este caso es un sistema que esté ligado a la Tierra. El ascensor, que puede estar acelerado como en los incisos b) y c) no es un SRI y por lo tanto no puede ser tomado como tal.

En la siguiente figura se muestra el DCA, en donde se han aislado el estudiante y el platillo de la balanza. Surge aquí la siguiente pregunta. ¿Cómo funciona una balanza?

La balanza de la farmacia es un dispositivo cuya lectura indica la fuerza que se ejerce sobre la plataforma, platillo o superficie, en la que se apoya el cuerpo que se desea pesar. Es por ello que en nuestro DCA tiene especial atención la fuerza que se ejerce sobre dicho platillo.



SR: Tierra

Aclaración: en el diagrama de cuerpo aislado de la balanza intervienen más fuerzas que las representadas debido a su interacción con el piso del ascensor. Sin embargo se está interesado en la interacción entre el platillo y el alumno parado sobre él, y es por ello que no se han representado otras interacciones.

4) Aplicación del segundo y tercer principio de Newton

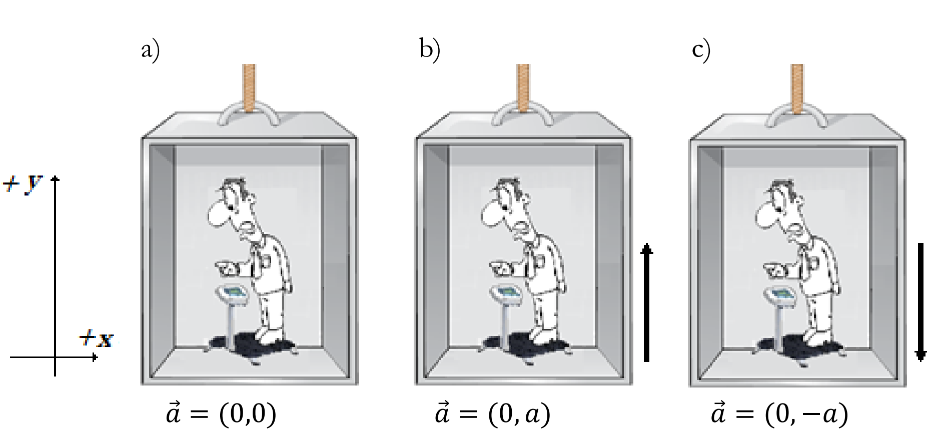
Hasta aquí, todo lo realizado es independiente de las consignas planteadas.

La aplicación del segundo principio requiere, vincular las causas (fuerzas del DCA) con las aceleraciones. Como la aceleración del ascensor en este problema es un dato, se deberá ir resolviendo cada inciso en las condiciones planteadas.

El segundo principio de Newton vincula la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula con la aceleración de la partícula. En este caso, todo lo que está sobre el piso del ascensor se mueve junto, ya sea con o sin aceleración. Esto significa que tanto el estudiante como la balanza suben y bajan con la misma velocidad y aceleración. En este problema en particular, se conoce de antemano la aceleración de la cabina del ascensor, y la aplicación del segundo principio de Newton permitirá calcular las fuerzas que dan lugar a la aceleración.

La aplicación del segundo principio de Newton requiere de la sumatoria de las fuerzas asociadas al DCA. Sumar fuerzas implica sumar vectores, por lo que es necesaria la elección de un sistema cartesiano de ejes para la descomposición de los mismos. De esta sumatoria, reflejada en el sistema cartesiano de ejes adoptado, surgirán las aceleraciones de los cuerpos y las fuerzas que sobre ellos actúan.

En la siguiente figura, se muestra el sistema cartesiano de ejes elegidos y la aceleración del ascensor, la balanza y el estudiante para cada uno de los incisos.



SR: Tierra

Hasta este punto se ha avanzado en la resolución sin importar si el ascensor estaba acelerado o no. En otras palabras, los diagramas de cuerpo aislado son indistintos para todos los casos. Sin embargo para aplicar el segundo principio de Newton, se debe tener en cuenta la aceleración del cuerpo (el estudiante) y por lo tanto ahora sí surgen diferentes planteos matemáticos para cada situación que deberemos analizar independientemente.

a) Velocidad constante: $\vec{a} = 0$

2º Principio

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{N} = m\,\vec{a}_{m/T} = m\,\vec{a} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{R} = (0, -P) + (0, N) = m\,(a_x, a_y) = (0{,}0)$$

$$\vec{R} \begin{cases} R_x = \sum F_x = m\,a_x = P_x + N_x = 0 + 0 = m\,0 = 0 \\ R_y = \sum F_y = m\,a_y = -P_y + N_y = 0 \end{cases}$$

Importante: es de destacar las dos formas utilizadas para expresar matemáticamente la sumatoria de las fuerzas en pos de la aplicación del segundo principio. Ambas formas en definitiva son las mismas. Una plantea la suma vectorial y la otra la suma componente a componente. Simplemente se diferencian en la escritura matemática, pero ambas responden a la misma idea: la suma de vectores se debe realizar componente a componente.

3º Principio

$$\vec{N} + \vec{N}' = 0 \qquad \vec{N} = -\vec{N}'$$

$$|\vec{N}| = |\vec{N}'| = \; N = N'$$

5) Aplicación de posibles formulaciones para algunas fuerzas

La única fuerza que se identifica con una formulación empírica es el peso del alumno. Si el ascensor se encuentra en las cercanías de la superficie de la Tierra puede expresarse el peso del alumno de la siguiente forma:

$$\vec{P} = m\,\vec{g} \;\; \Longrightarrow \; |\,P| = P = \; P_y = m\,g$$

6) Análisis del sistema de ecuaciones obtenido y búsqueda de posibles ligaduras entre variables

$$\begin{cases} P = N \\ P = m\,g \\ N' = N \end{cases}$$

La búsqueda de ligaduras hace referencia a que en muchos problemas las variables involucradas pueden presentar ligaduras (esto significa que matemáticamente no son independientes unas de otras). En este problema no se presenta esta problemática, que será estudiada en detalle en otros problemas, y por lo tanto este paso no será aplicado.

7) Resolución del sistema de ecuaciones: cálculo de las aceleraciones

Este punto hace referencia al cálculo de aceleraciones. Sin embargo en este problema las aceleraciones están dadas y por lo tanto no hay que calcularlas.

El sistema de ecuaciones obtenido en el paso 6) conduce al siguiente resultado que en definitiva es lo buscado: la lectura de la balanza.

$$\underline{N = N' = P = m\, g}$$

8) Análisis de los resultados obtenidos en situaciones extremas que pudieran indicar la validez de los mismos

- La lectura de la balanza en un ascensor que se mueve a velocidad constante es igual al peso del estudiante. Este resultado es de esperar, pues el ascensor moviéndose a velocidad constante es un SRI. Esto significa, que si hubiéramos tomado como sistema de referencia la cabina del ascensor, como esta se mueve a velocidad constante, las condiciones que establece el primer principio de Newton es que se comporta como si estuviera en *reposo*. El estudiante pesándose dentro de la cabina en MRU es equivalente al estudiante pesándose en la cabina en *reposo*.

- La situación extrema en este inciso es precisamente el esperado resultado de que la lectura de la balanza sea la misma para cualquier velocidad, en particular velocidad cero: reposo.

9) Planteo cinemático del problema: obtención de las ecuaciones de movimiento si fuera requerido

Este punto no lo desarrollamos pues la consigna no establece el planteo cinemático del problema sino más bien uno dinámico que es obtener la lectura de la balanza.

b) $\vec{a} = cte$ hacia arriba

2º Principio

$$\vec{R} = \sum\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} = m\,\vec{a} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{R} = (0,-P) + (0,N) = m\left(0, a_y\right)$$

$$\vec{R}\begin{cases} R_x = \sum F_x = m\, a_x = P_x + N_x = 0 \\ R_y = \sum F_y = m\, a_y = -P_y + N_y = m\, a \end{cases}$$

3º Principio

$$\vec{N} + \vec{N}' = 0$$

$$N = N'$$

5) Aplicación de posibles formulaciones para algunas fuerzas

$$\vec{P} = m\,\vec{g}$$

6) Análisis del sistema de ecuaciones obtenido y búsqueda de posibles ligaduras entre variables.

$$\begin{cases} P = N \\ P = m\, g \\ N' = N \end{cases}$$

7) Resolución del sistema de ecuaciones: cálculo de las aceleraciones

$N = m\,a + m\,g$

$\underline{N = N' = m\,(a + \ g)}$

8) Análisis de los resultados obtenidos en situaciones extremas que pudieran indicar la validez de los mismos

- Vemos que la balanza, diseñada para indicar la fuerza que se ejerce sobre su platillo, en este caso $\vec{N}'$, indica una lectura mayor a la que se obtendría con el ascensor detenido o moviéndose a velocidad constante como en el inciso a). ¿Esto es razonable?

- En primer lugar cabe destacar que este resultado incluye al obtenido en el inciso a). Si $\vec{a} \ = 0$, el ascensor se mueve a velocidad constante o está en reposo, y el resultado coincide con el anterior.

- En segundo lugar cabe preguntarse, ¿qué acelera al estudiante hacia arriba? Si observamos el DCA del estudiante apreciamos que la única fuerza que puede variar en el movimiento del ascensor es $\vec{N}$, pues el peso es siempre igual a $m\vec{g}$ (a menos que el ascensor se mueva muy lejos de la superficie de la Tierra, que no es la situación planteada).

- Así, la fuerza $\vec{N}$ que resulta de la interacción del estudiante con el platillo de la balanza, tiene que superar al peso del estudiante de modo de proveerle una aceleración hacia arriba como la que plantea este inciso. De allí, que en este ascensor acelerado, la normal sea mayor que el peso en un factor igual a $m\ a$.

c) $\vec{a} = cte$ hacia abajo

2º Principio

$$\vec{R} = \sum\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} = m\,\vec{a} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{R} = (0, -P) + (0, N) = \ (0, -m\,a\,)$$

$$\vec{R}\begin{cases} R_x = \sum F_x = m\,a_x = P_x + N_x = 0 \\ R_y = \sum F_y = m(-a_y) = -P_y + N_y = m\,(-a) \end{cases}$$

3º Principio

$\vec{N} + \vec{N}' = 0$

$N = N'$

5) Aplicación de posibles formulaciones para algunas fuerzas

$\vec{P} = m\,\vec{g}$

6) Análisis del sistema de ecuaciones obtenido y búsqueda de posibles ligaduras entre variables.

$$\begin{cases} N = -m\,a + P \\ P = m\,g \\ N' = N \end{cases}$$

7) Resolución del sistema de ecuaciones: cálculo de las aceleraciones

$N = m\,(-a) + m\,g$

$\underline{N = N' = m\,(a - \;g)}$

8) Análisis de los resultados obtenidos en situaciones extremas que pudieran indicar la validez de los mismos.

- Nuevamente fue obtenido un resultado en donde $\vec{N}$ no es igual al peso del estudiante, como ocurre en condiciones de reposo o MRU. Es de esperar este resultado, ya que en este caso, la única forma que el estudiante junto con el ascensor descienda con $\vec{g}$ es que la normal disminuya.

- Cabe preguntarnos en este momento ¿hasta cuánto puede disminuir? Obviamente hasta cero, situación que ocurrirá cuando la aceleración del ascensor sea igual a $\vec{g}$, o sea, se corte el cable de sujeción del ascensor y todos los objetos caigan con la aceleración de la gravedad (fenómeno de ingravidez). Si el ascensor cayera con una aceleración mayor a $\vec{g}$, no sería válida esta ecuación ya que la misma arrojaría un valor negativo para $\vec{N}$ lo que no tiene sentido físico en las condiciones planteadas. El DCA dejaría de ser válido ya que la balanza no puede estar apoyada sobre el piso del ascensor y el estudiante sobre la balanza. De alguna manera, quedarían pegados al techo, lo que daría lugar a un nuevo DCA y a otro problema a resolver. Volveremos con esta situación extrema de los fenómenos de ingravidez al estudiar los SNI.

Algunas cuestiones

- ✓ ¿Podría haberse resuelto el problema genérico en lugar de cada inciso en particular?

- ✓ De acuerdo a este problema, el módulo del peso no tiene por qué ser igual al de la normal, por más que este apoyado directamente un cuerpo sobre el otro. ¿Por qué?

- ✓ ¿Siempre es necesario seguir cada paso? ¿No se pueden agrupar?

- ✓ Las otras fuerzas que obran sobre la balanza, ¿no intervienen?

- ✓ En la vida cotidiana, cuando un ascensor acelera, ¿cómo serán los gráficos de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo?

Problema 2.3

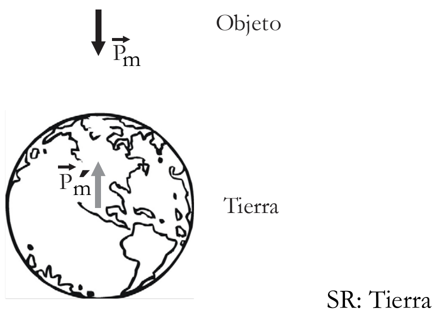
¿Por qué todos los objetos en la cercanía de la superficie de la Tierra caen con la misma aceleración denominada aceleración de la gravedad $\vec{g}$?

Parece una pregunta obvia, que debemos resolver dentro del marco de la Mecánica de Newton. La mecánica no da lugar a obviedades ni al sentido común, da lugar a un racionalismo matemático que surge de su aplicación a un problema concreto.

Sigamos los pasos propuestos para encontrar una respuesta al problema planteado.

1, 2 y 3) Lectura del enunciado – realización de un boceto y del DCA – aplicación del primer principio

De la lectura del problema, y dada su simplicidad en cuanto a la intervención de una única partícula en interacción directa con la Tierra (fuerza peso), surgen el siguiente boceto y DCA:



El sistema de referencia inercial que adoptaremos será la Tierra, ya que el cuerpo se encuentra acelerado y asimismo la consigna solicita que evaluemos con que aceleración cae cuando queda en libertad.

4) Aplicación del segundo y tercer principio de Newton

2º Principio

La aplicación del segundo principio, a la única fuerza que obra sobre la partícula (el peso) da lugar a la siguiente ecuación. Hemos tenido la precaución (por tratarse de este problema en particular) de asignar, una nomenclatura diferente para la masa inercial (m_I) y la masa gravitatoria (m_g) a las expresiones correspondientes:

$$\vec{R} = \sum \vec{F} \implies \vec{P} = m_I \, \vec{a}$$

3º Principio

$$\vec{P} + \vec{P}' = 0 \implies |\vec{P}| = |\vec{P}'|$$

5) Aplicación de posibles formulaciones para algunas fuerzas

$$\vec{P} = m_g \, \vec{g}$$

Observar que aquí hemos utilizado el sub índice g en la masa para tener en cuenta que la ley de gravitación universal hace referencia a la masa gravitatoria del cuerpo.

6) Análisis del sistema de ecuaciones obtenido y búsqueda de posibles ligaduras entre variables

$$\vec{P} = m_I \, \vec{a} \quad ; \quad P = P' \quad ; \quad \vec{P} = m_g \, \vec{g}$$

7) Resolución del sistema de ecuaciones: cálculo de las aceleraciones

$$m_g \, \vec{g} = m_I \, \vec{a} \qquad \text{como} \qquad m_g = m_I \implies \underline{\vec{g} = \vec{a}}$$

Se concluye, que la aceleración del cuerpo será $\vec{g}$ solamente en el caso que se verifique la igualdad entre m_I y m_g, hecho que según hemos expuesto se ha verificado hasta ahora.

En este problema sí se ha calculado la aceleración del cuerpo producto de su interacción con la Tierra.

8) Análisis de los resultados obtenidos en situaciones extremas que pudieran indicar la validez de los mismos.

- El resultado obtenido concuerda con lo que en cinemática fue estudiado para el denominado tiro en el vacío: todos los cuerpos que se mueven en las cercanías de la superficie de la Tierra y bajo la interacción gravitatoria (despreciando el rozamiento con el aire, vacío) lo hacen con la misma aceleración: la aceleración de la gravedad.

2.3 LAS UNIDADES EN DINÁMICA

Además del Sistema Internacional (SI) visto en cinemática, se utilizan en dinámica dos sistemas de unidades más, que permanecen por una tradición histórica. El "sistema c.g.s" que hace referencia con su nombre a las siglas de sus unidades: centímetro, gramo y segundo y el "sistema técnico".

La siguiente tabla resume cada unidad de medida dependiendo del sistema adoptado.

Unidades

	c.g.s	**SI (MKS)**	**Técnico**
Tiempo	s	s	s
Longitud	cm	m	m
Masa	g	kg	u.t.m
Fuerza	dina	Newton	$\vec{kg}$

Tabla 2.1: Sistema de unidades utilizadas en Dinámica

Observaciones

1. La unidad de masa del sistema Técnico denominada u.t.m. (unidad técnica de masa) tiene una equivalencia con las otras unidades que es:

1 u.t.m = 9,81 kg = 9810 g

2. Observar en la última fila del cuadro las unidades de fuerza, que dan lugar a la siguiente equivalencia entre ellas (demuéstrelo):

1 $\vec{kg}$ = 9,81 Newton y 1 Newton = 100.000 dinas

3. Un detalle interesante a tener en cuenta es que dado un cuerpo de 1 kg de masa (SI) en una región de la Tierra donde la aceleración gravitatoria sea de 9,81 m/s^2 , su peso será de 9,81 Newton y en el sistema técnico es de 1 $\vec{kg}$.

Resultado que podríamos resumir como: la masa de un cuerpo en el SI (MKS) tiene numéricamente el mismo valor al peso del mismo cuerpo en el sistema técnico. Por ejemplo si un cuerpo pesa en la cercanía de la Tierra 45,5 $\vec{kg}$ su masa será de 45,5 kg. Cuidado!! Esta equivalencia sólo es numérica, las unidades siguen indicando si se refiere a la masa o al peso del cuerpo.

3 FUERZA DE ROCE

3.1 EL ROZAMIENTO

El rozamiento juega un papel muy importante en nuestra vida, incluso a veces sin sospecharlo. Si el rozamiento desapareciera repentinamente, muchos fenómenos ordinarios se desarrollarían en formas completamente diferentes.

Las fuerzas de rozamiento están presentes en casi todos los fenómenos que observamos: intervienen en el movimiento de objetos en el seno de fluidos (como, por ejemplo, el aire o el agua); cuando se produce deslizamiento de un objeto sobre otro; cuando un objeto rueda sobre una superficie; etc.

Las heladas nos dan siempre buenas lecciones de la importancia que tiene el rozamiento en nuestra vida cotidiana. En cuanto nos sorprenden en la calle nos sentimos incapaces de dar un paso sin temor a caernos.

El rozamiento es un fenómeno tan difundido que, salvo raras excepciones, no hay que pedirle ayuda; él mismo la ofrece. El rozamiento da estabilidad. Los albañiles nivelan el suelo de manera que las mesas y las sillas se quedan allí donde las ponemos. Si sobre una mesa colocamos platos, vasos, etc., podemos estar tranquilos que no se moverán de sus sitios, a no ser que esto ocurra por ejemplo en un tren que pega una frenada brusca o en un barco cuando hay oleaje.

Imaginemos que el rozamiento se pudiera eliminar por completo. En estas condiciones, los cuerpos, cualquiera sea su tamaño (desde una heladera hasta un granito de arena), no podrán apoyarse unos en otros: todos empezarán a resbalar y así continuarán hasta que se encuentren en un mismo nivel. Si no hubiera rozamiento, la Tierra sería una esfera sin rugosidades. A esto podemos añadir, que si no existiera el rozamiento los clavos se saldrían de las paredes, no podríamos sujetar nada con las manos, los sonidos no dejarían de oírse jamás produciendo ecos sin fin que se reflejarían en las paredes sin debilitarse, etc.

Sin embargo, los ingenieros procuran evitar el rozamiento en las máquinas y es lógico. En la mecánica aplicada (tecnología) se habla del rozamiento como un fenómeno muy pernicioso, y esto es cierto, pero solamente dentro de los límites de un estrecho campo especial. En todos los demás casos debemos estar agradecidos al rozamiento. Él da la posibilidad de andar, de estar sentados y trabajar sin temor a que las cosas se resbalen y caigan al suelo.

El estudio de las fuerzas de rozamiento es muy complejo. Basta analizar el proceso del rozamiento a escala microscópica para apreciar esta complejidad. El perfil de las superficies dista mucho de ser plano y el área real de las superficies en contacto es mucho menor que el que aparenta a escala macroscópica. Se producen adherencias entre las zonas en contacto y con el deslizamiento se deforman esas zonas. A escala atómica, estas adherencias y deformaciones se relacionan con interacciones de los átomos, iones y/o las moléculas de la superficie del objeto con otros átomos, iones y/o otras moléculas de la superficie sobre la que desliza. Se pueden producir roturas y nuevas formaciones de los enlaces químicos.

Con estas complicaciones no es sorprendente que no exista una teoría exacta del rozamiento al deslizamiento y que las leyes del mismo sean empíricas. Dichas leyes consideran una fuerza global o macroscópica de rozamiento al deslizamiento que representa a la resultante de las múltiples interacciones ejercidas entre las superficies.

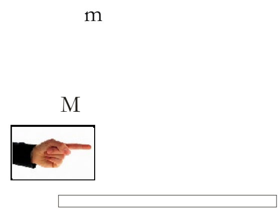
3.2 EN BUSQUEDA DE UN MAYOR CONOCIMIENTO DEL ROZAMIENTO

Para comprender con mayor claridad a la fuerza de rozamiento, haremos un estudio preliminar experimental muy sencillo que ayudará a lograr un conocimiento racional y conducirá a la generación de hipótesis, para una formulación empírica sobre la fuerza de roce.

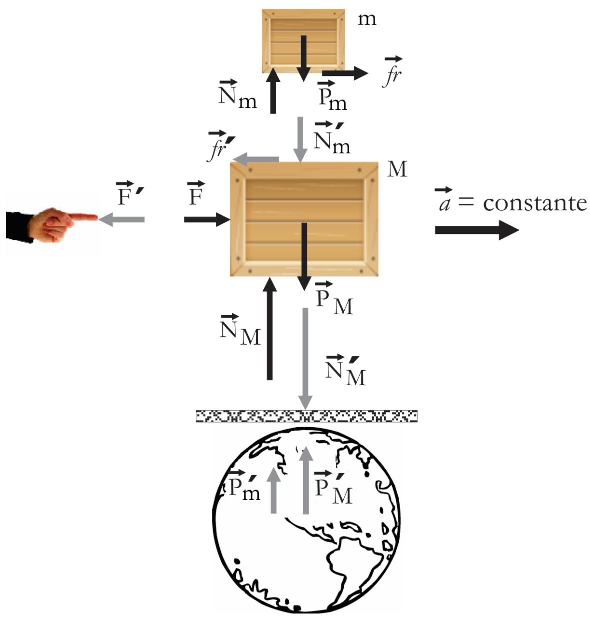
Plantearemos este breve estudio con unos problemas y experiencias. Para la resolución de los mismos y debido a su sencillez no serán desarrollados los pasos propuestos en el capítulo anterior.

Problema 3.1

Dos bloques de masas m y M se encuentran en la situación representada en la siguiente figura. Ambos bloques, debido a la aplicación de la fuerza indicada sobre M, se mueven con aceleración constante $\vec{a}$. Entre M y el piso no hay roce. Realizar un diagrama de cuerpo aislado para cada bloque.



Respuesta



Conclusiones

- Los DCA muestran que es necesario que exista una fuerza de tipo horizontal entre el bloque “m” y el “M” que le provea la aceleración al bloque de masa “m”. Sin la existencia de esta fuerza no sería posible que ambos bloques se movieran con la misma aceleración que es lo que plantea el problema.

- En general al alumno le resulta muy dificultoso imaginar la existencia de una fuerza horizontal sobre el bloque de masa “m” y más aún que esta fuerza tenga el sentido indicado en la figura (hacia la derecha, en el sentido de la aceleración $\vec{a}$. ¿Por qué? Porque los obstáculos epistemológicos producto de su propia experiencia le hacen pensar en que la fuerza de roce de alguna manera debe oponerse al movimiento.

- Este problema que no es más que una idealización de lo que ocurre cuando estamos parados en un ómnibus que acelera, pone en evidencia la necesidad de exista una interacción horizontal que permita que el cuerpo "m" acompañe en su movimiento a la masa "M" sobre el que está apoyado. La única forma que la fuerza motriz del ómnibus se trasmita a los pasajeros es la existencia del rozamiento.

Se continuará con una serie de ensayos empíricos (experiencias) para tratar de determinar algunas características que permitan analizar el comportamiento de la fuerza de roce.

Experiencias 3.1

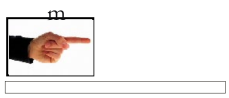
Para estudiar el rozamiento que se ejerce entre dos superficies en contacto se analizará que ocurre al intentar desplazar un objeto aplicándole una fuerza cada vez mayor.

La experiencia cotidiana y los experimentos más sofisticados de laboratorio (con dinamómetros y sensores) constatan que al aplicar fuerzas pequeñas, el objeto no llega a deslizar, lo que significa que la fuerza de rozamiento equilibra a la fuerza aplicada. Llega un momento en que la fuerza aplicada llega a producir el deslizamiento del objeto, y a partir de ese momento, si aumentamos la fuerza aplicada, el objeto va adquiriendo distintos valores de aceleración, pero la fuerza de rozamiento adopta un valor constante.

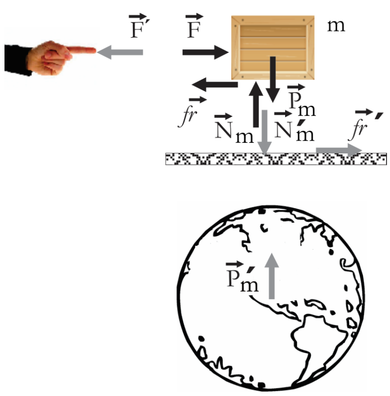
Veamos esto paso por paso, con distintos ensayos que realizaremos aplicando una fuerza sobre un bloque apoyado en una superficie rugosa.

⇨ **Ensayo 1**

Un bloque de masa m se encuentra apoyado sobre una mesa rugosa y se aplica una fuerza de $1\ N$ en la dirección y sentidos indicados en la figura. Si el bloque no se mueve ¿cuánto vale la fuerza de roce?



El DCA de esta situación es el siguiente:



Aplicando los principios de Newton se llega a la siguiente conclusión:

$$\vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{F}| = \underline{|\vec{f_r}| = 1\ N}$$

⇨ **Ensayo 2**

Se empuja el cuerpo con una fuerza de 2 N y el cuerpo no se mueve.

Este caso es similar al ensayo 1, siguiendo el mismo razonamiento concluiremos que si el cuerpo no se mueve es porque sus fuerzas están equilibradas y la fuerza aplicada de $2\ N$ es igual en módulo a la fuerza de roce.

$$\underline{|\vec{f_r}| = 2\ N}$$

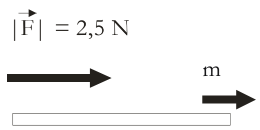
⇨ **Ensayo 3**

Se realizan los mismos ensayos 1 y 2 pero cambiando el sentido de la fuerza. Se empuja el cuerpo con una fuerza de $1\ N.$, Figura (a). Se aplica ahora una de $2\ N$, Figura (b). El cuerpo no se mueve en ningún caso.

La fuerza de roce tiene un módulo de $1\ N$ y $2\ N$ respectivamente, pero en sentido contrario a los ensayos 1 y 2.

⇨ **Ensayo 4**

Se empuja el cuerpo con una fuerza de $2{,}5\ N$ y el cuerpo se mueve con velocidad constante.



$\vec{v} = cte\ ; \vec{a} = 0$

Si el cuerpo se mueve con velocidad constante y sigue una trayectoria rectilínea, su estado es de equilibrio (equivalente al reposo), por lo tanto volvemos a la situación de los ensayos anteriores, obteniendo para la fuerza de roce.

$$\underline{|\vec{f_r}| = 2{,}5\ N}$$

⇨ **Ensayo 5**

Se empuja con una fuerza de $3\ N$ y el cuerpo se mueve con aceleración constante.

$\vec{a} = \text{cte}$

El diagrama de cuerpo aislado a pesar que el bloque se mueve con aceleración constante es el mismo que se realizó en el ensayo 1.

Aplicando el segundo principio de Newton resulta,

$\sum\vec{F} = m\,\vec{a}$

$\sum F_x = F - F_{roce} = m\,a$

$F_{roce} = F - m\,a = 3\,N - \,m\,a$

Por lo tanto $\underline{\left|\vec{f_r}\right| < 3\,N}$

El conocimiento del verdadero valor de la fuerza de roce requiere conocer la aceleración.

Conclusiones generales de todos los ensayos

De estas experiencias podemos extraer las siguientes conclusiones respecto del rozamiento:

- Es una fuerza variable, tanto en modulo como en sentido. Esto se pone en evidencia pues en todos los ensayos la fuerza de roce cambia. En algunos cambia el sentido y en otros su módulo. Cabe destacar que esta variabilidad de la fuerza traerá consecuencias importantes en la medida que se avance en el estudio de la mecánica.

- Se pueden diferenciar dos estados distintos para ser analizados: a) Fuerza de roce estática. b) Fuerza de roce dinámica.

Ambos casos, estático y dinámico, se distinguen con los ensayos 1, 2 y 3 (estático) y 4 y 5 (dinámico). De estos ensayos se evidencia un comportamiento diferente de la fuerza de rozamiento en la medida que el cuerpo no se mueve respecto del cuerpo en movimiento. Esto sugiere una posible formulación empírica diferente para el caso estático que para el dinámico.

- Si bien el rozamiento es variable aparentemente alcanza un valor máximo.

Los últimos dos ensayos muestran que en el caso dinámico el módulo de la fuerza de roce aparentemente no puede aumentar al mismo ritmo que lo hace la fuerza aplicada. Esto sugiere un aparente valor máximo que podría alcanzar la fuerza de roce.

Es lógico suponer que la fuerza de rozamiento al deslizamiento debería depender de la intensidad de contacto entre el objeto y la superficie (la fuerza normal que ejerce el plano sobre el objeto) y de las propiedades de las superficies en contacto (la superficie de apoyo y la del propio objeto). Estas propiedades de las superficies son muy difíciles de precisar de forma operativa y las resumiremos mediante un coeficiente μ

En búsqueda de una formulación empírica, surgen entonces las siguientes hipótesis para el rozamiento:

1. La fuerza de rozamiento es proporcional a la fuerza de interacción normal entre la superficie y el objeto.
2. Las distintas superficies dan lugar a distintos coeficientes de proporcionalidad (distintos coeficientes μ).

De estas hipótesis resultan las siguientes formulaciones empíricas que tienen en cuenta los casos estático y dinámico, que de alguna manera se han abarcado en los ensayos.

3.2.1 ROZAMIENTO ESTÁTICO

Los ensayos anteriores muestran que se debe encontrar experimentalmente una formulación empírica para la fuerza de rozamiento ¿por qué? Porque para resolver problemas es necesaria una formulación, que permita, aplicando los principios de Newton, encontrar las aceleraciones. Una formulación empírica es una expresión racional para la fuerza de roce. Recordar la formulación racional para la ley de gravitación universal.

En el caso del roce estático, estudiado experimentalmente en un laboratorio, pueden formularse las siguientes hipótesis:

1. Depende del tipo de superficie o rugosidad de los cuerpos en contacto.
2. Depende de los materiales.
3. Para el valor máximo, depende de la normal.

Estas tres hipótesis quedan reflejadas en la siguiente formulación:

$$\boxed{\begin{aligned} &\left|\vec{f}_{roce\ estática}\right| \leq \vec{f}_{roce\ estática\ máxima} \\ &\vec{f}_{roce\ estática\ máxima} = \mu_{estático}\left|\vec{N}\right| = \mu_e\, N \end{aligned}} \tag{3.1}$$

Conclusiones

- De los estudios experimentales en laboratorio se llega a conclusiones muy similares a la de los ensayos que fueron analizados: la fuerza de roce en el caso estático es variable y alcanza un valor máximo.

- Se observa que experimentalmente no se llega a una expresión para cualquier situación, simplemente empíricamente se puede conocer el valor máximo estático que alcanza la fuerza de roce.

- ¡¡Importante!!: $\mu_e\, N$ es el valor máximo. En un problema puede reemplazarse la fuerza de roce por $\mu_e\, N$ si se está seguro que la fuerza de roce estática es máxima en las condiciones del problema. En general se observa que los alumnos en la resolución de problemas utilizan (3.1) como una fórmula. En física no hay fórmulas, sino principios y estudios racionales sobre situaciones particulares como la que estamos analizando en este apartado.

3.2.2 ROZAMIENTO CINÉTICO O DINÁMICO

Ensayando con un cuerpo que tenga movimiento relativo respecto a la superficie en que está apoyado, en general se observa que la fuerza de rozamiento se mantiene constante una vez iniciado el movimiento. Esto significa que independientemente de la velocidad o del tipo de movimiento que realice el cuerpo sobre la superficie, ésta ejercerá sobre él siempre una fuerza constante en modulo, pero no en dirección y sentido.

Al igual que el rozamiento estático, en este caso también la fuerza depende del tipo de superficie y de la fuerza normal con la superficie. Estos resultados experimentales quedan resumidos en la siguiente expresión:

$$\boxed{\left|\vec{f}_{roce\ cinética}\right| = \mu_{cinético}\ \left|\vec{N}\right| = \mu_c\ N} \tag{3.2}$$

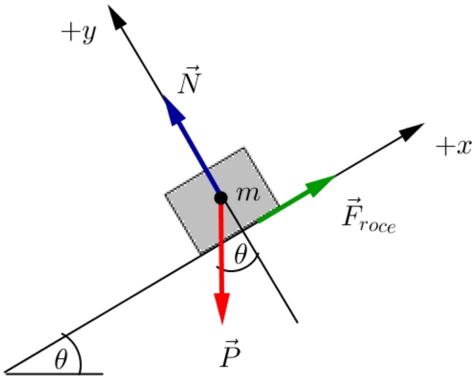
A diferencia del roce estático esta expresión siempre puede ser aplicada en un problema, donde el cuerpo se encuentre en movimiento relativo respecto de la superficie de apoyo.

3.2.3 DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DEL COEFICIENTE DE ROCE

Mediante la siguiente experiencia, con un plano inclinado, se puede determinar el μ_e. Imaginemos un plano inclinado de ángulo variable y un bloque como indica la figura 3.1

Figura 3.1

Determinación experimental del μ_e.



Desarrollo de la experiencia

Partiendo de ángulo nulo (plano horizontal) se comienza a inclinar el plano lentamente, hasta alcanzar un ángulo tal, que el cuerpo se encuentre justo en el límite del movimiento. Este punto puede llevar varios intentos, pero una vez que sea practicado varias veces con el mismo bloque y plano, se encontrará un valor de ángulo que denominaremos $\theta_{máx}$. Para ángulos inferiores o iguales a este valor el bloque se encuentra en reposo. Superado este ángulo el cuerpo comienza a moverse y cae por el plano. Sugerimos, por ejemplo, que realice el ensayo anterior con una mesa y un libro, simplemente inclinando la mesa.

A continuación se plantean las ecuaciones de equilibrio para los instantes anteriores a $\theta_{máx}$.

$$\vec{R} = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = m\ a_x = 0 \\ \\ \sum F_y = m\ a_y = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sum F_x = F_r - P\ sen\ \theta = 0 & (3.3) \\ \\ \sum F_y = N - P\ cos\ \theta = 0 & (3.4) \end{array} \right.$$

Despejando la fuerza de roce de la expresión (3.3) y utilizando la formulación para el peso se obtiene:

$$F_r = P\ sen\ \theta = mg\ sen\ \theta \tag{3.5}$$

Formulamos entonces la siguiente pregunta: ¿Esta fuerza de roce, vale $\mu_e N$? La respuesta, es no. La expresión 3.5 precisamente muestra que F_r es variable ya que depende de θ. En el caso de $\theta = \theta_{máx}$ donde el bloque está a punto de deslizar, si es posible escribir:

$$\text{Si}\ \ \theta = \theta_{máx} \quad \Longrightarrow \quad F_r = F_{r\ máx} = \ \mu_e\ N \tag{3.6}$$

Despejando de la expresión (3.3) F_r y de la (3.4) N y realizando el cociente entre ellas resulta, utilizando la formulación empírica (3.6):

$$\frac{F_r}{N} = \frac{P\, sen\, \theta}{P \cos \theta} \quad \Rightarrow \quad tg\, \theta = \frac{F_r}{N} \quad \Rightarrow \qquad \boxed{tg\, \theta_{máx} = \frac{\mu_e N}{N} = \mu_e} \tag{3.7}$$

Observar que midiendo el ángulo máximo y aplicándole la tangente, se obtiene el valor del coeficiente de roce estático entre el bloque y la superficie.

Un experimento muy parecido se puede realizar para obtener el coeficiente de roce cinético: al igual que en la experiencia anterior, comenzamos a elevar el plano con el bloque en el que se está interesado en determinar su coeficiente de roce cinético, con la diferencia de que se deja que comience a deslizar de modo de ajustar el ángulo para que el descenso sea a velocidad constante. Repitiendo varias veces este procedimiento se verá que para que se produzca este descenso el ángulo es siempre el mismo, y lo llamaremos θ_{MRU}.

Si el ángulo es menor que θ_{MRU}, el bloque no desliza y si es mayor desciende aceleradamente. Ya que el cuerpo se encuentra en equilibrio para θ_{MRU}, las ecuaciones son idénticas a las encontradas anteriormente, con la diferencia del resultado final

$$\boxed{tg\, \theta_{MRU} = \mu_c} \tag{3.8}$$

Es muy importante tener presente que siempre observaremos entre todas las sustancias solidas que:

$$\theta_{máx} > \theta_{MRU} \tag{3.9}$$

Si la función tangente es inyectiva creciente en un intervalo de [0º, 90º] se verifica que también los coeficientes de roce cumplen

$$\mu_e > \mu_c \tag{3.10}$$

Este último resultado recuerda que "es más fácil mantener el movimiento de un cuerpo, que ponerlo en movimiento", frase que todo aquel que empujó un mueble tiene por experiencia personal. Precisamente la disminución del coeficiente de rozamiento en el caso cinético pone en evidencia esta situación.

A continuación presentamos la tabla 3.1 con algunos valores de coeficiente de roce medidos en laboratorio:

Superficies en contacto	μ_e	μ_c
Cobre sobre acero	0,53	0,36
Acero sobre acero	0,74	0,57
Aluminio sobre acero	0,61	0,47
Caucho sobre concreto	1,0	0,8
Madera sobre madera	0,25-0,5	0,2
Madera encerada sobre nieve húmeda	0,14	0,1
Articulaciones sinoviales en humanos	0,01	0,003

Tabla 3.1: coeficientes de rozamiento en distintos materiales
Fuente: Serway R. A. *Física*. Editorial McGraw-Hill. (1992)

3.3 NATURALEZA DE LAS FUERZAS DE ROZAMIENTO

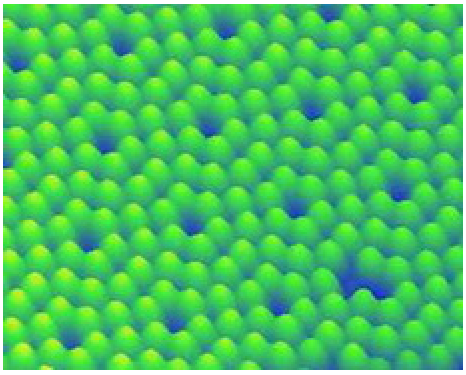
No basta con comprender cómo funcionan las fuerzas de rozamiento en forma macroscópicas para poder predecir su aparición, su dirección, sentido y módulo. También es necesaria una explicación: ¿a qué se deben las fuerzas de rozamiento? ¿Por qué existen?

El origen está íntimamente relacionado con la naturaleza de la materia. La materia es discontinua, todo está formado por átomos. No es continua, aunque muchas veces tenga la apariencia de serlo.

Uno se da cuenta a simple vista que el hormigón armado es un material granuloso. No es tan fácil advertirlo en el acero, o en el agua, o en el vidrio, o en tantos otros materiales de apariencia continua. Sin embargo, si poseyéramos un microscopio suficientemente potente podríamos comprobar que toda la materia está formada por átomos (o sea por partículas), y es discontinua (está constituida de átomos y espacio vacío).

Figura 3.2

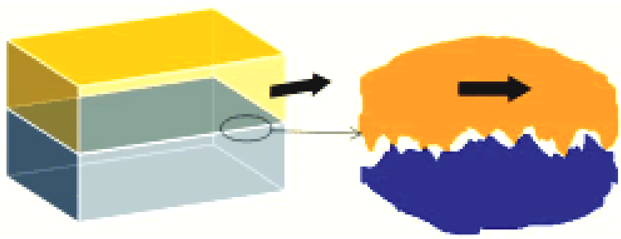
Imagen de la estructura (átomos) de un corte de vidrio
Fuente: Ricardo Cabrera



Esta propiedad de la materia hace que dos superficies cualesquiera de dos cuerpos en contacto, por más lisas y pulidas que sean, rocen. En otras palabras este modelo microscópico permite sugerir que algunas partes de cada cuerpo se encastran dentro del otro. Entonces, cuando se intenta desplazar un cuerpo respecto del otro, las partes enganchadas se resisten al deslizamiento mutuo. La suma de todas esas resistencias constituye la fuerza de rozamiento.

Figura 3.3

Esquema de dos bloque en contacto
Fuente: Ricardo Cabrera



Esta visión microscópica del problema explica perfectamente todas las propiedades macroscópicas del fenómeno del rozamiento. Por ejemplo, la dependencia directa con la fuerza normal que une las superficies. Es lógico suponer que cuanto más apretadas estén las superficies enfrentadas, mayor será la interacción mutua, mayor el grado de encastre, y por lo tanto mayor la fuerza que resistirá el desplazamiento entre las mismas.

También se puede apreciar con este modelo microscópico que el rozamiento dependa de la rugosidad del par de superficies enfrentadas, que será mayor cuanto más rugosas sean las superficies y menor cuanto más lisas y pulidas.

Por último, puede explicarse que el coeficiente de rozamiento estático sea mayor al cinético, $\mu_e > \mu_c$, ya que si dos superficies enfrentadas no tienen movimiento relativo, sus partículas, tienen suficiente tiempo y oportunidad de interaccionar mutuamente, de acomodarse entre sí, de invadirse una a la otra y luego cuando uno intenta deslizarlas las encuentra mucho más unidas. Si ya se encuentran en movimiento no se les da tiempo suficiente a las rugosidades microscópicas para acomodarse entre sí, y todo se reduce a los innumerables choques entre las partículas de las superficies enfrentadas.

Es un error decir: **"la fuerza de rozamiento se opone al movimiento".** Se opone al deslizamiento mutuo entre dos superficies de cuerpos en contacto que es algo muy diferente.

Si se piensa que las fuerzas de rozamiento dificultan el movimiento, no es así. De hecho hay fuerzas de rozamiento útiles a los fines del movimiento. El tránsito vehicular, por ejemplo, se realiza gracias a la fuerza de rozamiento. Los autos arrancan, frenan y doblan gracias a la fuerza de rozamiento entre los neumáticos y el pavimento. Los dibujos de las cubiertas de los autos están diseñados para aumentar ese rozamiento, que los automovilistas llaman "agarre". Salir con las gomas lisas, gastadas, es muy peligroso, ya que el rozamiento es la fuerza primordial de la seguridad vial.

Pero también hay muchas actividades en las que el rozamiento representa una pérdida de esfuerzos y energía. En esos casos, para disminuir el rozamiento, se utilizan los lubricantes. Se trata de fluidos con suavidad al tacto, como grasas y aceites, que se colocan entre las superficies que rozan y las mantienen más separadas entre sí, evitando el "encastre" del rozamiento.

Las formulación matemática de la fuerza de roce que expresa la dependencia de esta con la componente normal de la reacción entre las superficies en contacto, constituyen las leyes básicas del rozamiento denominado seco. Además hay que tener en cuenta lo siguiente:

- ✓ Los coeficientes de rozamiento no dependen del área de la superficie de contacto (la fuerza de rozamiento estática sí puede depender de tal área si consideramos valores poco razonables como, por ejemplo, áreas de contacto tendiendo a cero).

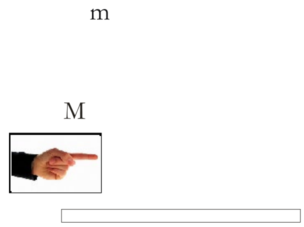
- ✓ Los coeficientes de rozamiento dependen sensiblemente de la naturaleza de las superficies de contacto. De hecho, el origen de la fuerza de rozamiento se encuentra en los tipos de partículas y de los enlaces de los sólidos en contacto, e incluso, de las impurezas características (óxidos, etc) que se forman en las superficies exteriores de los sólidos.

- ✓ La forma de las superficies de contacto, a escala microscópica, tiene gran importancia en el rozamiento (no existen superficies reales perfectamente lisas). Toda superficie real presenta, por muy bien pulida que aparentemente esté, protuberancias y valles microscópicos que, cuando se manifiesta una fricción con otro sólido similar, producen roturas y pequeñas soldaduras entre ambas superficies.

Los siguientes problemas amplían lo visto en el problema 3.1, y permitirán profundizar más sobre la formulación matematica presentada y como aplicarla. Estos problemas por su complejidad van a ser resueltos siguiendo los lineamientos propuestos en el capitulo anterior.

Problema 3.2

Un bloque cuya masa es m, descansa sobre otro de masa M, como indica la figura. El coeficiente de roce estático entre los dos bloques es μ_e y se desprecia la fricción entre el bloque M y la superficie del suelo. Encontrar la fuerza mínima que debe aplicarse sobre M para que el bloque m comience a deslizar.



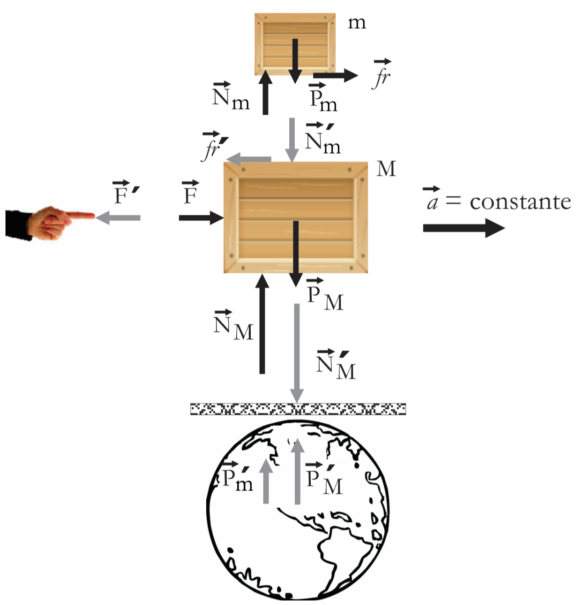
1) Lectura del problema

Observar que la fuerza $\vec{F}$ actúa sólo sobre la masa M, y que el cuerpo m estará vinculado con el movimiento del cuerpo de abajo por otras fuerzas que deberemos analizar. El problema indica la existencia de una fuerza mínima para lograr el deslizamiento entre los cuerpos. Esto se explica si se piensa que una fuerza $\vec{F}$ muy pequeña no desplaza al cuerpo m con relación a M y que a medida que la fuerza $\vec{F}$ se va incrementado, se llegará a un punto en que comience el deslizamiento.

Así mismo si la fuerza $\vec{F}$ es muy grande, las masa M dejara atrás a la masa m y esta no tendrá forma de seguir el movimiento. Es por eso que se solicita en el problema el valor más pequeño de la fuerza $\vec{F}$ capaz de lograr el deslizamiento.

De todas formas no debemos guiarnos por las consignas sino por la formulación racional que resulte de los principios de Newton. No olvidar nunca: *uno comprende un problema cuando lo resuelve.*

2 y 3) DCA y primer principio de Newton



Observaciones

- La interacción debida al rozamiento entre los dos bloques es la única forma de que m "se entere" de que M está siendo acelerada por medio de una fuerza. Si no hubiera roce, m simplemente permanecería en reposo y caería una vez que M la atraviese en su totalidad.

- El sentido de la fuerza de roce sobre m es hacia la derecha, y si no hay deslizamiento, las dos masas viajarán juntas con la misma aceleración. La única forma que m se acelere junto con M es mediante una fuerza horizontal que apunte hacia la derecha.

- El alumno en esta instancia se ve bloqueado por la consigna: "calcular la fuerza mínima". No es en esta instancia donde uno debe estar pensando en la consigna. En este momento se está tratando de racionalizar el problema. Hay que seguir adelante con los pasos sugeridos en el capítulo anterior.

4) Aplicación del segundo y tercer principio de Newton

2º Principio

$$m \quad \begin{cases} \sum F_x = f_r = m\, a_m \\ \sum F_y = N - P_m = 0 \end{cases}$$

$$M \quad \begin{cases} \sum F_x = F - f_r' = M\, a_M \\ \sum F_y = N_M - N' - P_M = 0 \end{cases}$$

3º Principio

$N = N'$ y $f_r = f_r'$

5) Aplicación de posibles formulaciones para algunas fuerzas

Luego de realizar los DCA y plantear las ecuaciones podemos formularnos la pregunta ¿cuál es la fuerza que le comunica aceleración a la masa m? esa fuerza es la fuerza de roce estática, antes de que las superficies deslicen entre sí. Cuando comience el movimiento relativo entre las superficies será la fuerza de roce cinética la que le imparta aceleración. Cualquiera sea la fuerza sabemos que esta no puede tener valores infinitamente grandes, la fuerza de roce estática tiene un valor límite dado por $f_{r_{máx}} = \mu_e N$. Así, mientras la f_r sea capaz de acelerar a la masa m con el mismo valor de aceleración que la impartida por $\vec{F}$ a la masa M, los bloques viajaran juntos.

$P_m = m\, g$, $P_M = M\, g$

$f_{r_{máx}} = \mu_e N$

Observar que para la fuerza de roce se ha utilizado la expresión para su valor máximo. Cuando se desarrolle la fuerza de roce estática máxima será cuando se alcance la máxima aceleración sin que los cuerpos deslicen mutuamente, pero al mismo tiempo es la aceleración límite que puede alcanzarse antes que los cuerpos deslicen. Por lo tanto plantear $f_{r_{máx}} = \mu_e N$ es racionalizar el problema en el instante que solicita la consigna.

6) Análisis del sistema de ecuaciones obtenido y búsqueda de posibles ligaduras entre variables

Las ecuaciones que resultan son:

$$f_{r_{máx}} = \mu_e \, m \, g = m \, a_m$$

$$F_{mín} = f_{r_{máx}} + M \, a_M$$

La ecuación de ligadura de este problema es, para que los bloques viajen juntos

$$a_m = a_M = a$$

Siempre que los cuerpos viajen juntos se cumple esta condición, hasta que estén próximos a separarse, cuando la fuerza de roce sea la estática máxima.

Hemos indicado $F_{mín}$ pues es la correspondiente al desarrollo de $f_{r_{máx}}$, o sea el límite a partir del cual si se incrementa F se producirá el deslizamiento de m sobre M.

7) Resolución del sistema de ecuaciones: cálculo de las aceleraciones

Resolviendo el sistema de ecuaciones resulta:

$$\frac{\mu_e \, m \, g}{m} = \frac{F_{mín} - \mu_e \, M \, g}{M}$$

$$\underline{F_{mín} = (M + m) \, \mu_e \, g}$$

8) Análisis de los resultados obtenidos en situaciones extremas que pudieran indicar la validez de los mismos

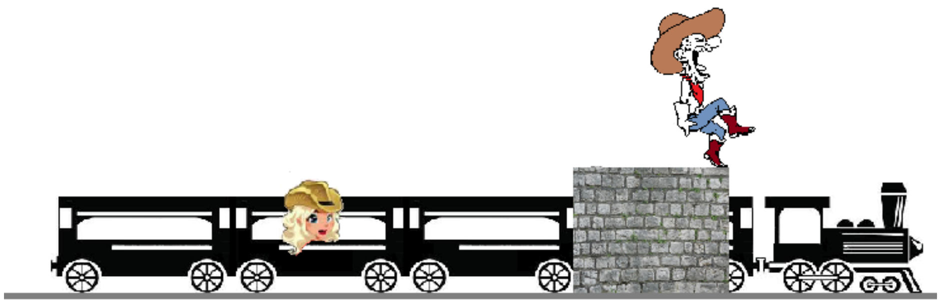
- Una situación extrema es que μ_e sea igual a cero. Bajo esta condición el valor que arroja $F_{mín}$ es cero, resultado esperado en ausencia de rozamiento entre los bloques.

- Por el contrario, en la medida que μ_e aumente, aumentará $F_{mín}$, que es un resultado esperable.

Problema 3.3

Problema del Cowboy. Un cowboy con el afán de rescatar a su prometida que está siendo transportada por villanos dentro de un tren (atada a un asiento en el interior) decide abordarlo de la siguiente manera. Se sube a un puente, debajo del cual pasara el tren, y en el preciso instante en que el tren asoma debajo del puente se lanza y cae sobre el techo. Si, el coeficiente de rozamiento ente el cowboy y el techo del tren es μ , el rozamiento entre el tren y los rieles es despreciable, la velocidad del tren es v , la masa del cowboy es m y la del tren M , calcular:

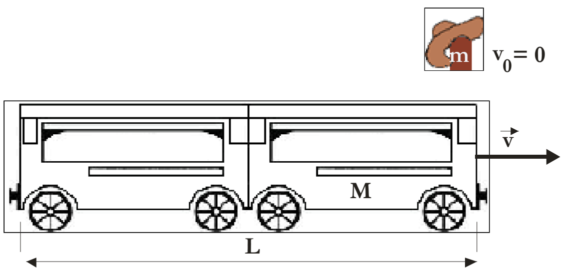
a) La velocidad del tren cuando el cowboy logra pararse sobre el techo.
b) La longitud mínima que debe tener el techo del tren para que el cowboy logre su cometido.



A continuación se presenta la solución del problema siguiendo los pasos sugeridos en el capítulo 2.

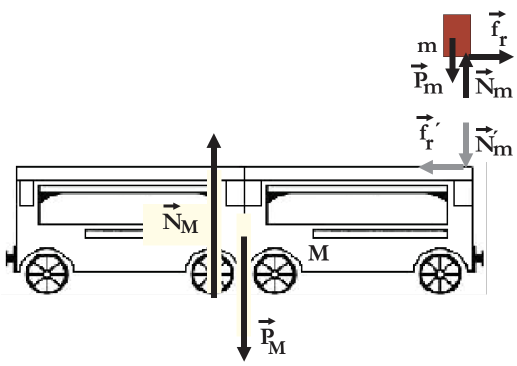
1, 2 y 3) Lectura y boceto

Como se trata de un problema que ilustra una situación posiblemente real, debemos hacer una abstracción de dicha realidad a un lenguaje (gráfico) que permita llegar a la racionalización matematica de la situación.



Sistema de Referencia (SR): Tierra

3) DCA y primer principio de Newton



No se han indicado todas las reacciones, que están sobreentendidas a esta altura de nuestro estudio.

4) Aplicación del segundo y tercer principio de Newton

Sobre el cuerpo m

$\sum F_x = f_r = m\, a_m$

$\sum F_y = N_m - P_m = 0$

Sobre el cuerpo M

$\sum F_x = -f_r^{'} = M\, a_M$

$\sum F_y = N_M - P_M - N_m^{'} = 0$

Por el tercer principio sabemos que

$N_m = N_m^{'}$ y $f_r = f_r^{'}$

5) Aplicación de posibles formulaciones para algunas fuerzas

En cuanto a los pesos de los bloques (Cowboy y tren) es válida:

$P_m = m\, g$ y $P_M = M\, g$

Respecto de la fuerza de rozamiento, como se trata de una condición de rozamiento dinámica, es válida la siguiente formulación empírica:

$f_r = f_r^{'} = \mu\, N_m$

6) Análisis del sistema de ecuaciones obtenido y búsqueda de posibles ligaduras entre variables

Es importante destacar a esta altura del problema que las aceleraciones de los bloques no son iguales, ya que si bien en la dirección de las x tienen aplicada la misma fuerza (f_r y $f_r^{'}$) las masas que deben acelerar estas fuerzas son diferentes: m y M.

El planteo matemático conduce a comprender que el bloque m (que parte del reposo) irá ganando velocidad debido a su aceleración, mientras que el bloque M (que viene moviéndose) comenzará a perder velocidad debido también a su aceleración. El bloque m es acelerado hacia la derecha por la acción de f_r, mientras que el bloque M es acelerado hacia la izquierda (contrario a su movimiento) por $f_r^{'}$.

De las ecuaciones planteadas, surge el siguiente sistema de ecuaciones a resolver:

$f_r = m\, a_m = \mu\, N_m = \mu\, m\, g$

$-f_r = M\, a_M$

$N_M - P_M - P_m = N_M - M\, g - m\, g = 0$

7) Resolución del sistema de ecuaciones: cálculo de las aceleraciones

Resultando por lo tanto las siguientes aceleraciones y normales:

$a_m = \mu\ g$

$a_M = -\mu \; m\, g/M$

$\underline{N_M = M\, g + \, m\, g = (M + \, m)\, g}$

8) Análisis de los resultados obtenidos en situaciones extremas que pudieran indicar la validez de los mismos

- Si m es igual a M, ambas aceleraciones son iguales en módulo, lo que es un resultado esperado.

- En la medida que $M \gg m$, a_M será pequeña. Si $M \to \infty$, $a_M \to 0$ y el tren no sufriría cambio en su velocidad.

- Es lógico y esperable que la normal que aplican los rieles sea igual a la suma de los pesos de los bloques.

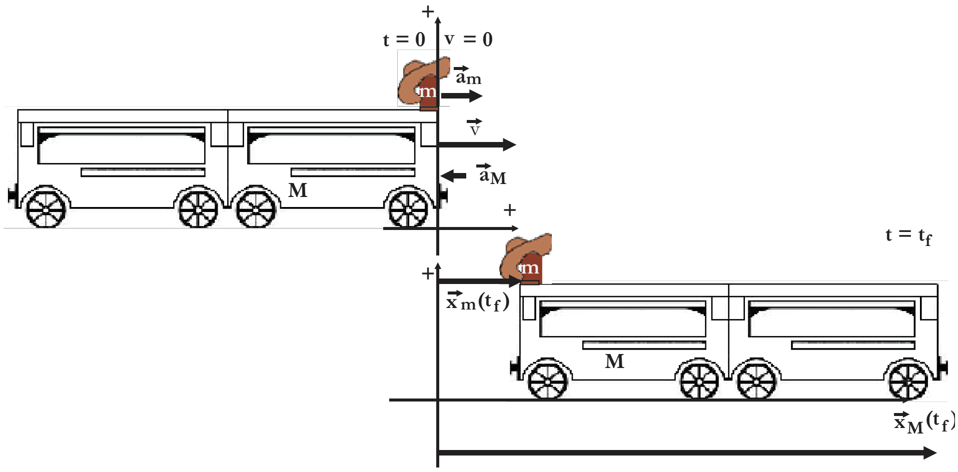
9) Planteo cinemático del problema: obtención de las ecuaciones de movimiento si fuera requerido

Respecto de la cinemática del problema, debemos plantear las ecuaciones de movimiento para cada uno de los bloques. Es importante tener en cuenta desde donde se medirán las posiciones iniciales de cada uno de ellos. En particular, la del tren, que no es puntual, y que en definitiva lo que la ecuación de movimiento va a describir es un punto del mismo. En nuestro caso, y de acuerdo con la figura, se ha tomado la referencia en la parte delantera del tren, que es donde cae el bloque de masa m (el cowboy).

Estas ecuaciones, van a describir los siguientes movimientos:

- ✓ El bloque de masa m describirá un MRUV, donde partiendo del reposo, incrementará su velocidad a un ritmo dado por a_m.
- ✓ El bloque de masa M describirá un MRUV, donde su velocidad se verá reducida a un ritmo dado por a_M.
- ✓ Ambos bloques, uno ganando velocidad y el otro perdiendo, detendrán su movimiento relativo en el preciso instante en que sus velocidades sean iguales. En este instante, el cowboy tiene la misma velocidad que el tren, y por lo tanto, desaparecerá el deslizamiento relativo, por lo que ya no existirá una fuerza de rozamiento entre ellos.
- ✓ En ese instante, los DCA realizados pierden validez, porque ambos bloques están en reposo uno respecto del otro. Para el cowboy, que quiere abordar el tren, es como si el tren estuviera detenido, y lo único que tiene que hacer es caminar hacia su amada para rescatarla.
- ✓ La longitud mínima del vagón, surgirá de estimar la distancia recorrida por el bloque m (el cowboy) sobre el techo del vagón hasta el instante en que se igualen sus velocidades.

La siguiente figura ilustra los instantes iniciales y finales del problema, en donde se puede apreciar que el bloque de masa m llega justo a recorrer el largo L del vagón de tren al momento de detener su deslizamiento y quedar en reposo respecto del tren sobre el techo. Observar que hemos medido al tren desde el frente en todo su movimiento ya que no se trata de un cuerpo puntual.



De acuerdo con el cálculo de aceleraciones realizado, las ecuaciones de movimiento que resultan para cada uno de los bloques son:

$$x_m(t) = \frac{1}{2}\,\mu\, g\, t^2$$

$$x_M(t) = v\, t - \frac{1}{2}\,(\mu\, m\, g/M)\; t^2$$

10) Dar respuesta a las consignas si es que en los pasos anteriores no quedaron resueltas

Se deben trabajar matemáticamente las ecuaciones de movimiento de modo de dar respuesta a las consignas. Derivando las ecuaciones de movimiento, obtenemos las velocidades, que permitirán igualándolas calcular el instante en el que el Cobwoy deja de deslizar.

$$v_{mx}(t) = \mu\, g\, t$$

$$v_{Mx}(t) = v - (\mu\, m\, g/M)\; t$$

Igualando obtenemos:

$$\mu\, g\, t_f = v - (\mu\, m\, g/M)\; t_f \qquad \rightarrow \qquad t_f = \frac{v\, M}{\mu\, g\, (M+m)}$$

Especializando t_f en las velocidades (cualquiera de ellas), obtenemos para la velocidad final del conjunto tren y cobwoy:

$$vf = v(t_f) = \frac{v\, M}{M+v}$$

A esta altura se pueden proponer las siguientes verificaciones de los resultados obtenidos:

- Si $M \gg m$, $v_f \rightarrow v$. Este resultado es esperable: el tren prácticamente no pierde velocidad durante el intervalo t_f, durante el cual la masa m adquiere la velocidad $v_f = v$.
- En la medida que el coeficiente de rozamiento μ sea mayor, el tiempo t_f en que ambos bloques igualan sus velocidades disminuye.
- Si $M = m$, la velocidad final del conjunto será $v_f = v/2$.

Resta calcular la longitud $L_{mín}$. Del dibujo se ve que la distancia L que permite que el proceso se desarrolle, surge de la diferencia de las dos posiciones $x_m(t_f)$ y $x_M(t_f)$.

$$\underline{L_{mín} = x_M(t_f) - x_m(t_f) = \frac{v^2\, M^2}{\mu\, g\, (M+m)^2}}$$

Respecto de L_{min} se pueden realizar las siguientes verificaciones:

- ✓ Si $M \gg m$, el valor para $L_{min} = \dfrac{v^2}{\mu\, g}$ es independiente de m, y el máximo posible para L_{min}.

- ✓ Si $M \rightarrow 0$ (una situación ilógica desde el punto de vista de la realidad), $L_{min} \rightarrow 0$. Este resultado merece un análisis especial para comprenderlo.

  Un hipotético tren sin masa, necesita un tiempo cero para que su velocidad cambie a cualquier valor. Racionalmente, si $M \rightarrow 0$, $a_m \rightarrow \infty$, lo que justifica este repentino cambio en su velocidad. Es por este motivo, que el cuerpo m (el cowboy) no recorrería distancia para igualar la velocidad del tren.

4 CUERDAS Y POLEAS

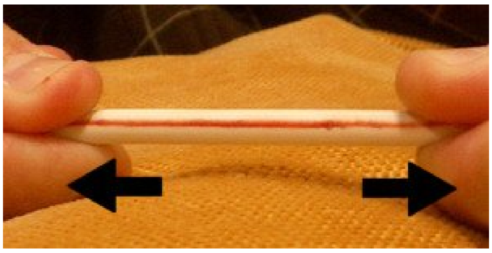
4.1 LAS CUERDAS

Cuando un caballo tira de un carro, la fuerza es transmitida por medio de una cuerda. Lo mismo sucede en una clase de educación física, mientras los alumnos juegan una cinchada. Se denomina tensión T a la fuerza que transmiten las cuerdas cuando se aplican fuerzas a sus extremos. Si la tensión es mayor que la resistencia de la cuerda, esta se rompe. En el caso del cuerpo humano, los ligamentos y tendones actúan como transmisores de tensión debido a las fuerzas que ejercen los músculos.

En el caso de una cuerda (cable, etc.) tirada (tensionada o traccionada) por los dos extremos, el estado de equilibrio implica que la tensión sea igual en todos los puntos de la cuerda.

Figura 4.1

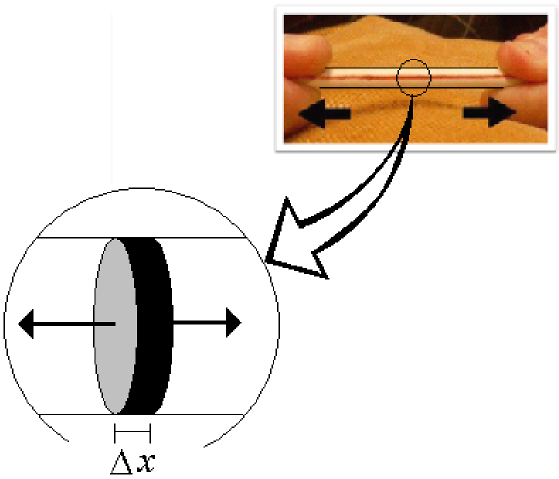
Imagen de una cuerda bajo la acción de fuerzas contrarias (tracción).



Si tomamos una rebanada diferencial, por ejemplo, de una cuerda, de ancho "Δx", tanto en una sección de la cuerda como en la opuesta, la tensión debe ser la misma y de sentido opuesto, para que la rebanada diferencial esté en equilibrio. Así pues, extrapolando esto de rebanada en rebanada a lo largo de todo la cuerda, tendremos que en cada sección de la misma deberá existir la misma tensión en cada lado para que pueda estar en equilibrio.

Figura 4.2

Ampliación de una porción de cuerda tensionada.



En muchas oportunidades encontramos que los términos tracción y tensión operan como sinónimos describiendo la misma situación.

Un cuerpo está sometido a tracción, cuando sobre él actúan dos fuerzas con direcciones opuestas, de forma tal que lo estiran. Algunos ejemplos de piezas sometidas a tracción son: una goma estirada mediante fuerzas aplicadas en sus extremos con sentido contrario, un tornillo que sujeta una lámpara del techo, una goma que sujeta un mazo de cartas, cualquier cable de tendido eléctrico sujeto entre dos postes, etc.

A modo de ejemplo, para interpretar las fuerzas de tracción que actúan sobre una cuerda, se presentan los siguientes problemas.

Problema 4.1

Para romper una cuerda una persona tira de sus extremos en sentido contrario, aplicando a cada uno de ellos una fuerza de 100 N. Determinar el valor de la tensión sobre la cuerda

Seguiremos los pasos propuestos en el capítulo 2 para resolver el problema.

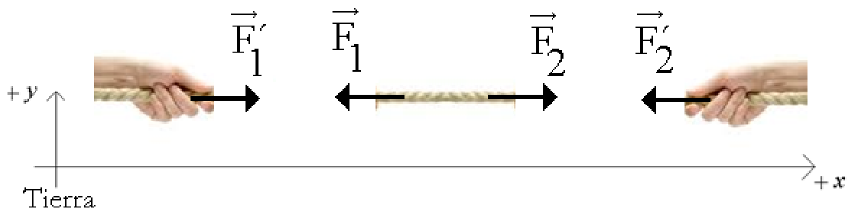
1, 2 y 3) Lectura, boceto, DCA y primer principio de Newton

Figura 4.3

Boceto del problema 4.1.

Figura 4.4

DCA y SR del problema 4.1.



Hay que aclarar que el diagrama de cuerpo aislado de las manos está incompleto ya que faltan fuerzas que la musculatura del brazo ejerce sobre la mano para que permanezca en reposo junto con la cuerda, fuerzas que no se han dibujado por carecer de interés en este problema.

En el diagrama no se han dibujado los pesos ni de la mano, ni de la cuerda ya que las fuerzas que actúan en la dirección vertical no están bajo estudio en este problema y las consideraremos despreciables frente a las fuerzas que ejerce la persona. Las cuerdas de ahora en más serán consideradas de masa despreciable.

4) Aplicación del segundo y tercer principio de Newton

Ya que la cuerda está en equilibrio se puede afirmar:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow -F_1 + F_2 = 0$$

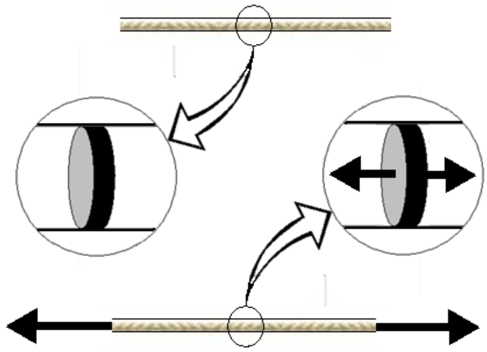
Resultando:

$$\underline{F_1 = F_2 = 100\ N}$$

Observe que la fuerza ejercida sobre la cuerda es de 100 N y también lo tiene que ser del otro extremo de la cuerda para que permanezca en equilibrio. De ahora en adelante diremos que la tensión o tracción sobre una cuerda es el valor de una sus fuerzas aplicada en los extremos. Para este problema la tracción sobre la cuerda es de 100 N. En la figura 4.5 se ha representado una cuerda sin tracción y la misma traccionada, en ambas se destaca un pedacito infinitesimal cualquiera. A pesar de que en ambos casos la cuerda está en reposo, en el estado de tracción cada pedacito está transmitiendo al aledaño la fuerza que tiene aplicada en un extremo, situación que no ocurre con la cuerda sin tracción.

Figura 4.5

Cuerda sin tracción y traccionada.

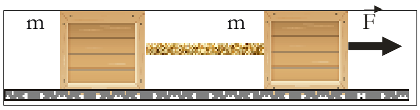


Esta aclaración que se acaba de realizar está basada en varios errores cotidianos de los alumnos cuando se los interroga sobre la fuerza de tracción en una cuerda, en la situación de la figura 4.5. Las posibles respuestas que en general se encuentran, ambas erróneas son:

- ✓ La tracción sobre la cuerda es de 200N. Esto es incorrecto, bajo ninguna circunstancia las fuerzas que actúan en los extremos pueden sumarse para dar ese valor, ya que están dirigidas en sentidos opuestos
- ✓ La tracción es nula. Esta equivocación está asociada con una gran confusión que los alumnos deben superar en este curso de mecánica y es la de confundir a la fuerza de tensión en la cuerda con la fuerza neta.

Problema 4.2

La cuerda sin masa que une los dos bloques de la figura puede soportar una tensión no mayor de 2 $\vec{kg}$. a) ¿Qué fuerza horizontal $\vec{F}$ debe aplicarse a uno de los bloques para romper la cuerda? b) ¿depende ésta de la masa de los cuerpos? c) si la cuerda tuviera masa, ¿sería igual la tensión en cada punto de la misma?



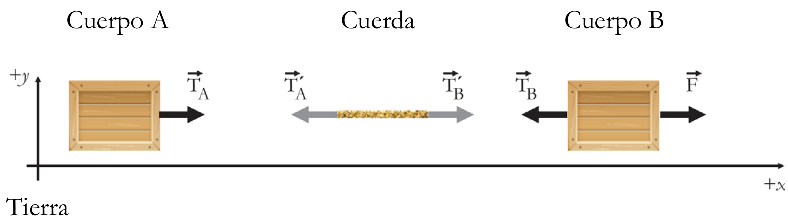
Nota: no hay roce entre los bloques y la superficie.

A continuación se presenta la solución del problema siguiendo los pasos sugeridos en el capítulo 2.

1, 2 y 3) Lectura, boceto, DCA y primer principio de Newton

Figura 4.6

DCA y SR del problema 4.2 sin considerar las fuerzas en dirección vertical.



En el DCA sólo se han tenido en cuenta las fuerzas horizontales.

4) Aplicación del segundo y tercer principio de Newton

Cuerpo A $\sum F_x = T_A = m\ a_A$

Cuerda $\sum F_x = -T'_A + T'_B = m_{cuerda}\ a_{cuerda}$

Cuerpo B $\sum F_x = -T_B + F = m\ a_B$

Por el tercer principio sabemos que $T'_A = T_A$ y $T'_B = T_B$

5) Aplicación de posibles formulaciones para algunas fuerzas

En éste problema no existe ninguna formulación empírica a tener en cuenta.

6) Análisis del sistema de ecuaciones obtenido y búsqueda de posibles ligaduras entre variables

De las tres ecuaciones planteadas en el paso 4) las incógnitas se pueden reducir si consideramos que los cuerpos esta unidos por una cuerda inextensible, esto significa que en virtud de que no puede deformarse y cambiar su longitud inicial, se puede asegurar que en todo momento los tres cuerpos tendrán la misma aceleración.

$$a_A = a_B = a_{cuerda} = a$$

Resultando por tanto las siguientes tres ecuaciones independientes:

$$T_A = m\ a$$

$$-T_A + T_B = m_{cuerda}\ a$$

$$-T_B + F = m\ a$$

Observe que este sistema de tres ecuaciones se puede simplificar aún más suponiendo que la masa de la cuerda es despreciable (nula) resultando la siguiente ecuación:

$$-T_A + T_B = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A = T_B = T$$

Esta simplificación se presenta en todos los casos en que la cuerda tenga masa despreciable. Llegando así a que las tensiones en los extremos de la cuerda son iguales, a pesar que la cuerda está acelerada.

7) Resolución del sistema de ecuaciones: cálculo de las aceleraciones

$$T = m\ a$$

$$-T + F = m\ a$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (T y a), resulta:

$$\underline{a = \frac{F}{2\,m}} \qquad\qquad \underline{T = \frac{F}{2}}$$

8) Análisis de los resultados obtenidos en situaciones extremas que pudieran indicar la validez de los mismos

- El valor obtenido para la aceleración conduce a la siguiente reflexión. Para el agente que aplica la fuerza F todo el sistema (bloques y cuerda) se comporta como una única masa de valor $2\,m$. En otras palabras, quien aplica la fuerza no tiene por qué entender el detalle de cómo está formado el sistema que en definitiva se comporta como una única masa. Por lo tanto es claro que la aceleración deba ser: $a = F/2\,m$.

- Respecto de T, ahora sí importa el detalle. T vale la mitad de F, pues T está aplicada a un solo bloque (el de atrás) que debe ser acelerado con la misma aceleración a del conjunto (recordar que ambos bloques son iguales). Es por ello que la tensión de la cuerda resulta ser la mitad de la fuerza externa aplicada F .

- En vista de los resultados podemos asegurar: si aplicamos una F de $1\,N$, T será de ½ N, si aplicamos una F de $10\,N$, T será de $5\,N$, y así siguiendo.

9) Planteo cinemático del problema: obtención de las ecuaciones de movimiento si fuera requerido

Respecto de las ecuaciones de movimiento, si bien se trata de un MRUV, no son necesarias aquí, pues la consigna se refiere a una cuestión dinámica más que cinemática.

10) Dar respuesta a las consignas si es que en los pasos anteriores no quedaron resueltas

a) Sabemos que la fuerza máxima que puede soportar la soga es:

$$T_{max} = 20\,\vec{k}g = 19{,}6\,N$$

Por lo tanto, y de acuerdo a las conclusiones extraídas en el punto 8), se puede responder a la consigna planteada:

$$\underline{F_{max} = 2\,T_{max} = 40\,\vec{k}g = 39{,}2\,N}$$

b) El resultado obtenido para T, es independiente de m, debido a que las masas de ambos cuerpos son iguales ya que se simplificaron al momento de resolver el sistema de ecuaciones.

c) Si la cuerda no fuera de masa despreciable, hubiéramos obtenido valores diferentes de tensiones entre un extremo y otro.

4.2 DINAMÓMETROS Y BALANZAS DE RESORTE

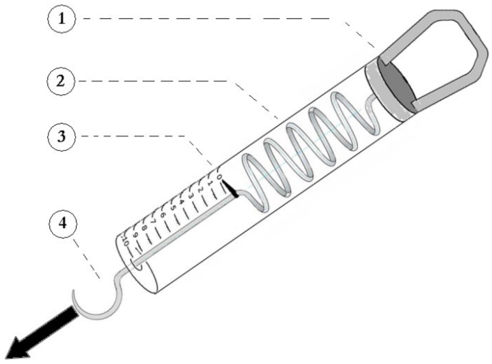
Para poder continuar con el análisis de las cuerdas, nos detendremos en un instrumento muy común en un laboratorio de física que es denominado dinamómetro. Su uso es más cotidiano de lo que puede parecer su nombre.

Son utilizados para medir el módulo de una fuerza y basan su principio de funcionamiento en la deformación de un resorte. Los resortes pueden deformarse una determinada longitud y luego volver a su posición original. Esta deformación es proporcional a la fuerza aplicada y por medio de una escala graduada y calibrada se puede medir la fuerza aplicada sobre el dispositivo (en el siguiente capítulo se estudiará en detalle la formulación empírica para los resortes).

Si un dinamómetro une dos trozos de cuerda, permitirá determinar la tensión sobre toda la cuerda, ya que está diseñado para medir la fuerza que obra sobre uno de sus extremos. Si en cambio se coloca al dinamómetro en posición vertical y colgamos un objeto de uno de sus extremos, se comportará como una balanza de resorte, midiendo el peso del objeto.

Figura 4.7

Partes de un Dinamómetro:
① Soporte fijo
② Resorte
③ Aguja y escala
④ Gancho de aplicación de la fuerza



Estos son sólo dos ejemplos en el uso de este instrumento. Hoy en día están muy difundidos los dinamómetros digitales, sin embargo su principio de funcionamiento es el mismo.

Figura 4.8

Distintos tipos de dinamómetros comerciales.

Introducción histórica al problema 4.3

A continuación presentaremos un problema relacionado con una importante experiencia realizada en Alemania en el siglo XVII: los hemisferios de Magdeburgo. Es importante comprender la consecuencia histórica que trajo esta demostración para el pensamiento y el desarrollo de la ciencia que en ese momento se encontraba discutiendo la existencia o no del vacío. Aunque el vacío parezca hoy en día un concepto muy natural y real, no lo era hace un par de siglos. Hoy entendemos que la ausencia total de materia es algo posible y sabemos que se puede alcanzar por medio de una bomba neumática o simplemente con una "sopapa" aplastada contra los azulejos del baño. Pero en realidad aceptar su existencia fue una lucha que llevaron adelante los científicos del siglo XVII como Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, Francia, 1623-Paris, Francia, 1662), Evangelista Torricelli (Faenza, Italia, 1608-Florencia, Italia, 1647) y otros, oponiéndose a la física aristotélica, dominante por entonces. Aristóteles (Calcídica, Grecia, 384 a.C.-Calcis, Grecia 322 a.C.) rechazaba el vacío por cuestiones filosóficas y lógicas razonando así: puesto que el medio es el encargado de retrasar el movimiento, la existencia del vacío permitiría una velocidad infinita, lo cual conduciría a aceptar que el móvil estaría en dos lugares simultáneamente!!! La escuela atomista de la antigüedad, por su parte, había postulado la existencia del vacío, donde los átomos se movían libremente. Para Aristóteles esta idea era incorrecta y la rechazo de plano. Dos mil años después el asunto aún no estaba resuelto.

Es interesante seguir el itinerario de esta cuestión, y de las tantas grandes dicotomías que arrastraba la ciencia de la antigüedad como así también lo era: la finitud o infinitud del universo, la ubicación del Sol en el sistema solar, la existencia de los átomos contra la continuidad de la materia entre otras tantas. La autoridad de Aristóteles había oscurecido la idea del vacío bajo el postulado de "horror al vacío", interpretando esto como que la naturaleza odia el vacío y hace todo lo posible para evitar que se genere un espacio donde no exista materia.

La aceptación del concepto de vacío no fue inmediata. A lo largo del siglo XVII muchos pensadores libraron la batalla, oponiéndose a esta idea de Aristóteles y llevaron a cabo una gran cantidad de experimentos que mostraban la posibilidad de generar vacío y ponerlo de manifiesto. Uno de esos famosos experimentos fue el realizado por el alcalde de la ciudad de Magdeburgo, Otto Von Guericke. En 1654, este personaje realizo una espectacular demostración en público de su experiencia. El alcalde mandó a construir dos hemisferios huecos de cobre. Unió estos dos hemisferios mediante una junta estanca y extrajo el aire del interior, generando vacío por un conducto conectado a una bomba neumática creada por él mismo, tras lo cual cerró la válvula. Ató cada hemisferio a un arnés llevado por ocho caballos que tiraron de cada lado y no consiguieron despegar ambas mitades. Cuando mediante una válvula se dejó entrar el aire nuevamente en la esfera, se pudo separar en dos mitades sin dificultad. La noticia fascinó tanto a la ciudad y a la comunidad científica europea que, no sólo se pintaron cuadros reflejando el evento, sino que se comenzó a firmar el acta de defunción del "horror al vacío".

a)

b)

Figura 4.9

a) *Recreación de la experiencia de Magdeburgo realizada en Granada, España.*

b) *Vista ampliada de los hemisferios.*

Problema 4.3

En la Figura 4.9 se muestra una versión moderna de la famosa experiencia con los "hemisferios de Magdeburgo" realizada en el Parque de la Ciencias en Granada, España. Originalmente Otto Von Guericke utilizó ocho caballos a cada lado de las semiesferas de metal huecas que tenían que tirar de ellas para intentar separarlas.

a) Determinar la tracción que se ejerce sobre los hemisferios cuando ocho caballos tiran de ellos de cada lado.
b) ¿Sería mejor sujetar uno de los hemisferios a un muro, halando el otro con los dieciséis caballos?

1) Lectura del problema

Para poder dar una respuesta basada en lo aprendido sobre cuerdas y tensiones, se remplazará la esfera formada por los "hemisferios de Magdeburgo" por un dinamómetro. Luego estudiando las fuerzas sobre el dinamómetro podremos predecir lo que indicará éste en los casos planteados.

Ya que el problema es cualitativo y no se tiene que dar una respuesta numérica, llamaremos F_C a la fuerza que es capaz de realizar un caballo y diremos por ejemplo $3F_C$ cuando tengamos que referirnos a la fuerza que realizan tres caballos, por ejemplo.

De la lectura surge que los incisos a) y b) son diferentes, por lo tanto serán analizados cada uno de ellos por separado. Se resumirá el análisis por tratarse de un problema muy sencillo y muy similar al 4.1 ya resuelto.

a)

2 y 3) Boceto, DCA y primer principio de Newton

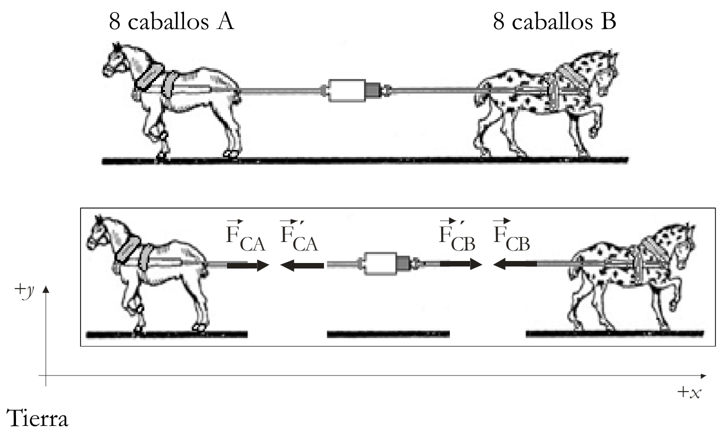


Figura 4.10

Boceto y DCA del problema 4.3 a).

Sobre el único objeto que se han representado todas las fuerzas es sobre el dinamómetro. En los grupos de ocho caballos es claro que faltan fuerzas, que no son objeto de nuestro interés para este problema (rozamiento entre otras).

4) Aplicación del segundo y tercer principio

Al aplicar el segundo principio sobre el dinamómetro (de masa despreciable), que está en reposo, resulta:

$$\sum F_x = -F'_{CA} + F'_{CB} = 0 \;\Rightarrow\; F'_{CA} = F'_{CB}$$

Y del tercer principio podemos concluir:

$$F'_{CA} = F_{CA}$$

$$F'_{CB} = F_{CB}$$

Resultando por tanto, para el dinamómetro que es traccionado por 8 caballos de cada lado:

$$\underline{F'_{CA} = F'_{CB} = 8F_C}$$

El dinamómetro indicará la fuerza de 8 caballos.

b)
2 y 3) DCA y primer principio de Newton

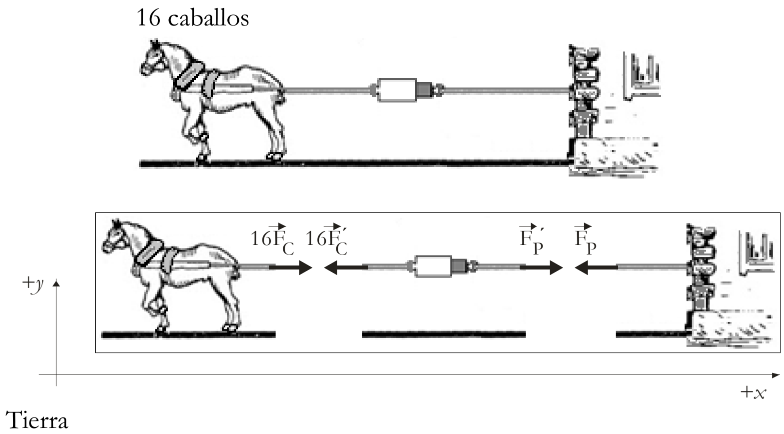


Figura 4.11

Boceto y DCA del problema 4.3b)

4) Aplicación del segundo y tercer principio

Observar que en el DCA de este inciso se ha tenido en cuenta que son 16 los caballos que tiran de un extremo.

En este caso si volvemos a aplicar sobre el dinamómetro el segundo y tercer principio, al igual que en el inciso anterior, podemos concluir:

$$\sum F_x = -16F_c{}' + F_p{}' = 0 \Rightarrow \underline{F_p{}' = 16F_c{}' = F_p}$$

El dinamómetro en esta situación indicará la fuerza de tracción de los 16 caballos. El muro se comporta como un espejo a los efectos de querer significar que tira del otro extremo como si hubiera 16 caballos. Por lo que concluimos que a cada hemisferio le corresponde una fuerza igual a $16F_C$.

Por lo tanto resulta mejor utilizar los dieciséis caballos de esta forma ya que se puede aplicar una fuerza de tracción superior a la del inciso a).

Luego de haber resuelto estos tres problemas relacionados con la fuerza de tensión ejercida por cuerdas y dinamómetros se finalizará con algunos comentarios generales para futuros problemas.

Conclusiones

- Con una cuerda se puede cambiar la dirección de aplicación de una fuerza. Aunque sólo se resolvieron casos de cuerdas extendidas horizontalmente, hay que tener presente que de haberlas ubicado verticalmente o en un ángulo intermedio (oblicuo) las fuerzas sobre la cuerda sólo habrían cambiado su dirección, manteniéndose siempre paralelas a las cuerdas.

- La tensión o la tracción no es más que la fuerza que cada porción de soga o cuerda puede ejercer sobre el inmediato anterior o posterior. Esto es muy importante para no confundir a la tracción con la suma de sus módulos o la sumatoria total de las fuerzas sobre la cuerda. La tensión es sólo una de las fuerzas que actúa en los extremos.

- La cuerda trasmite la fuerza en módulo, de un extremo a otro, si está en reposo. Observe que importante conclusión, ya que si una cuerda cualquiera está sometida a dos fuerzas que la estiran, sólo si su masa es despreciable podemos afirmar que la fuerzas de sus extremos son iguales, independientemente si el sistema está en reposo o acelerado.

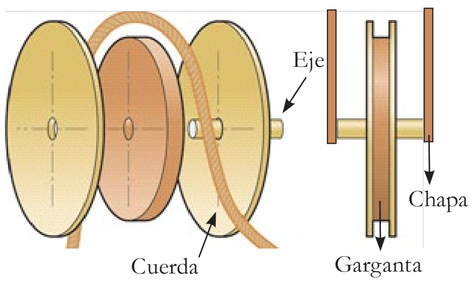
4.3 POLEAS

La polea es un mecanismo muy común en la mecánica porque se utiliza para transmitir fuerzas y por ello es de uso generalizado en aquellas actividades que precisan de la elevación de cargas (muelles, pozos, etc.) atribuyéndose a Arquímedes (Siracusa, Italia, 287 a. C.- Siracusa, Italia 212 a.C.) los primeros indicios de su uso, según los textos de Plutarco (Queronea, Grecia, 45 d.C.- Delfos, Grecia, 120 d.C.) en el siglo I a.C.

Una polea es una máquina simple (artefacto que transforma un movimiento en otro) cuya finalidad es cambiar el sentido y dirección de una fuerza. Está compuesta por una rueda, un eje fijo a una chapa que pasa por el centro de la rueda y una cuerda o una cadena. En la Figura 4.12 se observa el esquema de una polea, muy simple, realizada con tres discos con un agujero en su centro. Uno de ellos debe ser más pequeño que los otros para formar lo que se conoce con el nombre de garganta.

Figura 4.12

Esquema de una polea y sus partes constituyentes.



En la práctica la rueda debe ser maciza y se caracteriza por tener un canal esculpido en su borde, llamado garganta, por el que se va a acoplar el cable o la cuerda que transmite las fuerzas.

El eje y la chapa, permiten fijar la rueda a un punto de apoyo firme (techo, pared, estructura, etc.) que soporte las fuerzas aplicadas sobre la rueda, mientras que esta pueda rodar libre y sin obstáculos.

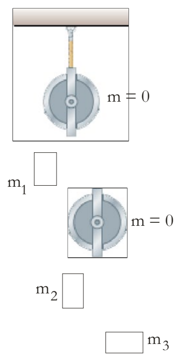
La cuerda utilizada debe tener la suficiente resistencia a la tracción para soportar las tensiones que se generan en sus extremos.

En una polea ideal, el roce entre la cuerda y la garganta es despreciable. Además su masa es despreciable. En este caso, la magnitud de la tensión de un extremo a otro de la cuerda, cambia su dirección y sentido pero tiene igual módulo en un extremo y otro de la cuerda.

El siguiente problema muestra cómo resolver aquellas situaciones en donde hay cuerdas y poleas ideales.

Problema 4.4

Sean los siguientes tres cuerpos de masas m_1, m_2 y m_3, conectados con poleas, como se indica en la figura. Sabiendo que el sistema parte del reposo, calcular la aceleración de cada cuerpo respecto de Tierra y las tensiones de las cuerdas. En la figura se muestran las posiciones que tienen en este sistema los cuerpos al momento de liberarlos.



1, 2 y 3) Boceto, DCA y primer principio de Newton

Los cuerpos a analizar en este problema son los tres que penden de sus correspondientes cuerdas y la polea móvil. Sus DCA se observan en la siguiente figura.

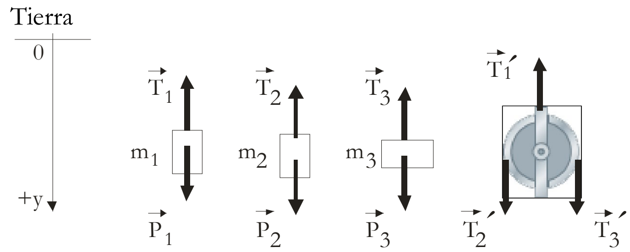


Figura 4.13

DCA y SR del problema 4.4.

Realizar el DCA de la polea fija no va a aportar nada a la resolución de la situación, al menos que interroguen por la fuerza que el techo realiza para sostener el conjunto.

Se eligió un sistema de referencia positivo hacia abajo y el origen del sistema en la polea fija (Tierra).

4) Aplicación del segundo y tercer principio de Newton

Aplicando el segundo principio de Newton para cada uno de los cuerpos resulta:

(1) $P_1 - T_1 = m_1 a_1$

(2) $P_2 - T_2 = m_2 a_2$

(3) $P_3 - T_3 = m_3 a_3$

Si la polea móvil se considera de masa despreciable se puede plantear el equilibrio de las fuerzas:

(4) $T'_2 + T'_3 - T'_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad T'_2 + T'_3 = T'_1$

Por tercer principio de Newton, se tiene:

(5) $\begin{cases} T_1 = T'_1 \\ T_2 = T'_2 \\ T_3 = T'_3 \end{cases}$

Si la cuerda de la polea móvil también se considera de masa despreciable se puede considerar una ecuación de equilibrio entre las fuerzas T_2 y T_3

(6) $T_2 = T_3$

5) Aplicación de posibles formulaciones para algunas fuerzas

La única formulación de este problema se encuentra en las relaciones entre el peso y la masa, para cada uno de los cuerpos que intervienen.

$P_1 = m_1\, g$

$P_2 = m_2\, g$

$P_3 = m_3\, g$

6) Análisis del sistema de ecuaciones obtenido y búsqueda de posibles ligaduras entre variables

Del desarrollo anterior surge el siguiente sistema de ecuaciones:

(1) $m_1\, g\; - \; T_1 \,=\, m_1 a_1$

(2) $m_2\, g\; - \; T_2 \,=\, m_2 a_2$

(3) $m_3\, g - \; T_3 \,=\, m_3 a_3$

(4) $T_2 + T_3 = T_1$

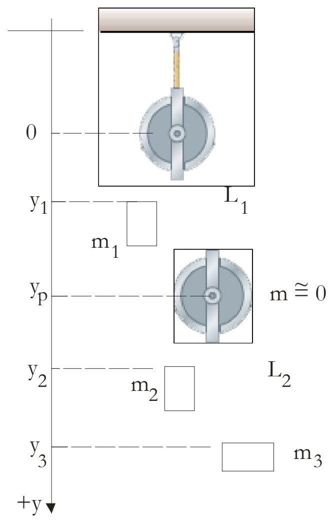
(5) $T_2 = T_3$

Este sistema de cinco ecuaciones que se ha obtenido tiene seis incógnitas (T_1, T_2, T_3, a_1,a_2 y a_3). Se debe encontrar una ecuación más, que lógicamente va a surgir de relacionar las aceleraciones. Las aceleraciones a_1, a_2 y a_3 no pueden tomar cualquier valor, ya que los bloques no son libres de moverse debido a que la soga los liga. En este problema hay dos sogas y por lo tanto dos ligaduras. Imaginemos que las longitudes de las sogas sean L_1 y L_2. Se debe cumplir en todo instante si la soga es inextensible que L_1 y L_2 sean constantes.

La figura 4.14 muestra como vincular las longitudes de las sogas con las posiciones de las masas, lo que permitirá encontrar la relación buscada entre las aceleraciones.

Figura 4.14

Planteo de ligaduras en el problema 4.4.



La soga L_1, que une la masa m_1 con la polea móvil, tiene una longitud que es constante en todo tiempo, que puede considerarse matemáticamente de la siguiente forma:

$$L_1 = y_1 + \pi\, R_1 + y_p$$

Donde y_1 es la posición de la masa m_1 medida desde un SR que tiene su origen en la polea fija al techo; $\pi\, R_1$ es la mitad del perímetro de la polea fija e y_p es la posición de la polea móvil.

Al derivar respecto del tiempo resulta:

$$\frac{d}{dt}(L_1) = \frac{d}{dt}\left(y_1 + \pi\, R_1 + y_p\right)$$

Si la longitud L_1 resulta inextensible, no debe variar a pesar de que el sistema se mueva, entonces:

$0 = v_1 + 0 + v_p \Rightarrow v_1 = -v_p$

Al derivar la velocidad con respecto al tiempo encontramos la relación entre las aceleraciones del cuerpo 1 y la polea móvil:

(a) $a_1 = -a_p$

Es un resultado esperado ya que la polea que vincula ambos cuerpos esta fija al techo, por lo que ambas aceleraciones deben ser iguales y de sentido contrario.

Si aplicamos un razonamiento similar a la soga L_2 que une al cuerpo 2 y al 3 tenemos:

$L_2 = y_2 - y_p + \pi R_2 + y_3 - y_p$

derivando respecto del tiempo:

$0 = v_2 - v_p + 0 + v_3 - v_p \Rightarrow 2\, v_p = v_2 + v_3$

al derivar la velocidad con respecto al tiempo se obtiene:

(b) $2\, a_p = a_2 + a_3$

Este resultado no es trivial y se ve la necesidad del racionalismo para llegar al mismo.

Relacionando las ecuaciones (a) y (b) resulta la sexta ecuación que es necesaria para poder resolver el sistema de ecuaciones

(6) $-2a_1 = a_2 + a_3$

7) Resolución del sistema de ecuaciones: cálculo de las aceleraciones

Del sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas resulta:

$$a_2 = \frac{m_1 m_2 - 3\, m_1 m_3 + 4\, m_2 m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4 m_2 m_3}\, g$$

$$a_3 = \frac{m_1 m_3 - 3\, m_1 m_2 + 4\, m_2 m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4 m_2 m_3}\, g$$

$$a_1 = \frac{m_1 m_3 + m_1 m_2 - 4\, m_2 m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4 m_2 m_3}\, g$$

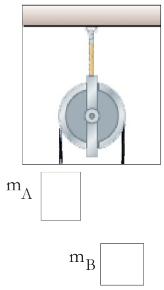
$$T_1 = 2\, T_2 = \frac{8\, m_1\, m_2\, m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4\, m_2 m_3}\, g$$

8) Análisis de los resultados obtenidos en situaciones extremas que pudieran indicar la validez de los mismos

- Es bien conocido el resultado de un sistema simple de dos masas que cuelgan de una cuerda que pasa por la garganta de una polea fija (máquina de Atwood), como muestra la figura 4.15, en donde la aceleración de las masas está dada por la expresión:

Figura 4.15

Máquina de Atwood.



$$a_A = -a_B = \frac{m_a - m_b}{m_a + m_b} g$$

El resultado obtenido en el paso 7 puede verificarse con esta situación si $m_2 = m_3$, ya que de esta forma la polea móvil no rotaria y las masas descenderían sin aceleración relativa entre ellas, comportándose como una sola masa. Si llamamos $m_2 + m_3 = m_0$ obtenemos según los resultados obtenidos en el paso 7):

$a_2 = a_3$ (resultado que ya predecíamos) $= -\dfrac{(m_1 - m_0)\, g}{m_1 + m_0}$

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_0)\, g}{m_1 + m_0}$$

Expresiones formalmente iguales a la de la máquina de Atwood.

- Otra comprobación extrema que puede realizarse es suponer cualquiera de las masas con un valor tendiente a cero, resultando las siguientes expresiones:

$$\text{Si } m_1 \to 0 \quad \begin{cases} a_1 \to -g \\ a_2 \to g \\ a_3 \to g \\ T_1 = T_2 \to 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } m_2 \to 0 \quad \begin{cases} a_1 \to g \\ a_2 \to -3g \\ a_3 \to g \\ T_1 = T_2 \to 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } m_3 \to 0 \quad \begin{cases} a_1 \to g \\ a_2 \to g \\ a_3 \to -3g \\ T_1 = T_2 \to 0 \end{cases}$$

Cada situación es diferente y retrotrae a repasar los resultados de la ingravidez. Las tensiones de las cuerdas tienden a cero y sus aceleraciones a ser las de la gravedad en caída libre

5 EL OSCILADOR ARMÓNICO

El estudio del oscilador armónico tiene analogías en muchos campos que no necesariamente pertenecen a la mecánica. Aunque nuestro estudio se centrará en el movimiento de un resorte o un péndulo, lo que realmente encierra es algo mucho más profundo: el estudio de una ecuación diferencial que permite describir racionalmente el comportamiento de variados fenómenos en diferentes campos de la física.

Así por ejemplo, algunos de los fenómenos que indirectamente se vinculan y que incluye formalmente la ecuación diferencial que caracteriza al oscilador armónico son:

- ✓ Oscilaciones de una masa y un resorte.
- ✓ Oscilaciones de las cargas que fluyen en un circuito eléctrico.
- ✓ Vibraciones de un diapasón que genera ondas sonoras.
- ✓ Vibraciones de electrones en un átomo que generan ondas luminosas.
- ✓ Complicadas interacciones en reacciones químicas.
- ✓ Crecimiento de una colonia de bacterias en interacción con el aprovisionamiento de alimento y los venenos que las bacterias producen.
- ✓ etc.

Todos estos fenómenos obedecen a ecuaciones que son formalmente iguales entre sí, y que se las identifica con las del oscilador armónico que se estudiará a continuación.

5.1 ECUACIONES DIFERENCIALES

Una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, consiste en la suma de varios términos, siendo cada término una derivada de la variable dependiente con respecto a la independiente, multiplicada por una constante. En general responde a la siguiente expresión:

$$a_n \frac{d^n}{dt^n}\, x + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\, x + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} x + a_0\, x = f(t) \tag{5.1}$$

A esta ecuación se la denomina ecuación diferencial lineal de orden "n" con coeficientes constantes. Observar que la denominación de lineal es consecuencia de que ninguno de los términos está elevado a una potencia.

Una ecuación diferencial, por tanto, es una expresión algebraica en donde la variable se encuentra afectada por derivadas, y como toda ecuación debe encontrarse que variable satisface la misma para su solución.

Se debe empezar a reconocer este tipo de ecuaciones, que de hecho ya han sido resueltas sin darnos cuenta, o si se quiere, sin haberle puesto un nombre como el que acabamos de establecer.

Por ejemplo, aplicando el segundo principio de Newton a una partícula sometida a la acción de una fuerza unidimensional en el eje x, obtenemos la siguiente forma matemática:

$$F_x = m\, a_x = m \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

$$\boxed{\frac{F_x}{m} = \frac{d^2}{dt^2}x(t)} \quad \Rightarrow \text{Ecuación diferencial lineal de segundo orden} \tag{5.2}$$

Esta ecuación diferencial, de segundo orden, es particularmente sencilla de resolver, ya que pueden separarse las variables e integrar.

De hecho, es lo se ha realizado cuando se estudió el MRUV. Si F_x es constante en el tiempo, integrando dos veces resulta:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{F_x}{m}\right) t^2 \tag{5.3}$$

Donde x_0 y v_0 son las constantes de integración, que fueron reconocidas en cinemática como las condiciones iniciales del movimiento y F_x/m es la aceleración de la partícula, considerada constante durante todo el tiempo que dure el movimiento.

En física, todos los problemas conllevan finalmente a una ecuación diferencial a resolver y que en general no es tan simple como la anterior.

El estudio del oscilador armónico es un problema de mecánica que va a conducir a una ecuación diferencial con una forma muy particular, ya que las soluciones de dicha ecuación diferencial van a ser funciones denominadas armónicas: senos o cosenos.

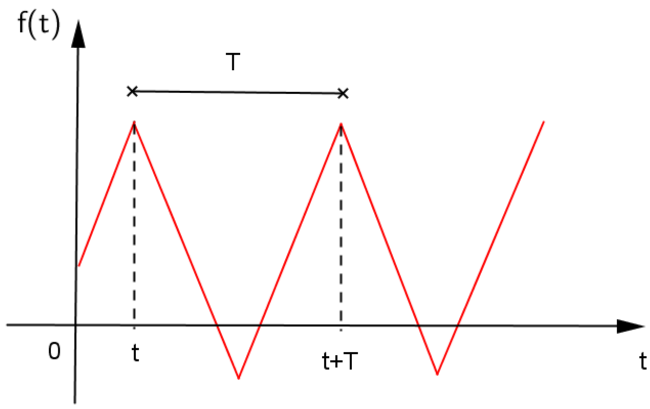
Antes de introducirnos en el estudio de este tipo dispositivos mecánicos (masa-resorte, péndulo) que dan lugar a ecuaciones diferenciales reconocidas como características del oscilador armónico, profundizaremos el estudio sobre las denominadas funciones periódicas y en particular las armónicas.

5.2 FUNCIONES PERIÓDICAS

Decimos que cierta magnitud $f(t)$ es periódica si se repite transcurrido un cierto tiempo T denominado periodo. La Figura 5.1 representa una función $f(t)$ cualquiera que cumple con la condición de ser periódica.

Figura 5.1

Gráfica de $f(t)$ (periódica) en función de t



Matemáticamente, la condición de periodicidad establece para $f(t)$:

$f(t) = f(t+T)$ donde $T = período$

Si $f(t)$ tiene la forma seno o coseno, la función se denomina armónica. Son precisamente estas funciones armónicas las que serán estudiadas en particular.

5.2.1 FUNCIONES SINUSOIDALES O COSINUSOIDALES

Los senos o cosenos, que son las funciones periódicas sobre las que se centra nuestro estudio, merecen una particular atención, ya que en general cuando se las trata desde la matemática se pierden de vista los parámetros que son importantes reconocer desde la física.

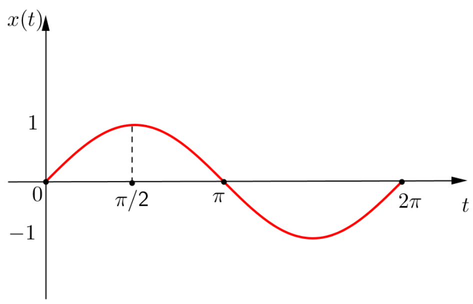
Por tal motivo, con el siguiente problema, se reconocerán las distintas características de este tipo de funciones.

Problema 5.1

Graficar y encontrar la expresión para el periodo T de las siguientes funciones armónicas, correspondientes a las ecuaciones de movimiento de una partícula:

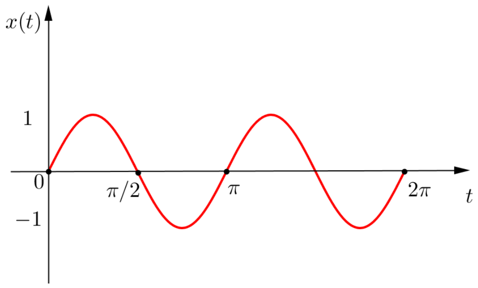
a) $x(t) = sen\ t$ b) $x(t) = sen\ 2t$ c) $x(t) = 3\ sen\ 4t$

a) $x(t) = sen\ t$



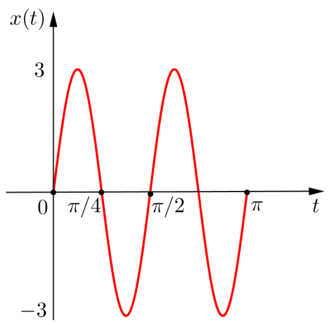
$$T = 2\,\pi\ s$$

b) $x(t) = sen\ 2t$



$$T = \pi\ s = \frac{2\,\pi}{2}\ s$$

c) $x(t) = 3\ sen\ 4t$



$$T = \frac{\pi}{2}\ s = \frac{2\,\pi}{4}\ s$$

Observaciones

- Las ecuaciones de los incisos a), b) y c) difieren en sus argumentos, en el factor que multiplica al tiempo t. En el inciso a) es 1, en el b) 2 y en el c) 4.

- Este factor, tiene que tener unidades de radianes/segundo, ya que la función seno se aplica a un argumento angular medido en radianes.

- La incidencia de este factor en el argumento denota que exista entre las tres una diferencia de período: la primera tiene un período de $2\,\pi\, s$, la segunda de $\pi\, s$ y la tercera de $\pi/2\ s$.

- Las dos primeras ecuaciones tienen una amplitud máxima de $1\,m$ y de $3\,m$ la c), ya que $x(t)$ físicamente denota una posición espacial.

- Si bien matemáticamente se han omitido las unidades de la amplitud y el factor multiplicativo del argumento, un análisis físico debe dar cuenta de dichas unidades.

5.3 FUNCIONES ARMONICAS

La forma general de una función armónica es la siguiente:

$$x(t) = A\,sen(\omega t + \phi_0) \quad \text{o} \quad x(t) = A\,cos(\omega t + \phi_0) \tag{5.4}$$

donde es importante reconocer:

- ✓ La *amplitud* A.
- ✓ La denominada *fase* (el ángulo) sobre la cual se aplica la función seno o coseno: $(\omega\, t + \phi_0)$
- ✓ El factor multiplicativo ω, que se denomina pulsación o frecuencia angular (no confundir con velocidad angular que tiene asignada la misma variable).
- ✓ El desfasaje inicial ϕ_0, o fase inicial.

Profundizaremos un poco más sobre algunas de estas.

Amplitud

La amplitud A determina el valor máximo que puede adquirir la función. Puesto que la función seno oscila entre -1 y $+1$, al multiplicarla por un factor A oscilará entre $-A$ y $+A$.

Fase

Es el argumento sobre el cual se aplica la función *seno* o *coseno*. Este argumento es función del tiempo, y por lo tanto la fase va aumentando a medida que transcurre t. Sin embargo, como la función es un *seno* o un *coseno*, a pesar que la fase se incremente indefinidamente, los valores que adopta la función se van repitiendo periódicamente.

Fase inicial

Es el ángulo inicial correspondiente al instante $t = 0$. Como las funciones *seno* y *coseno* difieren en $\pi/2$, es indistinto hablar de una función *seno* o *coseno*, y es por ello que simplemente se las denomina armónicas. En el problema 5.1, los tres ejemplos planteados tienen una fase inicial $\phi_0 = 0$.

Pulsación o frecuencia angular ω

Es un factor muy importante y característico de toda función armónica, ya que está íntimamente relacionado con el período T de la función como puede apreciarse en el problema 5.1. Sus unidades son rad/seg, lo que permite que $\omega\, t$ se convierta en lo que se denomina una fase (ángulo) para cualquier valor de t . En la medida que ω sea mayor, se necesitará menos tiempo transcurrido para que la fase acumulada por $\omega\, t$ sea un múltiplo de $2\,\pi$ y la función se repita. Es por ello que en el problema 5.1, observamos que en la medida que ω aumenta, la frecuencia con que la función armónica se repite también aumenta, lo que equivale a decir que el período T disminuye.

5.3.1 FUNCIONES ARMÓNICAS: PERÍODO

Como se trata de funciones *seno* o *coseno*, las mismas se repiten en la medida que la diferencia de fase acumulada sea 2π, o un múltiplo entero de $2\,\pi$. Así, transcurrido un tiempo igual a un período T, dos fases consecutivas deben diferir en 2π, que matemáticamente podemos expresar como:

$$fase\,(\,t+T)-fase(t)=2\,\pi$$

Resultando, si lo aplicamos al argumento de la forma general 5.4:

$$\left[(\omega(t+T)+\phi_0\right]-\left(\omega\, t+\phi_0\right)=2\,\pi \qquad (5.5)$$

Trabajando algebraicamente la expresión 5.5 se concluye para el período la siguiente expresión:

$$\boxed{T=\frac{2\,\pi}{\omega}} \qquad (5.6)$$

La frecuencia f se define como la inversa del período, resultando las siguientes relaciones entre las variables ω, T y f.

$$f=\frac{1}{T}=frecuencia \qquad [f]=\frac{1}{s}=Hz=Hertz \qquad (5.7)$$

$$\omega=2\,\pi\, f \qquad (5.8)$$

La frecuencia, f, representa el número de ciclos desarrollados por la función *seno* o *coseno* en la unidad de tiempo. La unidad de la frecuencia en el SI es el Hertz. Esta unidad se denomina así en honor al físico alemán Heinrich Hertz (Hamburgo, Alemania 1857- Bonn, Alemania 1894).

Es importante a esta altura, reconocer la ecuación 5.6, aplicada al problema 5.1, en dónde el factor ω, está íntimamente relacionado con el período T de la función matemática *seno* o *coseno*.

5.4 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Habiendo introducido las funciones armónicas en forma matemática, volvemos al campo de la mecánica, y formulamos la siguiente pregunta:

Si una partícula tiene por ecuación de movimiento una función de tipo armónico, como la 5.4, ¿qué fuerza neta obrará sobre ella? Observar que se plantea el problema al revés de como se acostumbra en dinámica. Nos preguntamos qué tipo de fuerza puede dar lugar a una ecuación de movimiento del tipo armónica:

$x(t) = A\, sen(\omega t + \phi_0)$

Como se conoce la ecuación de movimiento que se desea obtener, se puede derivar y obtener tanto la velocidad como la aceleración de la partícula:

Realizando la derivada se obtiene la velocidad:

$$v_x(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi_0) \tag{5.9}$$

Volviendo a derivar obtenemos la aceleración

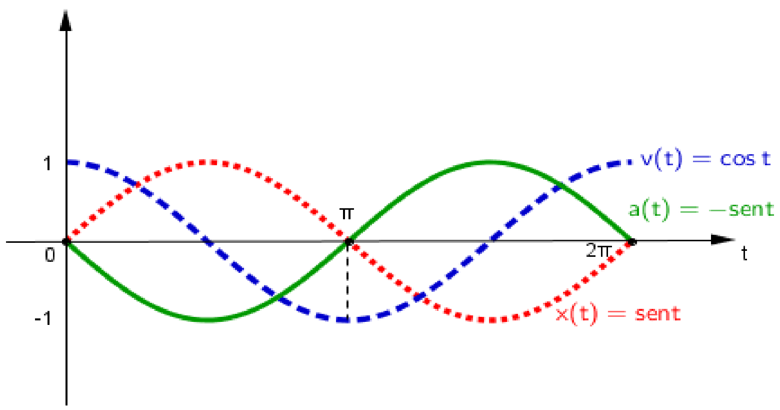
$$a_x(t) = -A\, \omega^2 sen(\omega t + \phi_0) \tag{5.10}$$

$$\Rightarrow \quad a_x(t) = -\omega^2 x(t) \tag{5.11}$$

En la siguiente gráfica se muestran las funciones $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ en donde se ha supuesto una amplitud $A = 1$, una fase inicial $\phi_0 = 0$, y una frecuencia angular $\omega = 1\, rad/s$ que da lugar a un periodo de $T = 2\,\pi\, s$.

Figura 5.2

Gráfica de las funciones $x(t)$, $v(t)$ *y* $a(t)$.



Habiendo obtenido la forma matemática para la aceleración de la partícula, se razona de la siguiente manera:

Si $a_x(t) = -\,\omega^2 x(t)$ es la aceleración de la partícula, de acuerdo con el segundo principio de Newton la fuerza neta que da lugar a esta aceleración es de la forma:

$$F_x = m\, a_x = -\underbrace{m\omega^2}_{\text{Constante}} x(t) = -\, constante\; x(t) \tag{5.12}$$

Conclusión

- Para que una partícula describa un movimiento de tipo armónico en una dirección, la fuerza neta que tiene que obrar sobre ella debe responder a un formalismo matemático como el que representa la 5.12. Una fuerza proporcional y opuesta al desplazamiento de la partícula en una dirección, da lugar a que ejecute un movimiento de tipo armónico, denominado Movimiento Armónico Simple (MAS).

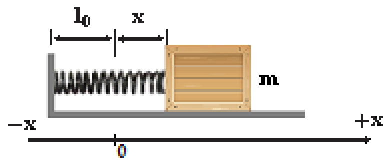
Se analizarán a continuación dos sistemas Mecánicos que dan lugar a movimientos de tipo armónico: El sistema Masa–Resorte y el Péndulo Matemático ó Ideal.

5.5 SISTEMA MASA - RESORTE

Introduciremos el estudio del denominado sistema Masa–Resorte, mediante la resolución del siguiente problema.

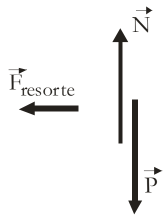
Problema 5.2

Considérese una masa unida a un resorte que tiene una longitud natural (sin estirar ni comprimir) l_0. Imaginemos que la masa que está sujeta a él es apartada una cierta cantidad x de su posición natural (también denominada de equilibrio) como indica la figura, y que no hay roce entre la masa y el piso.



a) Realizar un diagrama de cuerpo aislado
b) Obtener la ecuación de movimiento de la partícula

a) Diagrama de cuerpo aislado



b) Ecuación de movimiento de la partícula

Aplicando el segundo principio de Newton al DCA anterior, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$N - P = 0$$

$$-F_{resorte\ x} = m\, a_x$$

Para poder encontrar la ecuación de movimiento $x(t)$ que resulta del sistema anterior, se necesita una formulación racional para la fuerza del resorte. Digamos que la mecánica, sin una formulación para la fuerza del resorte no puede responder cómo será el movimiento que ejecute la partícula en la dirección de las x.

En la historia de las ciencias, nos encontramos con Robert Hooke (Freshwater, Reino Unido 1635-Londres, Reino Unido 1703), un físico contemporáneo a Newton. En forma experimental, Hooke estudió particularmente a los resortes pero más en general a los cuerpos deformables. Encontró que dentro del denominado límite elástico, un cuerpo deformado recupera su forma original si se deja de aplicar la fuerza, y respetando este límite, la fuerza es directamente proporcional a la deformación. Así, según las experiencias realizadas por Hooke, un resorte (que es un cuerpo deformable) va a proveer una fuerza (dentro de su límite elástico) que será proporcional a la deformación. Si el resorte, de longitud l_0 (sin estirar ni comprimir), se estira hasta que su longitud aumente en x, la fuerza F que aplica el resorte sobre la masa será directamente proporcional a la deformación (como lo establece la ecuación 5.12 para un movimiento armónico):

$|\vec{F}_{resorte}| \propto |x|$ módulo de la fuerza del resorte proporcional a la deformación

Observar que la nomenclatura anterior establece la proporcionalidad entre $F_{resorte}$ y x: la fuerza que aplica el resorte y la deformación del mismo.

Que sea proporcional significa matemáticamente que es de la forma:

$$|\vec{F}_{resorte}| = k\ |x| \tag{5.13}$$

Unidades de la constante del resorte $[k] = N/m$

Donde k es la constante de proporcionalidad (denominada constante del resorte) y representa la fuerza por unidad de longitud necesaria para desplazar el resorte una unidad de distancia de su posición de equilibrio.

Atención!!! En los libros podemos llegar a leer que la ley de Hooke en forma matemática es la siguiente: $F_{resorte\ x} = -kx$. Esta formulación, con el signo $"-"$ establece que el módulo es proporcional al desplazamiento y que la fuerza se opone al desplazamiento. Sin embargo, en el DCA que hemos realizado en el inciso a), ya se ha considerado que la fuerza se opone al desplazamiento, pues se ha representado a la fuerza del resorte con sentido contrario al desplazamiento de la partícula. Por lo tanto, si utilizamos este formalismo matemático, volveremos a invertir el sentido de la fuerza y cometeremos un error que se reflejará en la ecuación de movimiento de la partícula que obtendremos. Es muy común que el alumno cometa este tipo de errores, pues está acostumbrado a denominar fórmulas a leyes empíricas como es en este caso la ley de Hooke, y aplicarlas sin miramientos. Si bien es totalmente correcta la formulación $F_{resorte_x} = -kx$, hay que tener cuidado al aplicarla si ya se ha considerado el sentido de la fuerza en el DCA.

La formulación matemática para la fuerza del resorte (ley de Hooke) permite continuar con la resolución del problema, resultando la siguiente ecuación que permitirá encontrar $x(t)$:

$$-F_{resorte_x} = m\ a_x$$

$$-k\ x = m\ a_x = m \frac{d^2}{dt^2}\ x = m\ x''$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden, conocida como ecuación diferencial del movimiento armónico simple, que escrita en forma más conveniente adopta la siguiente forma:

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2} x + \frac{k}{m}\ x = 0} \qquad \text{Ecuación diferencial del MAS} \tag{5.14}$$

Así, enfrentamos por primera vez a esta forma matemática para una ecuación diferencial y de ahora en más debemos reconocer que ecuaciones diferenciales de este tipo conducen matemáticamente a soluciones armónicas: *senos* y *cosenos*. Para convencernos de que las soluciones de la ecuación 5.14 son armónicas, probaremos que una $x(t)$ armónica genérica es solución de esta ecuación diferencial.

Probar una solución, significa especializarla en la ecuación (en este caso diferencial) y verificar que la misma es solución. Sea entonces (observar que proponemos un *coseno* para que el lector se dé cuenta que es indistinto un *seno* que un *coseno*):

$$x(t) = A\ cos(\omega t + \emptyset_0)$$

Si la especializamos en la 5.14, resulta:

$$m\left[-A\,\omega^2 cos(\omega t+\phi_0)\right]+\left[A\,cos(\omega t+\phi_0)\right]=0$$

$$\Rightarrow \underline{\omega=\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}} \qquad (5.15)$$

Interpretación del resultado obtenido

✓ Se ha verificado que es una solución siempre y cuando $\omega=\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

✓ ω_0 no es una velocidad angular, es la denominada frecuencia natural de oscilación del sistema, en este caso, el sistema Masa-Resorte.

✓ Concluimos entonces: no importa cómo se ponga a oscilar el sistema (siempre que se respete el límite elástico para el cual es válida la ley de Hooke), la frecuencia de oscilación $\omega=\omega_0$ será igual a $\sqrt{\frac{k}{m}}$. A esta frecuencia se la llama frecuencia natural de oscilación del sistema, y es la que caracterizará al movimiento armónico que ejecutará la masa una vez liberada.

✓ Conociendo ω se pueden calcular la frecuencia y el período:

$$\omega_0=2\pi f=\frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

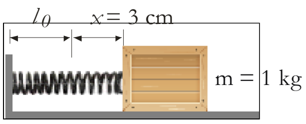
✓ Si aumenta la masa, entonces aumenta el periodo. O sea a mayor masa, es mayor el tiempo que tarda el sistema en ir y volver al mismo punto.

✓ ¿Qué ocurre con A y ϕ_0? A y ϕ_0 son las condiciones iniciales y tienen que resultar de la forma en que se inicie el movimiento de la partícula. Cada problema tiene una condición inicial que da lugar a una amplitud y fase inicial: A y ϕ_0.

✓ Es conveniente destacar y reconocer nuevamente que la forma matemática de la ecuación 5.14, caracteriza a todo M.A.S. Esta forma matemática la encontraremos en distintos campos de la física, y cada vez que aparezca, deberemos pensar en soluciones de tipo armónico.

Problema 5.3

Un cuerpo de $1\ kg$ está unido a un resorte con $k=1\ N/cm$. En $t=0$ se verifica la siguiente situación: $x=3\ cm$ y una velocidad inicial igual a 0 ($v_0=0$). Encontrar $x(t)$.



$v_0=0$

No será realizado nuevamente el análisis correspondiente pues se trata simplemente de una aplicación de los resultados obtenidos en el problema 5.2, al que simplemente se han agregado valores y condiciones iniciales. Sabemos que la solución es de tipo armónica y de la forma:

$x(t) = A\,sen(\omega t + \phi_0)$

con

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100\,N/m}{1\,kg}} = 10\,rad/s$$

Por lo tanto, resulta para la posición y la velocidad en función del tiempo:

$$x(t) = A\,sen\,(10t + \phi_0) \;\Rightarrow\; v(t) = A\omega\,cos\,(10t + \phi_0)$$

Las condiciones iniciales (CI), establecen que en el instante inicial se debe cumplir:

$$CI \begin{cases} x(0) = 0{,}03 = A\,sen(10 \quad 0 + \phi_0) \\ v(0) = \quad 0 = A\,10\,cos(10 \quad 0 + \phi_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0{,}03 = A\,sen(\phi_0) \\ 0 = A\;10\,cos(\phi_0) \Rightarrow \cos(\phi_0) = 0 \begin{cases} \phi_0 = {}^{\pi}/_2 \\ \phi_0 = -{}^{\pi}/_2 \end{cases} \end{cases}$$

Si $\phi_0 = \pi/2 \Rightarrow 0{,}03 = A\,sen(\pi/2) \Rightarrow A = 0{,}03$

Si $\phi_0 = -\pi/2 \Rightarrow 0{,}03 = A\,sen(-\pi/2) \Rightarrow A = -0{,}03$

Las dos soluciones son matemáticamente iguales, y válidas físicamente:

$\underline{x(t) = 0{,}03\,sen(10t + \pi/2)}$ o $\underline{x(t) = -0{,}03\,sen(10t - \pi/2)}$

5.5 PÉNDULO MATEMÁTICO

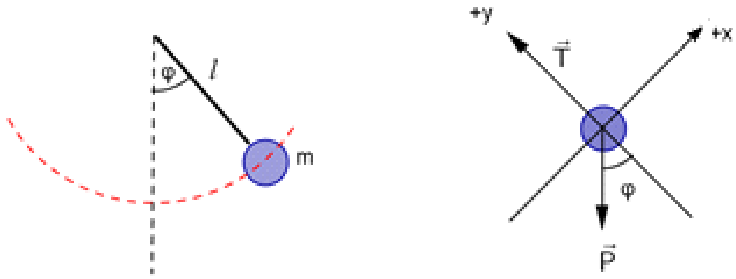
Otro sistema físico en el cual podemos encontrar una ecuación diferencial con la forma característica de un MAS (5.14), es en el péndulo ideal o matemático (también conocido como péndulo de Galileo).

Se trata de una de masa m suspendida por una cuerda ligera de longitud l que se fija en el extremo superior, como se muestra en la Figura 5.3. Apartada la masa de la posición de equilibrio (vertical) el sistema comienza a oscilar. El movimiento se produce en el plano vertical y es accionado por la fuerza de la gravedad. Se demostrará que, si el ángulo inicial de apartamiento φ es pequeño (menor de 10^0) el movimiento es de tipo armónico simple.

Las fuerzas que actúan sobre la masa m, como muestra el diagrama de cuerpo aislado de la Figura 5.3, son: la fuerza $\vec{T}$ ejercida por la cuerda y la fuerza gravitatoria $\vec{P} = m\,\vec{g}$. La componente tangencial de la fuerza gravitatoria, $m\,g\,sen\,\varphi$, siempre actúa opuesta al desplazamiento φ de la partícula. Por lo tanto, la fuerza tangencial es una fuerza de tipo restauradora, al igual que la fuerza del resorte.

Figura 5.3

Esquema y diagrama de cuerpo aislado del péndulo matemático.



Aplicando el segundo principio de Newton al DCA de la figura 5.3, y tomando como ejes instantáneos los x e y indicados, obtenemos:

$$\Sigma\, F_y = T - m\, g\, cos\, \varphi = m\, a_c$$

$$\Sigma\, F_x = -m\, g\, sen\, \varphi = m\, a_{tg}$$

Observar que se ha utilizado la nomenclatura característica de un movimiento circular para las aceleraciones, ya que la partícula describe un arco de circunferencia como trayectoria.

Como se trata de una partícula que describe un movimiento de tipo circular, pueden ser utilizados los formalismos estudiados en cinemática del movimiento circular para expresar las aceleraciones. Si se considera sólo el movimiento en la dirección tangencial (eje x) se puede escribir:

$$-m\, g\, sen\, \varphi\ = m\, \alpha\, l = m\, l\, \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$ donde α es la aceleración angular

$$\Rightarrow\ l\, \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\, sen\, \varphi = 0$$

que puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right)\, sen\, \varphi = 0 \qquad (5.16)$$

Comparando formalmente la 5.16 con la 5.14, se observa que la única pero si gran diferencia es que la variable φ aparece en el segundo término afectada a la función seno. Ahora bien, para ángulos pequeños $(\varphi \cong 0)$ matemáticamente (más precisamente en el límite) podemos escribir:

$$sen\, \varphi \cong \varphi$$

En otras palabras, si a la partícula se la aparta levemente de su posición de equilibrio, puede realizarse esta aproximación y escribir para la ecuación diferencial la siguiente expresión:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right)\, \varphi = 0 \qquad (5.17)$$

Se ha así obtenido para el caso de un péndulo una ecuación diferencial formalmente idéntica a la 5.14, lo que hace pensar en soluciones de tipo armónicas de la forma:

$$\varphi(t) = \varphi_{máx}\, sen(\omega\, t + \phi_0) \qquad (5.18)$$

Comprobemos que efectivamente la 5.18 es solución de la 5.17:

$$l\left[-\omega^2 \varphi_{máx}\, sen(\omega t + \phi_0\right] + \left[\phi_{máx}\, sen\, (\omega t + \phi_0)\right] = 0$$

$-\omega^2 l + g = 0$

Resultando para la frecuencia natural de oscilación y el período las siguientes expresiones:

$$\boxed{\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}} \qquad\qquad \boxed{T = 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \tag{5.19}$$

Observaciones

- Es momento de formularnos la siguiente pregunta: ¿qué se entiende por ángulos de apartamiento pequeños?, ya que es importante tener presente hasta donde puede ser válida la 5.17 para un péndulo.

No olvidemos que los ángulos se miden en radianes, y una circunferencia completa tiene 2π radianes. Por lo tanto, un ángulo pequeño puede ser, comparado con $2\,\pi$, un ángulo de $0{,}1$ rad. Así, verifiquemos la relación entre φ y $\text{sen}\varphi$ para estos valores:

Si $\varphi = 0{,}1 \text{ rad } (\varphi^0 = 5{,}7^0) \Rightarrow \text{ sen } 0{,}1 \text{ rad} = 0{,}0998334 \cong 0{,}1$

Vemos así que se cumple para un ángulo no tan despreciable que $sen\varphi \cong \varphi$. Podemos generalizar, que para ángulos de hasta 10^0 de apartamiento del péndulo, $sen\ \varphi \cong \varphi$.

- El período T y la frecuencia natural ω_0 no dependen de la masa del péndulo, según se desprende de la 5.19.

- Si observamos la expresión 5.19 para el período, resulta que es independiente del apartamiento inicial (el ángulo inicial). Esto significa que sin importar cuánto apartemos el péndulo de la posición de equilibrio (siempre con ángulos pequeños), el tiempo que tarda en ejecutar una oscilación dependerá únicamente de la longitud y de la aceleración de la gravedad en el lugar. Esta característica se denomina *isocronismo*, y fue observada por Galileo.

- La expresión 5.19 sugiere que con un péndulo puede medirse la aceleración de la gravedad en cualquier punto de la superficie de la Tierra. Midiendo el tiempo que el péndulo demora en ejecutar una oscilación (el período) y la longitud del hilo del que pende, aplicando la 5.19, puede ser calculada la aceleración $\vec{g}$ en forma experimental, valiéndonos de un simple péndulo matemático.

Conclusión final

Se ha estudiado un tipo de movimiento muy característico que se va a presentar continuamente no sólo en el campo de la física, sino en general en cualquier campo del conocimiento y que se debe reconocer. La siguiente figura muestra distintos dispositivos mecánicos que ejecutan oscilaciones armónicas y que están regidos por ecuaciones diferenciales características de los denominados M.A.S.

Figura 5.4

Lámina elástica, resorte y péndulo oscilando

A continuación, y a modo de concluir el capítulo, será resuelto un problema que en general es dificultoso para los alumnos por no confiar en el racionalismo matemático que se ha tratado de transmitir a lo largo de estos tutoriales.

Problema 5.4

Resorte vertical

A un resorte de constante k y longitud natural l_0 se le sujeta una masa m y se lo cuelga del techo. Se aparta de su posición de equilibro una cierta distancia y, para luego liberarlo. Encontrar la ecuación de movimiento de la masa, respecto del techo.

Se resolverá este problema siguiendo dos caminos:

El primer camino es el que en general sigue el alumno cuando se enfrenta a este problema, y es un camino que denominaremos no racional. En él, el alumno, sin creer en el racionalismo matemático, trata de intuir que es lo que va a ocurrir y divide al problema en partes, con las consiguientes dificultades de interpretación y posibles errores a cometer.

En el segundo camino, y creyendo plenamente que el racionalismo matemático es el que debe encauzarnos a la solución, se dejará de lado cualquier tipo de intuición, esperando que el planteo racional conduzca a la solución, para sí luego realizar las interpretaciones que la misma amerite.

Primer camino: no racional

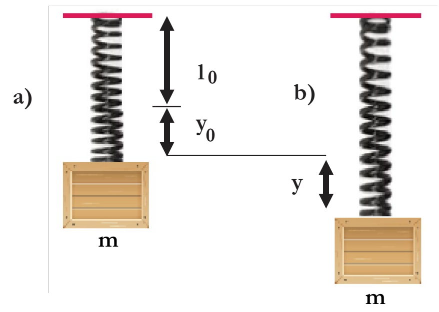
En general es el camino que adopta el alumno que no cree o no se siente seguro de que el racionalismo matemático resuelva las dificultades, y pone de sí un razonamiento intuitivo que conduce generalmente a particionar el problema.

1 y 2) Realización del gráfico o boceto

De los bocetos realizados, el alumno reconoce en primer lugar que la masa m tiene una posición de equilibrio natural que se corresponde con la condición para la cual la fuerza del resorte se equilibra con el peso de la masa Figura 5.4(a).

Figura 5.4 (a y b)

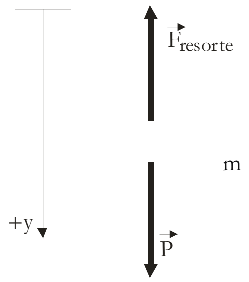
Distintas posiciones para un resorte vertical a) y b).



➢ Análisis figura 5.4 (a)

2) Realización de diagrama de cuerpo aislado para la condición de equilibrio, figura 5.4(a)

Dada esta circunstancia, el DCA correspondiente es el siguiente, que permitirá calcular el valor de y_0, correspondiente al estiramiento de equilibrio del resorte.



4 y 5) Aplicación del segundo principio de Newton y formulaciones para fuerzas

$\Sigma\vec{F} = 0 \;\Rightarrow\; \Sigma F_y = P - k\,y_0 = 0$ donde $k\,y_0 = F_{resorte}$

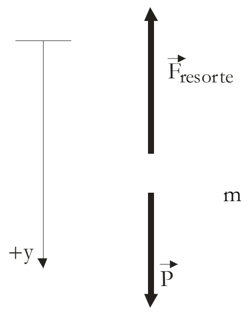
$\Rightarrow m\,g = k\,y_0 \;\Rightarrow\; y_0 = \dfrac{m\,g}{k}$ (y_0 es lo que se estira el resorte en la condición de equilibrio)

Llegado a este punto, en el cuál se ha resuelto un pequeño sub-problema dentro del problema, el alumno razona así:

Si a partir de y_0 el resorte se aparta una cierta cantidad y, entonces se plantea un nuevo problema a resolver, que se analiza a continuación, y que corresponde a la situación representada en la figura 5.4 (b)

➢ Análisis figura 5.4 (b)

3) Diagrama de cuerpo aislado para el apartamiento de equilibrio, figura 5.4 (b)



Observar que se ha representado a la fuerza del resorte mayor que el peso debido a que el resorte se encuentra estirado una cantidad $(y_0 + y)$, como se desprende de la figura 5.4 (b).

4 y 5) Aplicación del segundo principio de Newton y formulaciones para fuerzas

$$\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a} \Rightarrow \Sigma\,F_y = m\,a_y$$

$$\Rightarrow\; P - k(y + y_0) = m\,a_y$$

$$m\,g - k\,y - ky_0 = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Se ha arribado a una ecuación diferencial de segundo orden. Remplazando en esta última ecuación la expresión que se obtuvo para la condición de equilibrio $y_0 = \frac{m\,g}{k}$, resulta:

$$m\,g - k\,y - k\frac{m\,g}{k} = m\frac{d^2y}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad -\,k\,y = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Reordenando, resulta finalmente la ecuación diferencial característica de un sistema Masa-Resorte que tiene soluciones de tipo armónicas:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}\,y = 0$$

cuya solución es de la forma: $y(t) = A\,sen(\omega_0\,t + \phi_0)$, con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Por lo tanto, como la consigna del problema solicita describir el movimiento de la masa m respecto del techo, llamando $z(t)$ a la posición medida desde el techo, resulta:

$$z(t) = l_0 + y_0 + y(t)$$

$$\underline{z(t) = l_0 + y_0 + A\,sen(\omega t + \phi_0)}$$

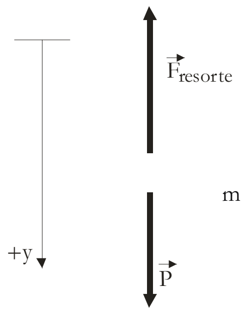
Segundo camino: racional

Utilizando un racionalismo más profundo, se debe esperar que el mismo deje la intuición de lado y lleve matemáticamente a la solución del problema. Por este motivo, apartamos el resorte y medimos la posición inicial desde el techo según se muestra en la siguiente figura:

1 y 2) Realización del gráfico o boceto

En el boceto se aprecia que el resorte tiene una longitud total y, medida desde el techo del que está sujeto. Debe quedar claro, esta distancia y incluye lo que hemos denominado y_0 y el estiramiento a partir de la misma, refiriéndonos al anterior método de solución. Pero, es el racionalismo matemático el que tiene que dar cuenta de ello, y es lo que debemos esperar.

4) Realización de diagrama de cuerpo aislado para esta situación



4 y 5) Aplicación del segundo principio de Newton y formulaciones para fuerzas

$$\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a} \;\Rightarrow\; \Sigma\,F_y = m\,a_y$$
$$\Rightarrow\; P - k(y - l_0) = m\,a_y$$

Cabe aclarar aquí, que el resorte se encuentra estirado una cantidad $(y - l_0)$, resultando la siguiente ecuación diferencial de segundo orden a resolver:

$$m\,g - k\,y + k\,l_0 = m\,\frac{d^2y}{dt^2}$$

Llegado a este punto, es cuestión de tener el conocimiento matemático necesario para resolver ecuaciones diferenciales de modo de poder seguir adelante. Considerando lo anterior, se explicará cómo se resuelve una ecuación de este tipo.

Lo que hay que tratar de lograr es escribirla de la forma más parecida a la que caracteriza a un MAS. Para ello, si extraemos k como factor común en el primer miembro, resulta:

$$-k\left(-\frac{m\,g}{k} + y - \;l_0\right) = m\,\frac{d^2y}{dt^2}$$

Corresponde en esta instancia realizar un cambio de variable: llamando u a la siguiente expresión tenemos:

$$\left(-\frac{m\,g}{k} + y - l_0\right) = u \quad\Rightarrow\quad u = y - l_0 - \frac{m\,g}{k}$$

al derivar u respecto de t resulta:

$$\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt} \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Así, aplicando un cambio de variable en la ecuación diferencial, se arriba a una ecuación diferencial que si tiene la forma correspondiente a un oscilador armónico:

$$-k\,u = m\frac{d^2u}{dt^2}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m}u = 0$$

cuya solución es de la forma

$u(t) = A\, sen(\omega_0 t + \phi_0)$ siendo $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Por lo tanto, si tenemos en cuenta cual es valor de la nueva variable u, obtenemos finalmente:

$$\Rightarrow \; A\, sen\,(\omega_0 t - \phi_0) = y - l_o - \frac{m\,g}{k}$$

$$\underline{y(t) = l_0 + \frac{m\,g}{k} + A\, sen\,(\omega_0 t - \phi_0)}$$

Expresión que es formalmente idéntica a la obtenida para $z(t)$.

Observaciones

- Analizando el resultado obtenido, vemos que el mismo incluye la posición de equilibrio ($u = 0$):

  $$y_0 = \frac{m\,g}{k}$$

  que concuerda con el obtenido con el primer método.

- Nuevamente destacamos que el racionalismo matemático conduce al resultado correcto, con el único requerimiento de conocer las herramientas matemáticas que debemos utilizar en física, como son en este caso, las ecuaciones diferenciales y sus métodos de resulución.

5.6 CONTEXTO HISTORICO DE HOOKE Y NEWTON

Casi simultáneamente, Hooke y Newton dieron un paso más que tuvo enormes consecuencias. Quizás guiados por la idea cartesiana según la cual el mecanicismo que regía las caídas terrestres y celestes era el mismo, sugirieron que la fuerza que atraía los planetas hacia el Sol y la Luna hacia la Tierra era la misma atracción gravitacional causante de la caía de piedras y manzanas. Sea como fuere, lo cierto es que Hooke fue el primero en hacerla pública, y su memoria de 1674 aún puede ser leída como una clara descripción de la idea que, una vez cuantitativizada y corpuscularizada por Newton, guió la imaginación científica durante los siglos XVIII y XIX. Hooke escribía:

"En fecha próxima expondré un Sistema del Mundo que difiere en varios detalles de todos los conocidos hasta ahora, y que se ajusta en todos sus extremos a las reglas ordinarias de la mecánica. Se halla fundamentado en tres suposiciones.

La primera es que todos los cuerpos celestes, sin excepción alguna, tienen una atracción o gravitación hacia su propio centro, gracias a la cual, no sólo atraen sus propias partes e impiden su desintegración, tal como observamos en el caso de la Tierra, sino que también atraen a todos los demás cuerpos celestes que se hallan bajo su radio de acción. Por consiguiente, no sólo el Sol y la Luna ejercen influencia sobre el cuerpo y el movimientos terrestres, influencia que se manifiesta de forma recíproca, sino que también Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno ejercen una considerable influencia sobre el movimiento de la Tierra en virtud de su fuerza atractiva, del mismo modo que el correspondiente poder atractivo de la Tierra tiene una influencia considerable sobre el movimiento de estos planetas.

La segunda suposición es que todos los cuerpos que han recibido un movimiento simple y directo continúan moviéndose en línea recta hasta que por la intervención de alguna otra fuerza efectiva son desviados y obligados a describir un círculo, una elipse o cualquier otra curva más complicada.

La tercera suposición es que estas fuerzas atractivas son tanto más poderosas en su acción cuanto más próximo a sus centros está situado el cuerpo sobre el que actúan. No he verificado experimentalmente según que regla de proporcionalidad varían las fuerzas con las distancias, pero es una idea que, seguida como merece serlo, deberá ayudar a los astrónomos a reducir todos los movimientos celestes a una ley determinada, la cual dudo que puedan encontrar jamás prescindiendo de la presente suposición."

A continuación realizaremos un análisis de este importante documento, ya que es reflejo del estado del conocimiento de la Mecánica en 1674.

Es notable observar como Hooke fundamenta que su Mecánica, estará basada en 3 suposiciones, si consideramos que la Mecánica de Newton está fundada en 3 principios (recordar que principio, conjetura o suposición son análogos).

- **Análisis de la primer suposición de Hooke**

Es una referencia cualitativa a la Ley de Gravitación Universal, en cuanto dos cuerpos que poseen masa se atraen, sean estos cuerpos celestes (planetas) o simplemente partes de estos cuerpos (piedras).

Cuando menciona que impiden su desintegración, quiere significar el hecho conocido que todo objeto cae si lo apartamos de la superficie de la Tierra. Ya se sabía acerca de la rotación de la Tierra sobre su eje, de forma que la gravitación impedía que las partes del planeta fueran expulsadas.

Observar que se mencionan sólo 5 planetas: Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno, que eran los conocidos en ese momento.

- **Análisis de la segunda suposición de Hooke**

Se trata sin dudas del Principio de Inercia, ya establecido por ese entonces por Descartes y Galileo.

Es interesante observar las palabras que utiliza para denominar a un MRU: un movimiento simple y directo.

Hace mención a trayectorias circulares o elipses en forma particular. Trayectorias que eran muy estudiadas en la época, pues esta cita es posterior a Kepler.

- **Análisis de la tercera suposición de Hooke**

Notablemente observamos que esta no es más que una continuación de la primera: nuevamente la Ley de Gravitación Universal.

Sin embargo, aquí esboza un intento de racionalizarla: menciona que la fuerza atractiva responde a alguna ley de proporcionalidad en donde intervenga la distancia. A menor distancia mayor fuerza.

Para finalizar, es interesante destacar que, de la lectura, se desprende que Hooke siendo un experimental, de alguna manera estaba tratando de hallar la expresión racional que diera respuesta a la gravitación. Las dificultades que le impedían obtenerla, sin dudas tienen que ver con la debilidad de esta fuerza y la necesidad de construir instrumentos de medida que no estaban al alcance de su imaginación.

6 SISTEMAS NO INERCIALES

El principio de la inercia es el andamio de toda la mecánica y establece las pautas que debe cumplir un buen sistema de referencia: *toda la mecánica está basada en los denominados sistemas de referencia denominados inerciales.* ¿Por qué entonces insistir en referir el movimiento a un SNI?

Lo que ocurre es que a veces es más fácil interpretar los resultados en un sistema de referencia respecto de otro. Hemos visto la importancia de la elección de un sistema de referencia al momento de racionalizar un problema. Una buena elección puede simplificar a tal punto el racionalismo matemático que es de suma importancia poder tener libertad de elección.

Al estructurar la mecánica, Newton se vio impulsado a idear un espacio absoluto como sistema de referencia, lo que implicaba la existencia de otro invariante: el tiempo absoluto.

En sus "PRINCIPIA" dice Newton: *"El tiempo absoluto, verdadero, matemático, transcurre en sí y por su naturaleza, sin ninguna relación con el exterior y se llama también duración". "El espacio absoluto permanece siempre homogéneo e inmóvil, merced a su naturaleza y sin referencia a ningún objeto exterior".*

Existiría pues, un movimiento absoluto: aquel en que un cuerpo pasa de un lugar absoluto a otro también absoluto. Por otra parte la noción de tiempo absoluto entraña el admitir la idea de simultaneidad: dos acontecimientos simultáneos en un SR, lo son en cualquier otro.

Toda la Mecánica Clásica está fundada sobre la noción de espacio y tiempo que se ha tratado de sintetizar.

En la segunda jornada de los famosos "Diálogos de los máximos sistemas" (1632), Galileo enuncia mediante un ejemplo sencillo, una proposición que jugaría en la mecánica un papel importantísimo. En la misma, se desarrolla el siguiente diálogo entre los tres interlocutores, Salviati, Simplicio y Sagredeo:

"Enceraos con algún amigo – hace decir a Salviati – bajo cubierta en la mayor habitación de algún gran navío, donde haya moscas, mariposas y animalitos semejantes; y además, un gran recipiente de agua conteniendo pececillos; suspended también un cubo que gota a gota vierta agua en otro vaso de boca angosta puesto debajo. Y estando parada la nave, observad atentamente cómo aquellos animalitos volando con igual velocidad van hacia cualquier parte de la habitación; se verá nadar a los peces indistintamente en todos sentidos; las gotas al caer entran todas en el vaso puesto bajo el cubo; y al tirar a vuestro amigo alguna cosa, no tendréis necesidad de enviarla hacia aquella parte con preferencia a ésta, cuando las distancias son iguales, y si saltáis con los pies juntos, salvaréis iguales espacios en cualquier dirección.

Habiendo observado atentamente todas estas cosas para no tener ninguna duda de que mientras el bajel está quieto no suceden así, haced mover la nave con cuanta velocidad queráis; que (mientras el movimiento sea uniforme y no fluctuante hacia un lado u otro) no reconoceréis la más mínima mutación en todos los efectos mencionados, y de ninguno de ellos podréis deducir si la nave camina o está quieta; al saltar salvaréis en el piso los mismos espacios que antes y no porque la nave se mueva con gran velocidad daréis un mayor salto hacia popa que hacia proa, aunque en el tiempo que estáis en el aire el piso se mueve debajo vuestro hacia la parte contraria a la del salto; y tirando cualquier cosa al compañero, no será necesario arrojarla con mayor fuerza para alcanzarlo ya esté hacia proa o hacia popa; como antes, las gotas caerán en el vaso inferior sin desviarse hacia proa o hacia popa, aunque la gota esté en el aire y la nave se traslade muchos palmos; los peces en su agua no nadarán con más fatiga hacia una parte u otra del vaso, sino que con igual agilidad irán a su alimento colocado en cualquier lugar de la orilla del vaso, y finalmente, las mariposas y las moscas continuarán indiferentemente su vuelo en todas direcciones……".

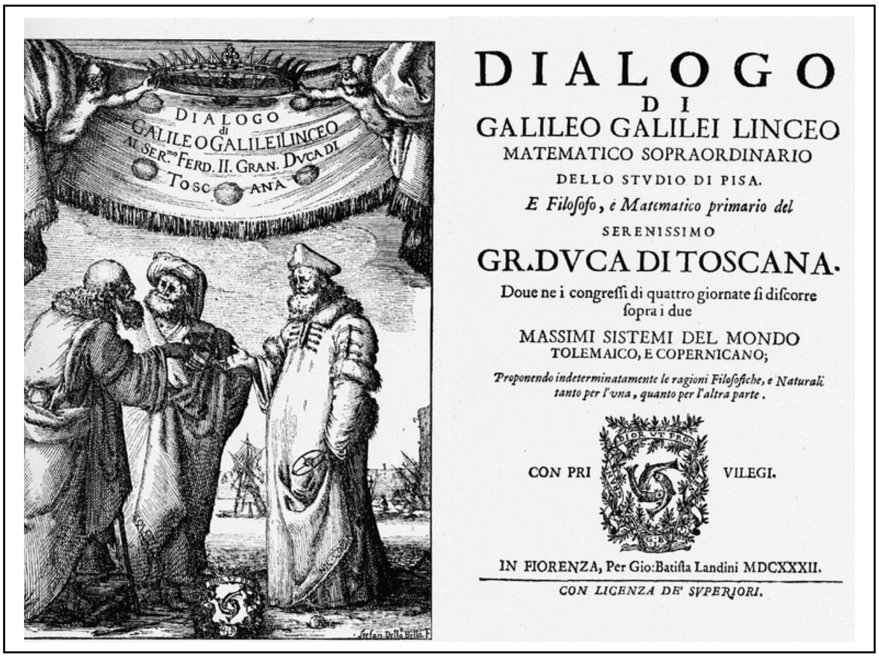


Figura 6.1

Frente y portada de Diálogos (Galileo, 1632).

De las consideraciones establecidas por Galileo se deduce esta importante conclusión:

"Por ninguna experiencia realizada en el interior de un sistema puede establecerse si éste se encuentra en reposo o MRU".

Este enunciado constituye el llamado "principio de relatividad galileano" o "principio de relatividad de la Mecánica Clásica". Es por ello, que cuando se pasa de un SR a otro en MRU con respecto al primero, las ecuaciones fundamentales de la mecánica clásica conservan su validez.

Entendida la idea de inercia, uno se pregunta ¿qué más puede decirse al respecto?

Imaginemos un científico que cree que el principio de inercia puede ser comprobado experimentalmente. Con tal objeto impulsa pequeñas esferas sobre un plano horizontal en su laboratorio, tratando en lo posible de eliminar el rozamiento y nota que el movimiento se hace más uniforme en la medida que las esferas están más pulidas. Imaginemos además que nuestro científico trabaja en su laboratorio sin ventanas y ninguna comunicación con el exterior.

Un bromista, instala un mecanismo exterior al laboratorio de tal forma que lo hace girar en su totalidad alrededor de un eje que pasa por su centro. Cuando comienza la rotación, el científico adquiere nuevas e inesperadas observaciones. Las esferas que tenían un movimiento uniforme empiezan repentinamente a alejarse del centro del laboratorio. El mismo científico "siente" una fuerza extraña que lo empuja hacia la pared, experimentando la misma sensación que tenemos al describir una curva cuando viajamos en tren o en coche. De esta forma, al científico se le empiezan a desmoronar sus resultados en cuanto a la verificación experimental del principio de inercia.

Por lo tanto, nuestro científico tendrá que descartar, junto con el principio de inercia, todas las leyes de la mecánica. El principio de inercia era su punto de partida: si éste no es válido, tampoco lo serán las conclusiones posteriores. Así, un observador recluido toda su vida en la sala giratoria, y obligado a realizar allí todas sus experiencias, llegaría a leyes de la mecánica diferentes a las que hemos estudiado hasta aquí, con el nombre de Mecánica Clásica o de Newton. Si por el contrario, un investigador entra al laboratorio con un profundo conocimiento y una firme creencia en los principios de la Mecánica Clásica, su explicación aparente del fracaso de las leyes de la Mecánica se basará en la conclusión que el laboratorio se encuentra en rotación. Con experiencias mecánicas apropiadas, el investigador podría determinar, inclusive, como gira el laboratorio.

¿Por qué nos interesamos tanto por el observador en su laboratorio giratorio? Sencillamente porque nosotros, en nuestra Tierra, estamos en cierto sentido en las mismas condiciones. Desde tiempos de Copérnico (Toruń, Polonia 1473- Frombork, Polonia 1543) sabemos que la Tierra gira sobre su eje en un movimiento alrededor del Sol. La rotación de la Tierra es comparativamente lenta, por lo cual el efecto no es muy pronunciado. Sin embargo, hay varios hechos que indican una pequeña desviación de las leyes de la Mecánica, y la concordancia de estas discrepancias entre sí puede ser considerada como una prueba de la rotación de la Tierra.

Volviendo a la problemática original, estudiaremos que modificaciones deberán sufrir los principios de Newton de modo de poder aplicarlos a un SNI. Para ello realizaremos un análisis en distintas situaciones cada vez más complejas de modo de poder obtener finalmente un resultado totalmente general, que permita trabajar en cualquier SNI que se presente en la práctica.

6.1 SNI EN MOVIMIENTO RECTILÍNEO DE TRASLACIÓN PURA

Se propone desarrollar una forma de análisis de la problemática teórica a resolver mediante la resolución de un sencillo problema, que contempla la realización de experiencias, en donde serán aplicados los principios de Newton indistintamente en un sistema de referencia inercial y otro no inercial, prestando atención a los resultados obtenidos.

Problema 6.1

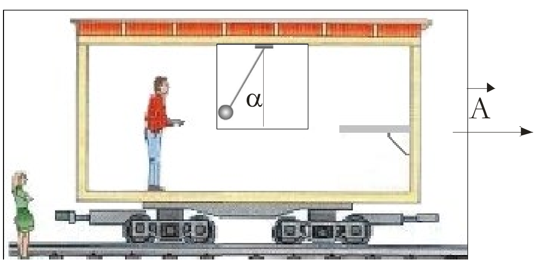
En el interior de un vagón de tren que se mueve con aceleración $\vec{A}$ respecto de tierra, se encuentran los siguientes dos objetos:

Objeto 1: un paquete, depositado sobre una mesa que está fija sobre el vagón.
Objeto 2: un péndulo que cuelga del techo del vagón.

Un estudiante de física que viaja dentro del vagón, observa a ambos objetos y manifiesta de los mismos (la figura ilustra las situaciones planteadas):

Objeto 1: el paquete lo veo en reposo respecto de la mesa sobre la que está apoyado.
Objeto 2: el péndulo, también lo veo en reposo, sin embargo, el hilo del que pende acusa una inclinación respecto de la vertical.

Aplicar los principios de Newton desde un sistema referencia inercial (SRI) en tierra, y desde un sistema de referencia no inercial (SNI) como es el vagón de tren que se encuentra acelerado. De la aplicación de los mismos, extraer conclusiones.



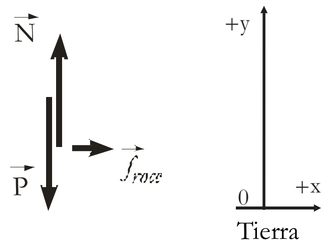
Como el problema plantea racionalizar el problema desde dos sistemas de referencia, se analizarán el paquete y el péndulo desde ambos sistemas de referencia y se extraerán conclusiones en función de los resultados.

- Paquete visto desde Tierra

1, 2 y 3) Diagrama de cuerpo aislado

Figura 6.2

Diagrama de cuerpo aislado del paquete visto de Tierra.



4) Aplicación del segundo y tercer principio de Newton

$\sum Fy = 0 \;\Rightarrow\; N - P = 0 \Rightarrow N = P$

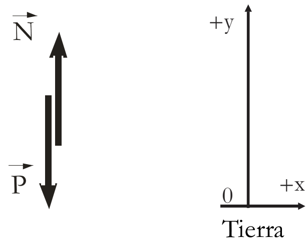
$\sum Fx = mA \;\Rightarrow\; \underline{f_{roce} = mA}$

- Paquete visto desde el tren

1, 2 y 3) Diagrama de cuerpo aislado

Figura 6.3

Diagrama de cuerpo aislado del paquete visto del vagón.



4) Aplicación del segundo y tercer principio de Newton

$\sum Fy = 0 \;\Rightarrow\; N - P = 0 \Rightarrow N = P$

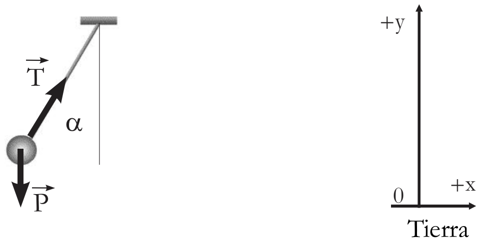
$\sum Fx = 0 \;\Rightarrow\; \underline{f_{roce} = 0}$ la fuerza de roce es cero por que el paquete visto desde el tren esta en reposo.

- Péndulo visto desde Tierra

1, 2 y 3) Diagrama de cuerpo aislado

Figura 6.4

Diagrama de cuerpo aislado del péndulo visto de Tierra.



4) Aplicación del segundo y tercer principio de Newton

$\sum Fy = 0 \;\Rightarrow\; T\,cos\alpha - P = 0$

$\sum Fx = m\,A \;\Rightarrow\; T\,sen\alpha = m\,A \quad \Rightarrow \qquad T = \frac{mA}{sen\alpha}$

Remplazando $T = \frac{mA}{sen\alpha}$, obtenemos

$\frac{cos\alpha}{sen\alpha}\, m\,A = m\,g$

$\underline{tg\;\alpha = \frac{A}{g}}$

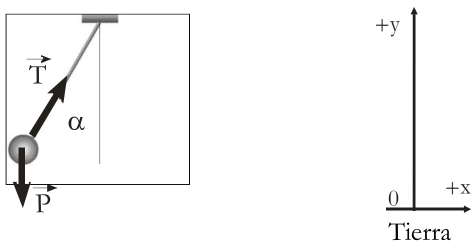
Si $A = 0$ el péndulo está en posición vertical a la Tierra.
Si $A = g$ el péndulo se inclina $45º$ con respecto a la vertical.

- Péndulo visto desde el tren

1, 2 y 3) Diagrama de cuerpo aislado.

Figura 6.5

Diagrama de cuerpo aislado del péndulo visto del vagón.



4) Aplicación del segundo y tercer principio de Newton

Visto por el observador que viaja dentro del vagón, el péndulo forma un ángulo α con la vertical, y está en reposo, por lo tanto:

$\sum Fy = 0 \;\Rightarrow\; Tcos\alpha - P = 0$

$\sum Fx = 0 \;\Rightarrow\; Tsen\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$\underline{\alpha = 0}$ ¡¡¡Sin embargo el péndulo está inclinado!!!

Conclusiones

- Los resultados para el paquete ($f_r \neq 0$ y $f_r = 0$), aunque contradictorios, proponen una reflexión.

- El resultado para el péndulo, $\alpha = 0$, muestra una incongruencia con lo observado: $\alpha > 0$. Si se pretende utilizar un sistema de referencia no inercial y aplicar los principios de Newton se debe necesariamente corregir el segundo principio de Newton para no incurrir en los errores que hemos encontrado al resolver el problema propuesto.

- Es necesario por lo tanto realizar un estudio teórico de como pasar de un sistema de referencia inercial a otro no inercial en mecánica.

6.1.1 SNI EN TRASLACIÓN PURA

En cinemática, se estudió como vincular observaciones para sistemas de referencia que se encontraban en traslación pura uno respecto del otro. La siguiente figura ilustra la situación y muestra los resultados obtenidos respecto de la aceleración de un móvil analizada desde los dos SR, (A: SI ; B: SNI)

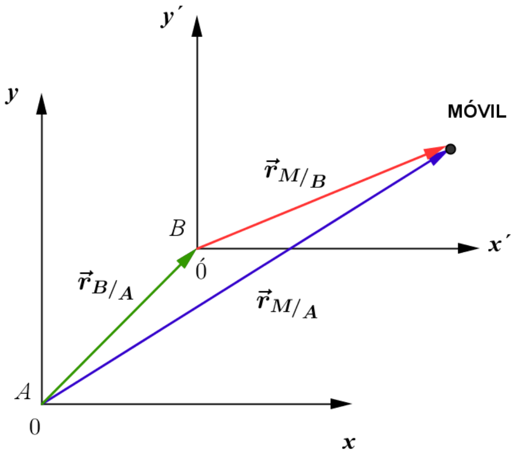


Figura 6.6

Un móvil visto desde dos SR en traslación pura.
A: SI
B: SNI

Los resultados obtenidos en cinemática para vincular aceleraciones medidas desde distintos sistemas de referencia, y adaptadas a la nomenclatura utilizada en el problema anterior, pueden resumirse de la siguiente manera:

$\vec{a}_{B/A} = \vec{A}$ = aceleración del SNI/SI
$\vec{a}_{M/B} = \vec{a}'$ = aceleración del móvil / SNI
$\vec{a}_{M/A} = \vec{a}$ = aceleración del móvil /SI

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}} \qquad (6.1)$$

Este resultado, ya estudiado en *Física: Cinemática*, es a veces mal denominado por la bibliografía: ley de suma de las aceleraciones. No se trata de ninguna ley, sino de vincular las observaciones realizadas desde un SR en movimiento de traslación pura respecto de otro.

El segundo principio de newton aplicado al móvil, visto desde el sistema de referencia A (SI) expresa matemáticamente:

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}' + \vec{A}) = m\vec{a}' + m\vec{A} \Rightarrow$

$$\sum \vec{F} - m\vec{A} = m\vec{a}' \qquad (6.2)$$

Al observar un objeto desde el sistema de referencia B (SNI), la aceleración medida será $\vec{a}'$. La ecuación 6.2 precisamente muestra en su segundo término el producto $m\vec{a}'$, que corresponde al segundo principio de Newton aplicado desde B (SNI).

Así esta última expresión indica claramente las modificaciones que debe ser realizada al aplicar los principios de Newton en un sistema de referencia no inercial:

> En un sistema no inercial aparte de considerar las fuerzas (que de ahora en adelante llamaremos reales) que están aplicadas al cuerpo, se debe adicionar un término que tiene en cuenta la aceleración del SNI respecto del SI, de valor $-m\vec{A}$.

Este término adicional, debe contemplarse en el miembro donde sumamos las fuerzas y tiene unidades de fuerza (Newton). Sin embargo no se trata de una fuerza pues no tiene reacción (no responde al tercer principio de Newton) ya que no resulta de la interacción entre cuerpos. Es el resultado matemático de vincular las aceleraciones medidas desde sistemas de referencia en traslación pura.

Por tener dimensiones de fuerza (Newton) y por encontrarse en el miembro donde se realiza la sumatoria de las mismas, se denomina *fuerza ficticia.* En otras palabras, para poder aplicar los principios de Newton en un sistema de referencia no inercial, debemos agregar las denominadas *fuerzas ficticias* que resultan de las aceleraciones que poseen estos sistemas que los convierten en no inerciales.

Agregar fuerzas, significa contemplarlas en los DCA y tratarlas como si realmente lo fueran, por más que no cumplan con el tercer principio de Newton.

De esta forma, la generalización para el segundo principio a los efectos de poder aplicarlo en SNI en traslación pura es la siguiente:

$\sum \vec{F}_{reales} + \vec{F}_{ficticias} = \sum \vec{F}_{reales} + \vec{f}^{*} = m\vec{a}'$ donde

$$\boxed{\vec{F}_{ficticias} = \vec{f}^{*} = -\,m\,\vec{A}} \qquad (6.3)$$

Conclusiones

- $\vec{f}^{*}$ simboliza a las *fuerzas ficticias,* así denominadas porque no cumplen con el principio de acción y reacción. Si bien $-m\,\vec{A}$ tiene unidades de fuerza, no es una fuerza real, ya que nadie la aplica. Se utiliza para su identificación un asterisco (*) de modo de diferenciarla de las fuerzas que hemos denominado reales que cumplen con el tercer principio de Newton.

- La *fuerza ficticia*, al igual que el peso, se aplica en el centro de gravedad del cuerpo.

- Es muy común que el alumno incurra en el siguiente error debido al signo menos que aparece en la expresión matemática para las fuerzas ficticias:

Una vez realizado el DCA, las fuerzas ficticias que hubiera son identificadas en el mismo como contrarias a las aceleraciones que le dan lugar. Por lo tanto, al aplicar el segundo principio de Newton para sumar las fuerzas, no debe tenerse en cuenta el signo negativo de la expresión 6.3, ya que el mismo ya fue tenido en cuenta al realizar el DCA.

- **Problema 6.1**

Luego de este análisis teórico a los efectos de estudiar y resolver la problemática de la aplicación de los principios de Newton en SNI, retomamos el problema 6.1 planteado para introducir el tema.

El aplicar estas modificaciones al ejemplo del paquete y del péndulo impone agregar la fuerza ficticia que resulta de la aceleración del vagón respecto de Tierra. La misma se debe tener en cuenta en los DCA correspondientes y considerada al aplicar el segundo principio de Newton como si se tratara de una fuerza más.

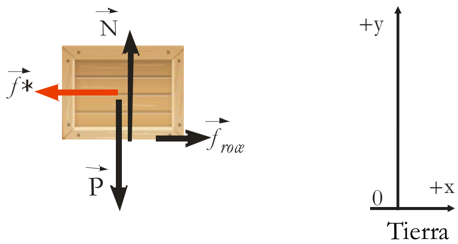
Analizaremos a continuación las dos situaciones pero teniendo en cuenta la fuerza ficticia, tanto para el paquete como para el péndulo.

➢ Paquete

1, 2 y 3) Diagrama de cuerpo aislado para el paquete, visto desde el vagón (SNI)

Figura 6.7

Diagrama de cuerpo aislado del paquete visto del vagón.



Vemos que al agregar la fuerza ficticia, necesariamente surge la necesidad de que exista rozamiento para que el paquete se encuentre en reposo, según lo ve el observador dentro del vagón.

4) Aplicación del segundo y tercer principio de Newton

$$\sum \vec{F}_{reales} + \vec{f}^{*} = 0$$

$$\sum F_x = -f^{*} + f_{roce} = 0$$

$$\sum F_y = -P + N = 0$$

$$|\vec{f}^{*}| = m|\vec{A}| = m\,A \quad \Rightarrow \quad \underline{f_{roce} = m\,A}$$

Conclusión

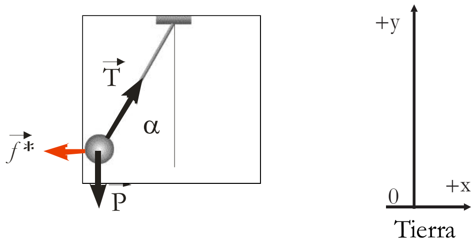
- Se obtiene el mismo resultado que cuando se analizó el problema desde Tierra. Hay fuerza de rozamiento, pues es la que le comunica al cuerpo depositado sobre la mesa la aceleración del vagón, de la misma forma que el alumno que viaja dentro del vagón tiene sobre sus pies aplicada una fuerza de rozamiento que le permite acelerar y permanecer en reposo dentro del vagón.

➢ Péndulo

1, 2 y 3) Diagrama de cuerpo aislado para el péndulo

Figura 6.8

Diagrama de cuerpo aislado del péndulo visto del vagón.



4) Aplicación del segundo y tercer principio de Newton

$\sum \vec{F}_{reales} + \vec{f}^* = 0$

$\sum Fy = 0 \quad \Rightarrow \quad Tcos\alpha - P = 0 \Rightarrow -mg + Tcos\alpha = 0$

$\sum Fx = 0 \Rightarrow -f^* + Tsen\alpha = 0 \quad \Rightarrow -mA + Tsen\alpha = 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{tg\ \alpha = \frac{A}{g}}$$

Conclusión

- Ahora sí, para el observador no inercial tiene sentido observar que el péndulo adopte un ángulo α de inclinación de equilibrio y no permanezca vertical. La fuerza ficticia que se ha agregado al DCA explica la inclinación que sufre el péndulo visto desde un SNI.

Hay total libertad en la elección de un sistema de referencia al momento de resolver cualquier problema. Lo importante es tener en cuenta que en los SNI se deben agregar las fuerzas ficticias que surgen de la aceleración de estos.

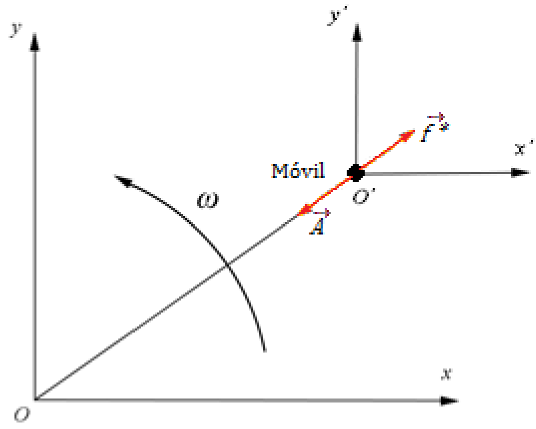
6.2 SNI EN MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

¿Qué sucede cuando el SNI rota respecto de un sistema inercial con ω constante, en un MCU?

En Figura 6.9 se muestra a un cuerpo que rota con velocidad angular ω visto desde un SR fijo en Tierra $(x\,,y)$ (SI) y un SR (x',y') (SNI) montado sobre el propio cuerpo, o sea que rota con la misma velocidad angular ω que rota el objeto.

Figura 6.9

Sistema de coordenadas (x', y') *en rotación respecto del* (x, y).



En este caso $\vec{A}$, (ver ecuación 6.1) la aceleración del SNI respecto del SI es la aceleración centrípeta. Así, la fuerza ficticia que debe ser agregada al cuerpo para poder analizar la dinámica de su movimiento desde el sistema de referencia en rotación, es una fuerza que tiene sentido opuesto a la aceleración centrípeta, y que se denominada fuerza centrífuga (pues apunta hacia fuera del centro (se fuga del centro)).

$$\boxed{\vec{f}^* = -m\,\vec{A} = -m\,\vec{a}_{centripeta} = \text{fuerza centrífuga}}$$

Observaciones

- En un sistema de referencia en rotación pura (uniforme) debe agregarse una fuerza ficticia como resultado de la aceleración centrípeta que posee este sistema.

- Todos de alguna manera hemos "sentido" en un sistema rotante, la acción de esta fuerza ficticia que nos tira hacia afuera. Sin embargo no debemos equivocarnos: es un resultado matemático, no real, producto de una aceleración. La fuerza centrífuga no existe como tal, lo que sí existe es la aceleración centrípeta.

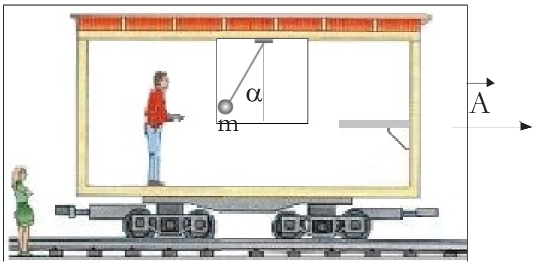
Ilustraremos un poco más el estudio del movimiento desde sistemas de referencia no inerciales, pues en general presentan dificultades al momento de interpretar resultados. El siguiente problema servirá de ejemplo, de cómo muchas veces es más conveniente y sencillo ver el movimiento de un objeto desde un SNI que desde un SI.

Problema 6.2

Retornemos nuevamente al tren acelerado con el péndulo. Imaginemos que en un cierto instante se corta el hilo del péndulo.

a) ¿Cómo se ve desde tierra el movimiento de la masa m una vez que se corte el hilo?

b) ¿Cómo se ve desde el vagón el movimiento de la masa m (como ve el pasajero el movimiento)?

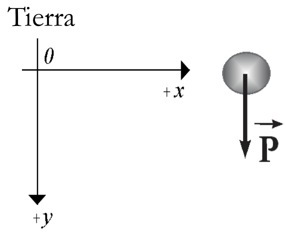


a) Visto de Tierra

1, 2 y 3) Diagrama de cuerpo aislado del péndulo

Figura 6.10

DCA del péndulo cayendo, visto de Tierra.



4) Aplicación del segundo y tercer principio de Newton, y posibles formulaciones para fuerzas

$\sum Fx = m\,a_x = 0 \;\Rightarrow\; a_x = 0$

$\sum Fy = P = \; m\,a_y$

$\Rightarrow\; m\,g \; = m\,a_y \;\Rightarrow\; g \; = a_y$

9) Planteo cinemático del problema: obtención de las ecuaciones de movimiento si fuera requerido

Las ecuaciones de movimiento pueden escribirse a partir de las siguientes condiciones iniciales:

$$\text{CI} \begin{cases} \vec{v}_0 = (v_{0x}, 0)\;;\; v_{0x} = \; v_0 \quad \text{(velocidad del vagón en el instante en que se corta el hilo)} \\ \vec{r}_0 = (0,0) \end{cases}$$

$a_{péndulo} = (0, g)$

$x(t) = v_0\, t$

$y(t) = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow$ Trayectoria $\quad \underline{y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2}}$ (Ecuación de una parábola)

El observador en Tierra, ve como trayectoria una parábola, el cuerpo cae con la aceleración de la gravedad y parte con una cierta velocidad inicial v_0, que es la que tiene el cuerpo (y el vagón) al momento de cortarse el hilo (figura 6.12).

b) Visto desde el vagón

1, 2 y 3) Diagrama de cuerpo aislado del péndulo

Tren

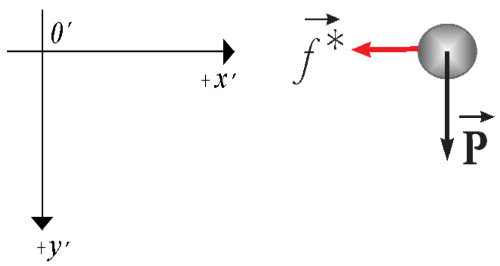


Figura 6.11

DCA del péndulo cayendo, visto del vagón.

4) Aplicación del segundo y tercer principio de Newton, y posibles formulaciones para fuerzas

$\sum Fx = ma_x \Rightarrow -mA = ma_x \Rightarrow -A = a_x$

$\sum Fy = P = ma_y \Rightarrow mg = ma_y \Rightarrow g = a_y$

$|\vec{P}| = mg$

$|\vec{f}^*| = mA$

9) Planteo cinemático del problema: obtención de las ecuaciones de movimiento si fuera requerido

Las ecuaciones de movimiento son, de acuerdo con las siguientes condiciones iniciales:

$$\text{CI} \begin{cases} \vec{v}_0 = (0, 0) \\ \vec{r}_0 = (0, 0) \end{cases}$$

La aceleración del péndulo vista del vagón $\vec{a}' = (-A,\ g)$, de donde resultan con las condiciones iniciales las siguientes ecuaciones de movimiento:

$x'(t) = -\frac{1}{2} A\, t^2 \Rightarrow$ despejando t^2 para encontrar la ecuación de la trayectoria $t^2 = -2\, x'/A$

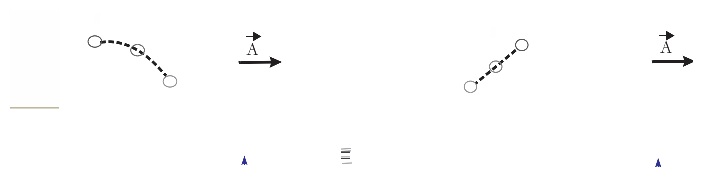
$y'(t) = \dfrac{1}{2}\, g\, t^2$

$y'(x') = \frac{1}{2} g\, (-2\, x'/A) \quad \Rightarrow \quad \underline{y' = -\dfrac{gx'}{A}}$ (Ecuación de una recta)

El observador, dentro del vagón ve a la masa m caer en una trayectoria rectilínea inclinada. La Figura 6.12 ilustra los dos resultados.

Figura 6.12

Trayectorias del problema 6.2:
a) Vista por un observador en Tierra
b) Vista por un observador en el tren



a) *b)*

Conclusiones

- Son muy diferentes los resultados de un problema analizado desde distintos sistemas de referencia.

- Muchas veces es más sencillo plantear un problema desde un SNI, sin embargo, se debe tener presente que deben ser interpretados los resultados desde el formalismo matemático dejando de lado la intuición, a pesar que resulten inverosímiles.

- Nunca debemos olvidar la diferencia entre *entender* y *conocer*. Con la Mecánica Clásica se puede *conocer* el movimiento, sin embargo, tal vez no se logre entender. El *entender* tiene que ver con los sentidos, y no con la ciencia.

6.3 LA RELATIVIDAD GENERAL

Queda aún un punto por aclarar. Una de las cuestiones fundamentales que no ha sido resuelta es: ¿existe un sistema de referencia inercial?

El principio de inercia marca, en realidad, el verdadero comienzo de la física. Fue atesorado durante siglos y surge de haber imaginado la experiencia ideal de un cuerpo en un movimiento perpetuo, sin rozamiento ni bajo la acción de fuerza exterior. Con este ejemplo se ha podido aquilatar la importancia que en la elaboración de principios científicos representa el poder valerse de una experiencia ideal, no reproducible en ningún laboratorio.

Serán introducidos y discutidos a continuación una serie de experimentos ideales, que aunque puedan parecer demasiado fantásticos, ayudarán a comprender todo lo que se pueda la teoría de la relatividad, con las limitaciones por su puesto de los métodos simples que utilizaremos.

6.3.1 FENÓMENO DE INGRAVIDEZ

Empezaremos analizando un fenómeno muy común, que es el de ausencia de gravedad: ingravidez. Los siguientes problemas permitirán introducirnos en un mundo sin gravedad, lo que posibilitará al fin de cuentas tener una visión más profunda de la misma, con sus implicancias y sus limitaciones dentro de la Mecánica Clásica.

Imaginemos que nos encontramos en un ascensor en un edificio muy alto y que realizamos una serie de experiencias dentro de la cabina en el momento en que se corta el cable que la sujeta. Lo que se pretende es describir que ve un observador interior (habitantes de la cabina) y que ve un observador en Tierra. Los siguientes problemas estudian distintas experiencias que se realizan durante la caída de la cabina.

Problema 6.3

Uno de los habitantes de la cabina saca del bolsillo un reloj y un pañuelo y los suelta ¿Qué ve el observador interior y que ve el observador en tierra?

Para responder a las preguntas formuladas, haremos un DCA de los objetos (pañuelo y reloj) vistos desde Tierra (SI) y desde la cabina del ascensor (SNI).

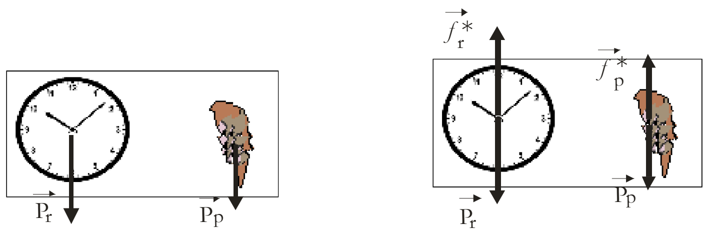


Figura 6.13

DCA del pañuelo y del reloj, a) visto desde Tierra, b) desde la cabina del ascensor

a)

b)

$$\left|\vec{f}_r^{\,*}\right| = m_{reloj}\ g$$

$$\left|\vec{f}_p^{\,*}\right| = m_{pañuelo}\ g$$

Observar que en el DCA de la figura 6.13, correspondiente al SNI, se ha agregado la correspondiente *fuerza ficticia*, cuyo módulo es mg debido a que la cabina del ascensor cae con aceleración $\vec{g}$ respecto de Tierra.

De los DCA podemos razonar de la siguiente manera en respuesta a las consignas planteadas:

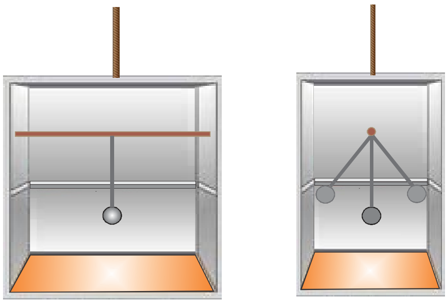
a) *Observador exterior:* ve que la cabina, los habitantes, el pañuelo y el reloj caen con la aceleración de la gravedad (imaginemos que la cabina del ascensor es vidriada de modo que se puede apreciar desde afuera lo que sucede en su interior). Recordemos que la aceleración de cualquier objeto dejado en libertad en las cercanías de la superficie de la Tierra es $\vec{g}$ e independiente de la masa del objeto debido a la igualdad entre la masa gravitatoria y la inercial.

b) *Observador interior:* ve que el pañuelo y el reloj están en reposo, como si no pesaran. Los habitantes de la cabina razonan de la siguiente forma: los dos cuerpos están en reposo ya que sobre ellos no actúa fuerza alguna. Si uno de los habitantes empujara el reloj o el pañuelo en cualquier dirección (para arriba o para abajo, por ejemplo), este adquiriría cierta velocidad que conservaría luego de aplicado el empujón, describiendo un MRU hasta alcanzar el techo, el piso, o alguna de las paredes de la cabina. Digamos, por ahora, que es curioso este razonamiento y que realmente lleva a pensar en que tal vez para los habitantes se comporta como un planeta que no tiene gravedad ya que todo objeto dejado en libertad (como el pañuelo o el reloj) permanece en reposo, a menos que actúen causas (fuerzas) que modifiquen dicho estado.

Avancemos más en nuestro análisis, y realicemos una nueva experiencia dentro de la cabina de nuestro ascensor en caída libre.

Problema 6.4

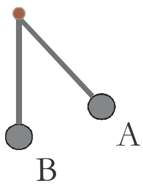
Imaginemos que la cabina está atravesada por un barral de pared a pared, que visto de frente y de perfil es como se indica en la figura. Además, del barral cuelga un péndulo.



Supongamos que antes de que se corte el cable, el péndulo suspendido del barral se encontraba oscilando. La siguiente figura muestra dos puntos de la trayectoria del péndulo en oscilación con la cabina aún sujeta a su cable: el punto A corresponde con en el máximo apartamiento y en el punto B a su paso por la posición de equilibrio.

Describir el movimiento del péndulo visto de la cabina cuando se corta el cable del ascensor. Analizarlo en los siguientes dos casos correspondientes al instante en que se corta el cable que sujeta la cabina:

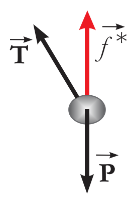
a) Cuando el péndulo se encontraba en la posición A
b) Cuando el péndulo se encontraba en la posición B



Para responder a las cuestiones planteadas, realizamos el correspondiente DCA en la figura 6.14 visto de la cabina del ascensor, que es independiente del instante donde se corte el hilo, que en definitiva representa una CI para el posterior movimiento de péndulo.

Figura 6.14

DCA de la masa del péndulo para un observador dentro de la cabina del ascensor en caída libre.



$$|\vec{f}^*| = |\vec{P}| = m\,g$$

Observar que se ha agregado la fuerza ficticia que resulta de la aceleración que posee la cabina del ascensor que se encuentra en caída libre.

Analicemos las consignas en función del DCA:

a) Si el cable de sujeción se corta cuando el péndulo pasa por el punto A, podemos en función de las leyes de la mecánica y los conocimientos de cinemática que poseemos predecir para el movimiento del péndulo lo siguiente:

Sobre la masa de nuestro péndulo (ver DCA de Figura 6.14), el peso se contrarresta con la fuerza ficticia que hemos tenido que agregar debido a que la cabina del ascensor es un SNI. En el punto A, la masa está en reposo, por la tanto, en el momento del corte y de acuerdo con el DCA, deberá permanecer en reposo. Si recordamos el problema anterior (el del reloj y el del pañuelo), la situación es muy parecida. La tensión del hilo, por tanto, en esta situación será nula, y la masa permanecerá en reposo para un habitante del ascensor, con $\vec{T} = 0$.

b) Si el corte se produce en el punto B, la masa al momento del corte tiene velocidad distinta de cero. O sea, el corte se produce con una condición inicial diferente que el inciso a) debido a que la masa posee velocidad. Como el DCA al momento del corte anula el peso de la masa debido a la fuerza ficticia (recordar nuestra conclusión de que la cabina se comportaba como un planeta sin gravedad), podemos razonar:

El hilo, debido a la velocidad de la masa, le aplica una fuerza (se tensiona) obligándola a seguir un movimiento circular. Pero como la única fuerza que actúa es la del hilo, que es perpendicular en todo momento a la velocidad, el movimiento que describirá la masa será un movimiento circular y uniforme (MCU), y la tensión de la cuerda será:

$$T = m\, a_c = m\, \frac{{v_B}^2}{R}$$

Conclusiones

- Las experiencias en nuestro ascensor acelerado han permitiendo avanzar en lo que entendemos por un SNI, sus consecuencias y de alguna forma también el ya no creer que verdaderamente existe un SI como lo impone la Mecánica Clásica.

- Volvamos a la experiencia del problema 6.3: la cabina, los habitantes, el pañuelo y el reloj en caída libre. Imaginemos que el habitante que soltó el pañuelo y el reloj los empuja con su dedo lateralmente. Los habitantes del ascensor que nacieron y se criaron dentro del ascensor dicen poseer un sistema de referencia inercial, en donde no existe el peso y los objetos dejados en reposo, permanecen en reposo y colocados en un MRU, conservan un MRU. Interesante razonamiento, ¿no le parece?

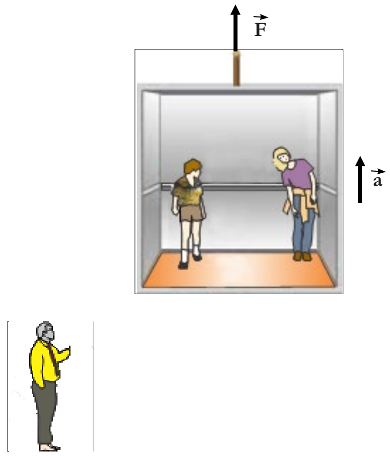
- El observador exterior sin embargo dice: ¡no!, se trata de un sistema acelerado, todo cae con aceleración $\vec{g}$.

Es imposible solucionar esta problemática de quien tiene razón, por lo cual seguiremos ahondando en nuestro estudio con el siguiente problema.

Problema 6.5

Variante 1 de la experiencia

Imaginemos la siguiente situación: Un universo que está formado únicamente por el ascensor y sus habitantes. No hay planetas ni otros cuerpos. En esta condición, a la cabina del ascensor se le aplica una fuerza $\vec{F}$ como indica la figura. Bajo estas premisas: ¿qué nos dice nuestro observador exterior que posee un sistema de referencia absoluto (fijo) en el espacio exterior y que dicen los habitantes del ascensor?



Observador exterior (razona con sus conocimientos de Mecánica Clásica, y convencido de poseer un SI de referencia):

"La cabina y los habitantes están acelerados y se mueven con aceleración constante debido a la acción de $\vec{F}$".

El observador exterior no tiene dudas al respecto, pues puede ver la fuerza aplicada y a todo el conjunto moverse aceleradamente respecto de su sistema de referencia".

Observador interior (nacido y criado dentro de la cabina del ascensor):

"No veo razón por la cual la cabina de nuestro ascensor tenga un movimiento absoluto acelerado, como manifiesta el observador exterior. Los objetos cuando los soltamos caen al piso con aceleración $\vec{a}$. Para nosotros, que hemos nacido y habitado dentro de esta cabina, existe un campo gravitatorio en todo su interior, con aceleración de la gravedad de valor $\vec{a}$".

En otras palabras, los habitantes de la cabina están convencidos de habitar dentro de un campo gravitatorio, al igual que en cualquier planeta.

Conclusiones

- Hay dos razonamientos coherentes:
    - ✓ Movimiento acelerado absoluto y ausencia de gravedad.
    - ✓ Reposo y presencia de gravedad.
- Es el momento de preguntarnos: ¿la gravedad de nuestro planeta Tierra, es debido a su masa o no será acaso que estamos en un gran ascensor que acelera la Tierra con aceleración $\vec{g}$?

▪ Nuevamente vemos que es imposible conciliar los razonamientos, y aparentemente esto tiene que ver con la imposibilidad de definir realmente que entendemos por un sistema de referencia inercial.

Variante 2 de la experiencia

Imaginemos la siguiente variante para esta misma experiencia. Supongamos que el ascensor tiene ventanas laterales y un rayo de luz entra por una de las ventanas y sale por la otra ¿Qué ve el observador exterior y que ven los habitantes del ascensor cuando el rayo de luz atraviesa la cabina?

Observador exterior:

"Veo al rayo que en forma rectilínea atraviesa de una lado a otro la cabina del ascensor. Esto reafirma que estoy en lo cierto, la luz es imponderable (no tiene masa) y por lo tanto no se desvía en el utópico campo gravitatorio que dicen tener los observadores interiores dentro del ascensor".

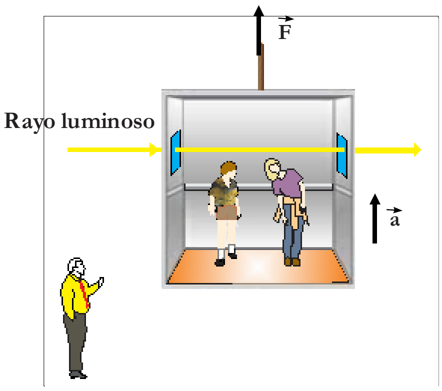


Figura 6.15

Trayectoria rectilínea del rayo luminoso visto por el observador exterior.

Observador interior:

"El rayo entra por una ventana y sale por la otra pero en distinto punto respecto del de su ingreso".

Para los habitantes del interior el rayo se curva, como indica la figura 6.16.

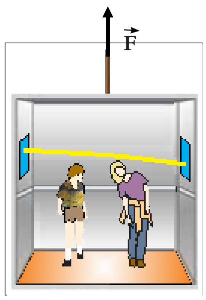


Figura 6.16

Curvatura del rayo luminoso visto por el observador interior.

Esto demuestra que el haz luminoso no es imponderable, tiene masa y se curva en presencia de un "campo gravitatorio".

El campo gravitatorio terrestre es, naturalmente, demasiado pequeño para que la curvatura que adquieren los rayos luminosos en él pueda ser demostrada directamente por una experiencia. En cambio, las famosas investigaciones realizadas durante los eclipses solares prueban de modo concluyente, aunque indirecto, la influencia de un campo gravitatorio sobre la trayectoria de un rayo de luz.

Conclusión final

"*Del análisis que hemos hecho de lo que ocurre en el ascensor de nuestro ejemplo, se ve la posibilidad de edificar una física nueva, relativista, eliminando por completo los fantasmas clásicos del movimiento absoluto y de los SRI. Nuestros experimentos idealizados muestran cuán íntimamente relacionados entre sí están la teoría general de la relatividad y el problema de la gravitación universal y por qué la equivalencia entre las masas inercial y gravitatoria juega un papel esencial en esta relación. Es claro que la solución del problema de la gravitación proporcionada por la teoría general de la relatividad ha de ser diferente de la de Newton. Las leyes de la gravitación deben ser formuladas para todos los SR posibles, como todas las leyes naturales, mientras que las leyes de la mecánica clásica de Newton se cumplen únicamente en los SRI.*"

(Einstein/Infeld, "La física, un aventura del pensamiento" Losada 2002, pp 179).

PROBLEMAS SELECCIONADOS

1. Una masa de 4 kg se lanza sobre una superficie horizontal que le proporciona una fuerza contraria al desplazamiento de 12 N. ¿Qué distancia recorre la masa hasta detenerse si inicialmente tenía una velocidad de magnitud 5 m/s?
Rta: $\boldsymbol{4,17\ m}$

2. Se aplican los frenos en un automóvil y comienza a frenar a $25\ m$ de distancia de un obstáculo que hay en la carretera. La fuerza de rozamiento que ejercen las zapatas de los frenos del automóvil es constante e igual a $4608\ N$. Si el automóvil tiene una masa de 1.200 kg ¿cuál es la máxima velocidad que puede llevar, en el momento de accionar los frenos, para no chocar con el obstáculo?
Rta: $\boldsymbol{v_0 = 13,85 \frac{m}{s}}$

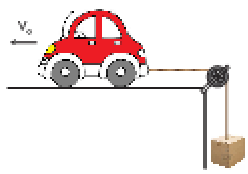
3. Un auto se pone en marcha con una aceleración constante de magnitud $1\ m/s^2$. Al cabo de $6\ s$ de haber comenzado el movimiento, se desconecta el motor y sigue avanzando hasta detenerse, con aceleración constante y distinta de la anterior. Durante todo el trayecto $\mu_c = 0{,}05$. Calcular: a) La magnitud de su velocidad máxima. b) La magnitud de la aceleración una vez desconectado el motor. c) El tiempo total que estuvo en movimiento. d) La distancia total recorrida.
Rta: $\boldsymbol{a)\ 6\frac{m}{s};\ b) - 0,5\frac{m}{s^2};\ c)\ 18\ s;\ d)\ 54\ m}$

4. Un hombre de $80\ kg$ de masa se encuentra en la cabina de un ascensor de $3\ m$ de altura. a) Calcular la fuerza que soportará el piso del mismo cuando: i) asciende con aceleración constante de $2\ m/s^2$. ii) desciende con la misma aceleración anterior. iii) baja a velocidad constante igual a $2\ m/s$. b) Cuando el ascensor se encuentra a $15\ m$ del suelo y asciende con aceleración constante de $2\ m/s^2$, se desprende la lámpara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en chocar con el suelo del ascensor.
Considere: $g = 9{,}8\ m/s^2$.
Rta: $\boldsymbol{a)\ i)\ 944\ N, ii)\ 624\ N, iii)\ 784\ N; b)\ 0,71\ s}$

5. Una esfera de $10\ g$ cae libremente partiendo del reposo, sin rozamiento, bajo la acción de la gravedad. Cuando alcanza una velocidad de $10\ m/s$ comienza a actuar una fuerza, constante hacia arriba, que consigue detener la esfera en $5\ s$. a) ¿Cuánto vale esta fuerza? b) ¿Cuál fue el tiempo total transcurrido en estas dos etapas? Dato: $g = 10\ m/s^2$.
Rta: $\boldsymbol{a)\ 0,12\ N; b)\ 6\ s}$

6. Un globo de masa M comenzó a descender con una aceleración constante e igual a a_0. Determinar la masa de lastre que es necesario tirar por la borda, para que el globo ascienda con la misma aceleración.
Rta: $\boldsymbol{m = \frac{2Ma_0}{g+a_0}}$

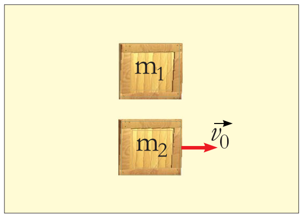
7. Un autito de masa $M = 600\ g$ está unido a una carga de masa $m = 100\ g$ mediante una cuerda. En el momento inicial, el autito tenía una velocidad $v_0 = 3{,}5\ m/s$ y se movía a la izquierda por un plano horizontal. Determinar el valor y sentido de la velocidad del autito, el lugar donde se encontrará y el trayecto que recorrerá después de transcurrir $t = 5\ s$.



Rta: $\boldsymbol{v = -3,5\ m/s}$**. Se vuelve a encontrar en el mismo sitio y con el mismo módulo de velocidad pero en sentido opuesto. El espacio total es** $\boldsymbol{8,75\ m}$**.**

8. Dos bloques A y B se hallan en contacto sobre un plano horizontal. Los coeficientes de rozamiento entre cada bloque y el plano son 0,1 y 0,2 respectivamente. Una fuerza constante se aplica sobre el bloque A formando un ángulo de 30° con la horizontal de modo que comprime el bloque A y arrastra ambos bloques con una aceleración de $0{,}3\ m/s^2$. Si la masa A es de $10\ kg$ y la B $5\ kg$, determinar: a) la intensidad de la fuerza aplicada, b) el valor de la fuerza de contacto entre los bloques.
Rta: $\boldsymbol{a)\ 29,53\ N; b)\ 11,30\ N}$

9. Consideremos las dos masas m_1 y m_2 de la Figura. En el instante $t = 0$, m_1 está en reposo y la m_2 se mueve con velocidad v_0. ¿Es posible aplicar la misma fuerza constante (en módulo y dirección) durante el mismo tiempo para llevarlas a una misma velocidad en un instante dado? Intente resolver este problema mediante un razonamiento cualitativo y luego compruebe las conclusiones escribiendo las ecuaciones necesarias.



Considérense todos los casos: $m_1 < m_2$, $m_1 = m_2$ y $m_1 > m_2$.

Rta: Tomamos un sistema de referencia unidimensional en la dirección horizontal para asegurar que las velocidades sean iguales en modulo dirección y sentido. Sistema de referencia positivo en la dirección de v_o. Al plantear la situación en general obtenemos el tiempo que tarde ambas masas en alcanzar la misma velocidad $t = v_o / \left(\frac{F_1}{m_1} - \frac{F_2}{m_2}\right)$ donde F_1 y F_2 son las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo. Para cubrir todos las posibilidades donde actúen fuerzas con el mismo modulo y dirección, tomaremos cuatro casos

Caso I	$F_1 = F_2 = F$	**Si es posible cuando** $m_1 < m_2$
Caso II	$F_1 = -F$ y $F_2 = F$	**Nunca va a ser posible**
Caso III	$F_1 = F$ y $F_2 = -F$	**Se cumple siempre**
Caso IV	$F_1 = F_2 = -F$	**Si se cumple cuando** $m_1 > m_2$

10. Imagine que se acelera un cuerpo con una fuerza constante, de tal modo que la variación de velocidad durante un intervalo de tiempo Δt de $1\ s$ es de $2{,}4\ m/s$. En una segunda medida, utilizando la misma fuerza sobre otro objeto, resulta que la variación de velocidad es de $3{,}3\ m/s$ en $0{,}5\ s$. a) ¿Cuál de los dos cuerpos tiene una masa inercial mayor? b) ¿Qué relación existe entre la masa inercial del segundo cuerpo y la del primero?

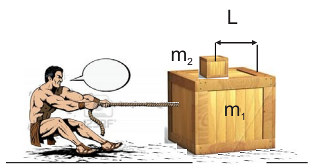
Rta: a) $m_1 > m_2$ b) $\frac{m_1}{m_2} = 2.75$

11. Dentro de un autobús en marcha a lo largo de una carretera horizontal y rectilínea lanzamos sobre el suelo una bolita que le cruza de un lado a otro. Observamos que la trayectoria es una recta con respecto al autobús. Posteriormente lanzamos otra vez la bola y vemos que la trayectoria es una parábola cóncava hacia la parte delantera del autobús. Describa el movimiento del autobús en cada uno de los casos.

Rta: Un MRU en el primer caso y un MRUV desacelerado en el segundo.

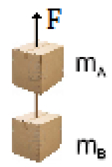
Rta: $a)\ m_{Bmáx} = 2{,}28\ kg;\ m_{Bmín} = 1{,}32\ kg;$ $\quad b)\ T_{Amáx} = 22{,}34\ N, T_{Bmáx} = 12{,}93\ N$

12. En el instante $t = 0$ un joven comienza a arrastrar al bloque de masa m_1 de la figura realizando una fuerza horizontal de valor T. Entre la masa m_1 y el suelo horizontal el coeficiente de rozamiento es μ. Al cabo de un tiempo t_c el bloque m_2 que se mueve con rozamiento sobre m_1 recorre la distancia L y cae al suelo. Calcular: a) El mínimo valor del coeficiente de roce estático entre m_1 y m_2 para que m_2 no se mueva respecto de m_1. b) El valor del coeficiente dinámico entre m_1 y m_2.



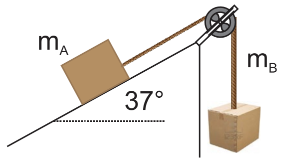
Rta: $a)\ \mu_{emín} = \frac{T}{g(m_1+m_2)} - \mu\ ;\ b)\ \mu' = \frac{1}{g(1+\frac{M_2}{M_1})}\left(\frac{T}{M_1} - \frac{2L}{t_c^2}\right) - \mu$

13. Dos bloques A y B de masa $m_A = 14\ kg$ y $m_B = 10\ kg$, están unidos por una cuerda cuya masa total es $8\ kg$. Si se aplica una fuerza vertical F de módulo $480\ N$, calcular la aceleración: a) del sistema, b) en los extremos superior e inferior de la cuerda.



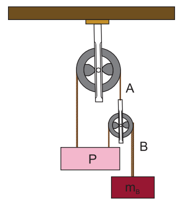
Rta: $a)\ a = 15\frac{m}{s^2}\ ;\ b)\ T_A = 270\ N\ , T_B = 150\ N$

14. La figura muestra un plano inclinado rugoso que forma un ángulo de $37°$ con la horizontal y dos bloques A y B en reposo, unidos por una cuerda inextensible y masa despreciable. Si la masa del cuerpo a es $m_A = 3\,kg$ y el coeficiente de roce estático es $\mu_C = 0{,}2$, determinar: a) Los valores máximos y mínimos de m_B compatibles con el equilibrio. b) El valor de la tensión de la cuerda en los casos anteriores.

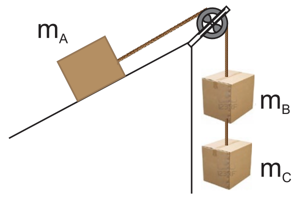


Rta: $\boldsymbol{a)\ m_{Bmáx} = 2,28\ kg;\ m_{Bmín} = 1,32\ kg;\qquad b)\ T_{Amáx} = 22,34\ N, T_{Bmáx} = 12,93\ N}$

15. La placa P de la figura pesa $90\ N$ y está sostenida por el sistema de cables y poleas ideales de la figura (sin masa y sin roce). Si la placa está en equilibrio en forma horizontal, determinar:
a) La tensión en el cable que pasa por la polea A.
b) El valor de la masa que cuelga del cable B.
Rta: $\boldsymbol{a)\ 60\ N, b)\ 3,06\ kg}$



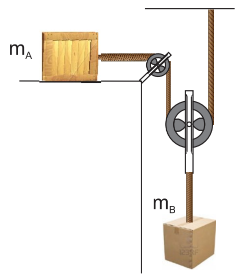
16. Tres cuerpos de masas $m_A = 3\,kg$, $m_B = 2\,kg$ y $m_C = 1\,kg$ se encuentran en reposo como indica la figura, de tal forma que cualquier pequeña perturbación haría que el cuerpo A subiera por el plano. Las cuerdas que unen los cuerpos son inextensibles y de masa despreciable. a) Realizar el diagrama de fuerzas que actúan sobre m_A. b) Calcular el coeficiente de roce estático entre m_A y la superficie. c) Determinar las tensiones en las cuerdas.



Rta: $\boldsymbol{b)\ \mu_s = \frac{(1 - sen\,\alpha)}{\cos\alpha};\ c)\ T_A = 30\ N, T_B = 10\ N}$

17. Un cuerpo de masa $m = 1\,kg$ es empujado por una fuerza horizontal F de módulo $15\ N$, desde el pie de un plano inclinado que forma un ángulo de $37°$ con la horizontal y cuyo coeficiente de roce cinético con la masa es de $0{,}2$. Si la fuerza F actúa sólo durante $3\ s$, calcular: a) la distancia que alcanza a subir por el plano y b) el tiempo que tarda en regresar a la base del plano.
Rta: $\boldsymbol{a)\ 15,39\ m\ ;\ b)\ t = 6,93\ s}$

18. Un bloque de masa m_B desciende unido a una polea ideal. Uno de los extremos de la cuerda ideal que pasa por la polea se encuentra sujeto al techo mientras que el otro se halla sujeto a otra masa m_A por medio de otra polea también ideal. La masa m_A apoya sobre una superficie con rozamiento (coeficiente de roce dinámico μ_d). Calcular, si el sistema inicialmente está en reposo: a) la aceleración de ambos bloques, b) la velocidad de los bloques en función del tiempo, c) la distancia que se han desplazado los bloques al cabo de un tiempo t.



Rta: $\boldsymbol{a)\ a_A = \frac{2(-m_B g + 2\mu_d m_A g)}{4m_A + m_B} = -2a_B\ ;\ b)\ v_A = a_A t\ , v_B = a_B t\ ; c)\ x_A = \frac{1}{2} a_A t^2,\ y_A = \frac{1}{2} a_B t^2}$

19. Una masa de $\boldsymbol{4\ kg}$ se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamiento, con una velocidad de $\boldsymbol{3\ m/s}$, comienza a comprimir un muelle elástico de masa despreciable y de constante recuperadora $\boldsymbol{900\ N/m}$. Determinar: a) la comprensión máxima del muelle; b) velocidad de la masa cuando el muelle se ha comprimido $\boldsymbol{10\ cm}$.
Rta: $\boldsymbol{a)\ A = 0,2\ m;\ b)\ v = 2,6\ m/s}$

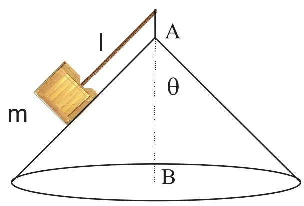
20. Un coche de masa m describe una trayectoria circular de radio R a velocidad constante v. El coeficiente de rozamiento con el suelo tiene un valor μ_e. a) Calcular la velocidad máxima que puede llevar el coche para que no patine. b) Suponga ahora que el coche se mueve por una curva peraltada un ángulo α respecto de la horizontal, obtenga la velocidad máxima.

Rta: $a)\ v = \sqrt{\mu_e\, g\, R}\ ;\ b)\ v = \sqrt{\frac{g\, R(sen\alpha + \mu_e . cos\alpha)}{(cos\alpha - \mu_e . sen\alpha)}}$

21. Un piloto de 833 N de peso realiza con su avión un giro completo vertical de 100 m de radio. Calcular la velocidad del avión en el punto más alto y en el punto más bajo del círculo, sabiendo que en el punto más alto de la trayectoria el piloto experimenta una pérdida aparente de peso de 49 N y en el punto más bajo su peso aparente es de 2940 N.
Rta: $\boldsymbol{a)\ v_a = 43,61\ m/s;\ b)\ v_b = 49,79\ m/s}$

22. Una partícula da vueltas por el interior de un aro liso vertical de radio R, sometida a su peso y a la reacción normal. a) Determine la velocidad mínima que debe tener la partícula en el punto más bajo para que realice vueltas completas sin perder contacto con el aro. b) Si la velocidad en el punto más bajo es $3/4$ de la mínima calculada, determine el punto donde se pierde el contacto.
Rta: $\boldsymbol{a)\ v_o = \sqrt{5\, g\, R}\ ;\ b)\ \theta = 105,7°}$

23. El cuerpo de la figura, de masa $\boldsymbol{m = 5\ kg}$, se encuentra sobre una superficie cónica lisa y girando alrededor del eje $\boldsymbol{AB}$ con una velocidad angular de $\boldsymbol{20\ rev/min}$. El hilo de masa despreciable tiene una longitud $\boldsymbol{l = 1\ m}$ y el ángulo del eje del cono respecto a la vertical es $\boldsymbol{\theta = 45°}$. Calcular: a) La velocidad del cuerpo. b) La reacción de la superficie sobre el cuerpo y la tensión del hilo. c) ¿Cuál debería ser la velocidad angular para que el cuerpo comenzara a separarse de la superficie cónica?



Rta: $\boldsymbol{a)\ v = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi\ m/s\ ;\ b)\ N = m(g\ sen\,\theta - \omega^2\, r\cos\theta),\ T = m(\omega^2 r\ sen\,\theta + g\cos\theta);}$

$\boldsymbol{c)\ \omega_o = \sqrt{\frac{g}{r} tg\,\theta}}$

24. Una partícula de masa m se coloca en el punto más alto de un hemisferio liso de radio R y se perturba levemente de modo que ella comienza a caer deslizando. Determine el punto sobre el hemisferio donde la partícula pierde el contacto con él.
Rta: $\boldsymbol{N = mg\cos\theta - 2\, mg\,(1 - cos\,\theta) = 0\ \rightarrow\ \theta = 48,19°}$

25. Una partícula describe un movimiento oscilatorio armónico simple, de forma que su aceleración máxima es de 18 m/s^2 y su velocidad máxima es de 3 m/s. Encontrar: a) La frecuencia de oscilación de la partícula. b) La amplitud del movimiento.
Rta: $\boldsymbol{a)\ 0,955\ Hz;\ b)\ 0,5\ m}$

26. Una partícula está sometida a una fuerza del tipo $F = -kx$. En el instante inicial pasa por $x = 0$ con una velocidad de 1 m/s. La frecuencia del movimiento resultante es de $2/\pi\ Hz$. Hallar la aceleración en el punto de máxima elongación.
Rta: $\boldsymbol{4\frac{m}{s^2}}$

27. Un punto material de masa 25 g describe un movimiento armónico simple (M.A.S.) de 10 cm de amplitud y período igual a $\boldsymbol{1\ s}$. En el instante inicial, la elongación es máxima. Calcular: a) La velocidad máxima que puede alcanzar la citada masa. b) El valor de la fuerza recuperadora a cabo de un tiempo igual a 0,125 s.
Rta: $\boldsymbol{a)\ 0,63\frac{m}{s};\ b)\ 0,07\ N}$

28. Un muelle helicoidal tiene una longitud de $\boldsymbol{15\ cm}$. Cuando de él pende una masa de $\boldsymbol{50\ g}$ queda en reposo con una longitud de $\boldsymbol{17\ cm}$. A continuación se le estira hacia abajo, de modo que el sistema comienza a oscilar con una amplitud de $\boldsymbol{5\ cm}$. Calcular: a) la frecuencia del movimiento; b) la fuerza recuperadora a los $\boldsymbol{0,2\ s}$ de haber empezado a oscilar. Dato: $\boldsymbol{g = 10\ m/s^2}$.
Rta: $\boldsymbol{a)\ 3,56\ Hz;\ b)\ 0,3\ N}$

29. Una partícula de $1\ \mathrm{g}$ de masa inicia un movimiento armónico simple en el punto de máxima elongación, que se encuentra a $1\ \mathrm{m}$ del origen. El tiempo que tarda la partícula desde el instante inicial

hasta que alcanza el origen es de $\mathbf{0,25}\ \boldsymbol{s}$. Calcular: a) La pulsación $\boldsymbol{\omega}$ de este movimiento. b) La fuerza que actúa sobre la partícula, transcurridos $\mathbf{0,1}\ \boldsymbol{s}$ desde el instante inicial.
Rta: $\boldsymbol{a)}\ \mathbf{2}\ \boldsymbol{\pi}\frac{\boldsymbol{rad}}{\boldsymbol{s}};\ \boldsymbol{b)}\ \mathbf{3,19\ 10^{-2}}\ \boldsymbol{N}$

30. Una partícula descansa sobre una plataforma horizontal inicialmente en reposo. Si la plataforma comienza a moverse verticalmente de modo que su desplazamiento es: $y = A\ sen(\omega t)$, siendo A y ω constantes y t el tiempo. Determinar la condición que deben cumplir estas constantes para que durante el movimiento de la plataforma la partícula se despegue de ella.
Rta: Despegará si $\boldsymbol{A\ \omega^2 > g}$

31. Un cuerpo se sujeta a un extremo de un hilo inextensible y el otro extremo del hilo tiene movimiento armónico simple vertical de amplitud A, realizando N oscilaciones completas por segundo. Demuestre que el hilo permanecerá tenso siempre que: $N^2 \leq\ g/(4\pi^2 A)$.

32. Un cuerpo cuya masa es $m = 2\ kg$ está suspendido de un resorte cuya constante elástica es $k = 5\ N/m$. Inicialmente el cuerpo está en la posición de equilibrio estático colgado con el resorte vertical y se le imprime una velocidad hacia bajo de magnitud $0{,}5\ m/s$. Determinar la posición del cuerpo respecto a su posición de equilibrio estático en función del tiempo.
Rta: $\boldsymbol{y(t) = 0,1\sqrt{10}\ sen(\sqrt{\frac{5}{2}}\ t)}$

33. Una partícula de masa $m = 2\ kg$ ejecuta un movimiento armónico simple de modo que su desplazamiento respecto a la posición de equilibrio está dado por:

$$x(t) = 3\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\ t - \frac{\pi}{3}\right) m.$$

Determinar: a) La frecuencia del movimiento en oscilaciones por segundo. b) La amplitud del movimiento en metros. c) La máxima magnitud de la velocidad de la partícula en m/s.
Rta: $\boldsymbol{a)}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\ \boldsymbol{Hz};\ \boldsymbol{b)}\ \mathbf{3}\ \boldsymbol{m};\ \boldsymbol{c)}\ \boldsymbol{\pi\ m/s}$

APÉNDICE 1: Sistema Internacional

Antes de especificar las unidades básicas y derivadas del Sistema Internacional de Unidades (SI) conviene señalar algunas reglas para escribir nombres y símbolos:

- Los símbolos de las unidades se imprimen en caracteres romanos (rectos).
- En general los símbolos de las unidades se escriben en minúsculas, pero si el nombre de la unidad deriva de un nombre propio, la primera letra será mayúscula.
- Los nombres de las unidades se escriben en minúscula.
- Los símbolos de las unidades quedan invariables en plural. Los nombres de las unidades toman una s en el plural excepto los que terminan en las letras s, x o z.
- Los símbolos de las unidades no están seguidos por un punto.
- Cuando una unidad derivada está formada multiplicando dos o varias unidades, se expresa con la ayuda de símbolos de unidades separados por puntos a media altura o por un espacio.
- Cuando una unidad derivada está formada dividiendo una unidad por otra, se puede utilizar una barra inclinada, horizontal o bien exponentes negativos. No se debe introducir en una misma línea más de una barra oblicua, a menos que se añadan paréntesis.
- Notación numérica. Debe dejarse un espacio entre grupos de 3 dígitos, tanto a la izquierda como a la derecha de la coma. En números de 4 dígitos puede omitirse dicho espacio. La coma no debe usarse como separador de millares.

A. Cuadro de Unidades básicas en el SI

Magnitud	*Nombre*	*Símbolo*
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
temperatura termodinámica	kelvin	K
cantidad de sustancia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd

B. Cuadro de Unidades derivadas en el SI

Magnitud	*Nombre*	*Símbolo*	*Unidades SI*	*Unidades SI básicas*
Superficie	metro cuadrado	m^2		
Volumen	metro cúbico	m^3		
Velocidad	metro por segundo	m/s		
Aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s^2		
Densidad	kilogramo por metro cubico	kg/m^3		
Frecuencia	hercio	Hz		s^{-1}
Fuerza	newton	N		$m\cdot kg\cdot s^{-2}$
Presión	pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1}\cdot kg\cdot s^{-2}$
Energía, trabajo	Julio	J	N·m	$m^2\cdot kg\cdot s^{-2}$
Potencia	Vatio	W	J/s	$m^2\cdot kg\cdot s^{-3}$
Momento- fuerza	newton por metro	N·m		$m^2\cdot kg\cdot s^{-2}$
Ángulo plano	radián	rad		
Ángulo sólido	estereorradián	sr		
Velocidad angular	radián por segundo	rad/s		
Aceleración angular	radián por segundo cuadrado	rad/s^2		
Intensidad energética	vatio por estereorradián	W/sr		

APÉNDICE 2: Material Multimedial

Videos de clases

Los videos de clases están condensados en 32 clases en tiempo real correspondientes al dictado de la materia Física 1 cursada en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina durante el año 2013. Los videos corresponden a un curso introductorio de Mecánica Clásica (Mecánica de Newton), y contienen los siguientes temas generales: Cinemática, Dinámica, Trabajo y Energía, Sistemas de Partículas, Cuerpo Rígido, Hidrostática e Hidrodinámica.

Tienen un fin didáctico y pedagógico en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la Ciencia, trabajando con la participación activa de los alumnos y utilizando distintas estrategias: Dramatizaciones, Narrativa, Historia de la Ciencia, Modelos didácticos y ejercitación dinámica de los alumnos en el pizarrón.

Son de utilidad para un curso a distancia debido a que las clases se desarrollan en tiempo real y permiten ser seguidas al ritmo de un alumno presencial, tanto para estudiantes universitarios de Ingeniería como de Ciencias Exactas y Naturales.

Los correspondientes al tema Dinámica, abarcados por el presente libro, pueden ser consultados en los siguientes links de YouTube:

Clase 6/32 - Clases de Viau - Física - Dinámica - Facultad de Ingeniería - UNMdP
https://www.youtube.com/watch?v=tz7eZwKTTIA

Clase 7/32 - Clases de Viau - Física - Dinámica - Facultad de Ingeniería - UNMdP
https://www.youtube.com/watch?v=7K79ixGMUfg

Clase 8/32 - Clases de Viau - Física - Dinámica - Facultad de Ingeniería – UNMdP
https://www.youtube.com/watch?v=l2O8domU968

Clase 9/32 - Clases de Viau - Física - Dinámica - Facultad de Ingeniería – UNMdP
https://www.youtube.com/watch?v=9aDzc20D6MA

Clase 10/32 - Clases de Viau - Física - Dinámica - Facultad de Ingeniería – UNMdP
https://www.youtube.com/watch?v=bNEupQEfk3o

Clase 11/32 - Clases de Viau - Física - Dinámica y Repaso - Facultad de Ingeniería – UNMdP
https://www.youtube.com/watch?v=yG3U8xz-YeE

Clase 12/32 - Clases de Viau - Física - Repaso - Facultad de Ingeniería – UNMdP
https://www.youtube.com/watch?v=xjBlVkmJIC0

Bibliografía

Como fuera mencionado en el prefacio, la bibliografía existente para tener en cuenta en el estudio de la Dinámica es muy amplia y variada, tanto en contenidos como en la profundidad con que son alcanzados. Hemos dividido la bibliografía por lo tanto tratando de guiar al lector en su consulta a los efectos de que pueda clarificar y complementar los temas abordados. Asimismo destacamos la importancia del eje Histórico Epistemológico con que es atravesada la presente obra, en donde la bibliografía recomendada permitirá ahondar en la naturaleza de la ciencia y el pensamiento científico.

Introducción a la Física y divulgación

Einstein, A., Infeld, L. (1993). *La evolución de la física*. Barcelona. Salvat.

Feynman, R. (2000). *El carácter de la ley Física*. Barcelona. Tusquest editores sa.

Haber-Schaim, U., Cross, J., Dodge, J. y Walter, J. (1980). *PSSC Física*. Barcelona. Reverté.

Hecht, E. (1987). *Física en Perspectiva*. México. Addison Wesley Longman.

Hewitt, P. (1999). *Conceptos de Física*. Madrid. Limusa.

Mc Dermott, L., Shaffer, P. y Physics Education Group. (2001). *Tutoriales para Física introductoria*. Brasil. Prentice Hall.

Mecánica clásica básica

Alonso, M. y Finn, E. (1967). *Mecánica*. Vol 1. México. Addison Wesley Longman.

Halliday, D., Resnick, R. y Kenneth, K. (1992). *Física: I.* México. CECSA.

Sears, F. (1959). *Fundamentos de Física: Mecánica, Calor y Sonido*. Vol 1. Madrid. Aguilar.

Tipler, P. (1996). *Física: I.* Barcelona. Reverté.

Mecánica clásica avanzada

Feynman, R., Leighton, R., Sands, M. (1971). *Física: Mecánica, radiación y calor*. Vol 1. México. Pearson Education.

Ingard, U. y Kraushaar, W. (1966). *Introducción al estudio de la mecánica, materia y ondas*. Barcelona. Reverté.

Dias de Deus, J., Pimienta, M., Noroña, A., Peña, T. y Brogueira, P. (2001). *Introducción a la Física*. Madrid. Mc Graw Hill.

Kittel, C., Knight, W. y Ruderman, M. (1968). *Mecánica: Berkeley Physics Course*. Vol 1. Barcelona. Reverté.

Roederer J. (2002). *Mecánica Elemental*. Buenos Aires. Eudeba.

Strelkov, S. (1978). *Mecánica*. Moscú. Mir.

Viau, J., Tintori Ferreira, A., Szigety, E., Gibbs, H. (2015). *Física: Cinemática. Tutoriales para la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia*. Mar del Plata. Argentina. Eudem.

Problemas y experiencias

Benguria, B., Depassier, T. (1999). *Problemas de Mecánica Clásica*. México. Alfaomega.

Gil, S. y Rodríguez, E. (2001). *Física re-Creativa*. Perú. Prentice Hall.

Hewitt, P. y Robinson, P. (1998). *Manual de laboratorio de Física*. México. Addison Wesley Longman.

Tarasóv, L. y Tarásova A. (1976). *Preguntas y Problemas de Física*. Moscú. Mir.

Historia y Epistemología de la ciencia

Bachelard, G. (1978). *El racionalismo aplicado*. Buenos Aires. Paidós.

Bunge, M. (1978). *Filosofía de la Física*. Barcelona. Ariel.

Bunge, M. (1980). *La Ciencia: su método y su filosofía*. Buenos Aires. Siglo Veinte.

Butterfield, M. (1958). *Los orígenes de la ciencia moderna*. Madrid. Taurus ediciones.

Koyré, A. (1983). *Estudios de historia del pensamiento científico*. Madrid. Siglo veintiuno.

Kuhn, T. (1993). *La revolución copernicana*. México. Planeta.

Sobre los autores

Javier Eduardo Viau

Ingeniero (UNMdP). Especialista en Docencia Universitaria (UNMdP). Profesor Asociado exclusiva en Física 1, Facultad de Ingeniería y Profesor Titular en Historia de las Ciencias, Facultad de Humanidades (UNMdP). Investigador (SPU) categoría III. Director de proyectos de Investigación y de Extensión de la UNMdP relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia experimentales. Trabaja en líneas de investigación referentes a Modelos Didácticos en cuanto a su diseño, puesta en el aula y evaluación de la transferencia epistemológica. En Extensión, trabaja en la vinculación de los lenguajes de la Ciencia y del Teatro para la enseñanza de las ciencias experimentales en la escuela primaria. Es autor de material didáctico y trabajos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias en revistas y libros con referato nacionales e internacionales.

Maria Alejandra Tintori Ferreira

Lic. y Prof. de Química (UNMdP). Especialista en Docencia Universitaria (UNMdP). Jefe de trabajos practico exclusiva de Física 1, Facultad de Ingeniería (UNMdP). Docente del nivel secundario. Investigadora (SPU) categoría V. Integrante de proyectos de Investigación y Co-Directora de proyectos de Extensión de la UNMdP relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia experimentales. Trabaja en líneas de investigación referentes a Modelos Didácticos en cuanto a su diseño, puesta en el aula y evaluación de la transferencia epistemológica. En Extensión, trabaja en la vinculación de los lenguajes de la Ciencia y del Teatro para la enseñanza de las ciencias experimentales en la escuela primaria. Es autora de material didáctico y trabajos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias en revistas y libros con referato nacionales e internacionales.

Horacio Miguel Gibbs

Ingeniero (UNMdP). Jefe de Trabajos Prácticos en el área Física Básica, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UNMdP). Docente del nivel secundario en el colegio Dr. Arturo Illia (UNMdP). Investigador (SPU) categoría V. Integrante de proyectos de Investigación y Extensión de la UNMdP relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia experimentales. Trabaja en líneas de investigación referentes al diseño, desarrollo e implementación didáctica de prácticas de Laboratorio en Ciencias Naturales para los niveles secundario y universitario. . Es autor de material didáctico y trabajos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias en revistas y libros con referato nacionales e internacionales.

Índice de contenidos

6. SISTEMAS NO INERCIALES

Índice alfabético

eudem