eudem
libros de grado

2da Edición
Revisada y ampliada

FÍSICA: Cinemática

Tutoriales para la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia

Viau - Tintori Ferreira - Gibbs - Bartels

Universidad Nacional
de Mar del Plata

eudem

FÍSICA:
Cinemática

Tutoriales para la enseñanza
y el aprendizaje de la ciencia

Viau - Tintori Ferreira
Gibbs- Bartels

eudem

Física : cinemática : tutoriales para la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia / Javier Viau ... [et al.]. - 2a ed ampliada. - Mar del Plata: EUDEM, 2020

Libro digital; PDF.

Archivo digital: descarga y online
ISBN 978-987-4440-76-1

1. Física. 2. Cinemática. I. Viau, Javier
CDD 531.112

Este libro fue evaluado por la Dra. Norma Canosa

Segunda edición: Mayo 2020

ISBN 978-987-4440-76-1

Editorial de la Universidad Nacional de Mar del Plata
3 de Febrero 2538
Mar del Plata / Argentina

Arte y Diagramación: Luciano Alem

Imagen de tapa: Leonardo Cisneros

Libro
Universitario
Argentino

A nuestros alumnos…

Enseñanza de la física

En la obra *Tutoriales para la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia* se presentan en forma precisa y clara los principales conceptos de física con interesantes referencias culturales. El aprendizaje de estos conceptos puede ser consolidado mediante la resolución de los numerosos problemas y ejemplos brindados. Para esto, se pone énfasis en métodos generales de resolución de problemas que permiten desarrollar habilidades exitosas.

Indudablemente, la tarea más difícil que tienen los profesores de física, tarea en la que se anota un excesivo número de fracasos, es la de despertar el interés de los estudiantes por esta ciencia llena de hechizo, belleza y aun poesía. Para lograr esto, el profesor debe conectar la física con los intereses de los estudiantes. Por ejemplo, si un móvil en una ruta parte de cierto lugar con cierta velocidad y otro móvil lo hace desde otro lugar y con otra velocidad, a nadie, absolutamente a nadie, ni al profesor ni a los estudiantes le interesa saber dónde se van a encontrar. El mismo problema de encuentro podría aparecer en la paradoja de Zenón de la carrera entre Aquiles y la tortuga, pero ahora de manera atractiva e interesante si el profesor previamente hubiese explicado los argumentos que pretenden probar que el movimiento es imposible contradiciendo nuestra intuición. De paso, también se podría aquí presentar la diferencia entre Parménides y Heráclito de la filosofía antigua y su resolución dialéctica moderna. De esta manera un problema aburrido se puede tornar fascinante.

En el ejemplo anterior se presenta la conveniencia de presentar la física en relación con cuestiones culturales, filosóficas literarias y humanistas, más que con problemáticas tecnológicas y prácticas. La razón de esta conveniencia es que los estudiantes con formación tecnológica ya, de entrada, están interesados por la física, pero justamente son los otros, los de formación e interés humanístico los que deben ser atraídos hacia la física.

La resolución de problemas es un método universalmente usado en la enseñanza de la física pero esto tiene el inconveniente de sugerir erróneamente que la física es resolver problemas y no, lo que es realmente su esencia, descubrir y presentar las regularidades, simetrías y leyes que rigen el ser y devenir de la realidad. Debe quedar bien en claro que la resolución de problemas es solamente una manera de poner en evidencia las leyes fundamentales de la física. Nuevamente, los problemas de encuentro, en sí, no son importantes pero sirven para ilustrar la formalización matemática abstracta del movimiento. Una vez que el profesor ha usado la resolución de problemas como método para presentar la física, debe despegarla de las aplicaciones. Esta disociación es importante para evitar el error de identificar el conocimiento con sus aplicaciones. En general, ciencia y tecnología deben ser diferenciadas, sobre todo en las evaluaciones éticas: el conocimiento no es ni bueno ni malo pero su aplicación si puede serlo. Es usual apelar a los automotores para ilustrar el movimiento o a las bombas y cañones para la cada libre pero ¡la física no es el estudio del tráfico automotor ni de las formas óptimas de matar en actividades bélicas! En relación con esto último, muchos físicos sentimos la identificación de la física con el desarrollo y aplicación de armas, nucleares o convencionales, como una bofetada porque esta ciencia llena de belleza y armonía, que en el fondo es un humanismo, es traicionada cuando se la pone al servicio de la muerte y destrucción.

La física describe comportamientos y hechos que están en la naturaleza pero a ésta, nosotros la percibimos desde nuestra perspectiva propia asociada a una posición y a un movimiento. Por esto es importante diferenciar aquello que depende de nuestra perspectiva, donde interviene nuestra subjetividad, de aquello que es objetivo en la naturaleza. Esta es la esencia del principio de relatividad, tanto la de Galileo como la de Einstein. En consecuencia, en la enseñanza de la física se debe poner énfasis, como lo hace la obra mencionada, en el significado de los sistemas de referencia y en la conveniencia de elegirlos de la manera más adecuada.

Si se tienen en cuenta los conceptos anteriores, *Tutoriales para la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia* es una obra que puede ser de gran utilidad para profesores y estudiantes de física para brindar, no sólo conocimiento y habilidad en la resolución de problemas, sino que también para transmitir la verdadera esencia de la física.

Mar del Plata, diciembre de 2012.

Alberto Clemente de la Torre
Departamento de Física -UNMDP
IFIMAR -(UNMDP-CONICET)

Prefacio a la primera edición

Numerosos autores han dado lugar a clásicos libros de física que nuestros estudiantes pueden consultar por doquier en las distintas bibliotecas del mundo. Asimismo son diversos los libros de divulgación que bajo distintos títulos y autores han circulado a lo largo de los años, convirtiéndose algunos de ellos en referentes indispensables al momento de abordar temas de física en el aula.

La pregunta que surge es entonces: ¿Qué nos motiva o impulsa a escribir nuevamente sobre el tema? La respuesta está en la complejidad que muestra la física cuando es abordada por nuestros alumnos. En todos los niveles educativos, la enseñanza de la física manifiesta los mayores índices de dificultad al momento de evaluarla. Esto conlleva a plantear múltiples estrategias que tienen que ver con los métodos de enseñanza y aprendizaje de las ciencias en el marco general de la enseñanza.

Los autores de este libro tenemos un profundo y marcado perfil racionalista en nuestra formación, inspirados fundamentalmente por la obra de Gastón Bachelard y motivados por el éxito que ha demostrado dicho racionalismo en el avance de la ciencia. Queremos manifestar con esta idea la importancia que reviste un mensaje racionalista en el estudio de la ciencia bajo cualquier nivel de enseñanza. Obviamente, cada nivel estará limitado a las herramientas matemáticas que podrán ser utilizadas, pero nuestra propuesta se centra en nunca dejar de luchar contra la opinión y el sentido común que son los dos principales obstáculos epistemológicos que caracterizan a nuestros alumnos en todos los niveles educativos y que nada aportan en pos de una ciencia y de un pensamiento científico.

Es por ello que destacamos la importancia que tiene formar al alumno dentro del marco de las teorías científicas que se abordan, e inculcarle la necesidad de alcanzar un razonamiento que se encuadre en dicho marco. Es común ver a los alumnos dentro del mundo globalizado que nos caracteriza, sumergidos en un mar de opiniones, que brinda un facilismo para el conocimiento y no tiene en cuenta para nada el racionalismo que caracteriza a la ciencia.

Dentro de este marco, destacamos la formación que nos ha brindado la experiencia áulica desarrollada en largos años de tránsito por niveles de enseñanza media, preuniversitaria y universitaria, donde hemos podido visualizar claramente cuáles son las principales dificultades que se tienen que superar para desarrollar y alcanzar una meta en la enseñanza de la ciencia.

La idea que hemos intentando plasmar al escribir estos tutoriales, es que los mismos partan de la base que el alumno no tiene formación alguna y que debe alcanzarla en forma gradual, siguiendo los lineamientos racionales de las teorías científicas que se va a abordar.

Se ha dedicado particular atención a la resolución de problemas, que es la mayor dificultad que se encuentra en el aula de ciencias. Es por ello que sugerimos un método de resolución de los mismos, que no sólo exponemos, sino que aplicamos a los distintos ejemplos que se plantean a lo largo del texto, con el fin de explicitarlo y que el alumno lo adquiera en forma metacognitiva a lo largo de un curso de mecánica clásica.

Asimismo hemos acompañado el desarrollo de los distintos temas mediante la inclusión de preguntas y cuestiones que surgen del aula de ciencias y que en general son parte de los obstáculos que hay que ir superando para formar un alumno en mecánica. Los textos introductorios de mecánica clásica en general, no tienen en cuenta el grado de desconocimiento que caracteriza a cualquier alumno que los aborda y no dedican tiempo a explicar lo que los autores erróneamente consideran obviedades. En ciencia nada es obvio, si así hubiera sido, no hubiesen transcurrido 2000 años entre el nacimiento de una ciencia incipiente en la Grecia milesia y la mecánica de Newton.

Javier Viau, María Alejandra Tintori Ferreira, Esteban Szigety y Horacio Gibbs

Prefacio a la segunda edición

Con motivo de la repercusión de la primera edición junto con la necesidad de seguir comunicando y avanzando en esta línea es que hemos decidido publicar una segunda edición revisada y ampliada.

Revisada, desde la necesidad de corregir ciertos errores de edición y compilación que fueron detectados por profesores y alumnos, y que requieren desde ya ser salvados.

Ampliada porque hemos sumado a la edición anterior, reseñas históricas y fundamentalmente incorporado problemas resueltos. Los problemas que se han incorporado, se encuentran también desarrollados en formato de video, de forma tal que el lector pueda recurrir a ellos si necesita encontrar algún detalle que sirva para su comprensión.

Cabe destacar también, que al momento de lanzar esta segunda edición, se encuentran disponibles en video de alta calidad las clases que dan soporte a este material, y que conforman un total de 27 videos que podrán encontrar en el canal de YouTube donde se encuentran todos los videos de los tutoriales que han sido publicados a la fecha.

Finalmente quisiéramos comentar y agradecer los comentarios que hemos recibido de profesores y alumnos que han utilizado estos tutoriales como elemento para su formación en este camino de iniciación al estudio de la Mecánica Clásica.

Javier Viau, María Alejandra Tintori Ferreira, Horacio Gibbs y Natalia Bartels

1 EL LENGUAJE DEL MOVIMIENTO

Para iniciar el estudio de la cinemática, se deben establecer pautas físicas y matemáticas que permitan, no sólo alcanzar el objetivo de obtener las ecuaciones que van a representar el movimiento, sino también definir la nomenclatura a utilizar para las mismas. Estandarizar la nomenclatura permitirá que el lenguaje sea acorde con el que maneja la comunidad científica que caracteriza al mundo de la Física.

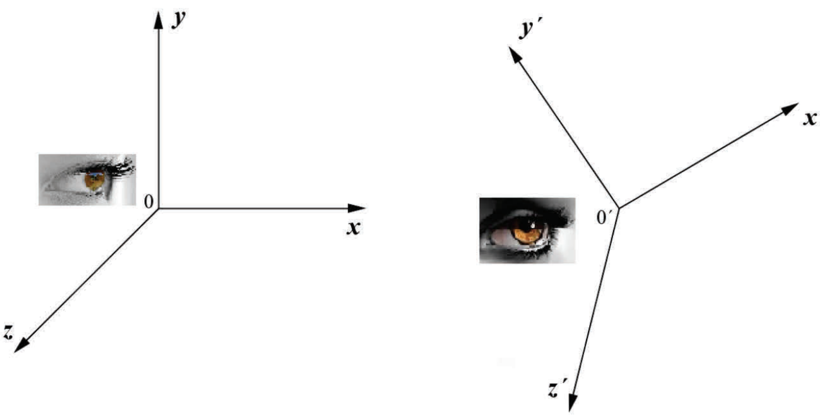
1.1 SISTEMA DE REFERENCIA

No tiene sentido hablar de movimiento si no se lo referencia a un observador, que establecerá el *sistema de referencia* (SR) respecto del cual serán escritas las ecuaciones de movimiento. Todo objeto se mueve en un espacio (habitamos y vivimos en un espacio tridimensional), que matemáticamente y filosóficamente se conoce como espacio cartesiano (cartesiano deriva de René Descartes 1596-1650). Para describir dicho espacio donde se desarrolla todo movimiento se necesitan tres ejes ortogonales entre sí, conocidos como un sistema cartesiano de ejes x, y, z (Figura 1.1).

En la figura 1.1 se representa a dos observadores O y O', ubicados ambos en el origen de coordenadas de su sistema de referencia desde el cual observan el movimiento desarrollado por cualquier objeto en el espacio determinado por los mismos. Cada uno de ellos podrá escribir ecuaciones matemáticas que permitan describir la cinemática del movimiento del objeto observado. Ambos sistemas de ecuaciones son igualmente válidos, aunque sean matemáticamente diferentes, teniendo en cuenta que cada uno tiene validez en el sistema de coordenadas respecto del cual se han obtenido. La complejidad de las ecuaciones matemáticas que resulten, dependerá del SR adoptado, una buena elección de un SR puede dar lugar a un sistema de ecuaciones matemáticamente más sencillas.

Figura 1.1

Sistema de referencia O y O`.



Las ecuaciones de movimiento de la cinemática deben estar referidas a un *sistema de referencia* (SR).

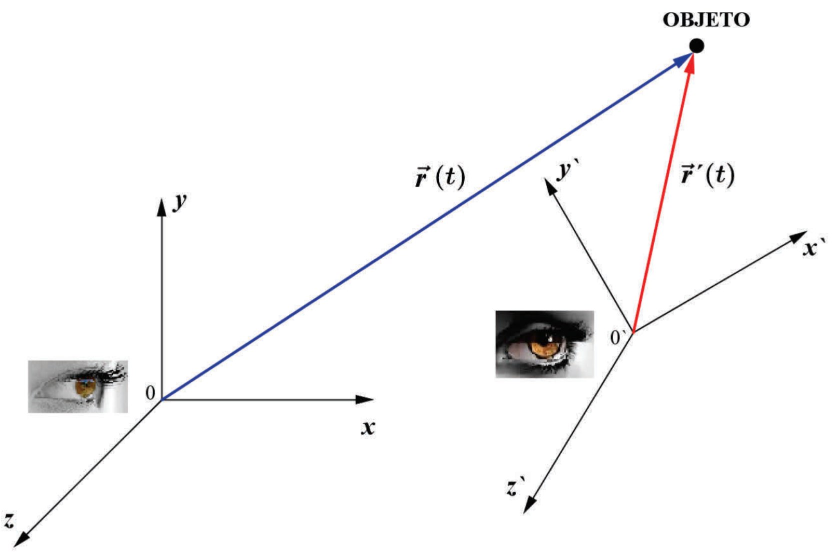
1.2 VECTOR POSICIÓN $\vec{r}(t)$

Es el vector que aplicado en el origen del SR, apunta a la posición que ocupa la partícula (cuerpo u objeto) en un determinado instante de tiempo t. En la figura 1.2 se representa a un objeto visto por dos observadores O y O' cada uno con su respectivo SR. Si bien el objeto se mueve (sino no tendría sentido hablar de cinemática), la figura 1.2 es una fotografía instantánea del objeto cuando ocupa dicha posición en el espacio, cuya ubicación espacial está representada por los vectores $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}'(t)$ correspondientes cada uno de ellos a los SR de ambos observadores.

En la medida que el objeto se mueve en el espacio, los vectores $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}'(t)$ irán variando su módulo, dirección y sentido en el espacio. Precisamente el objetivo de la cinemática es describir matemáticamente dichos cambios.

Figura 1.2

Un objeto visto desde dos sistemas de referencia distintos O y O`.



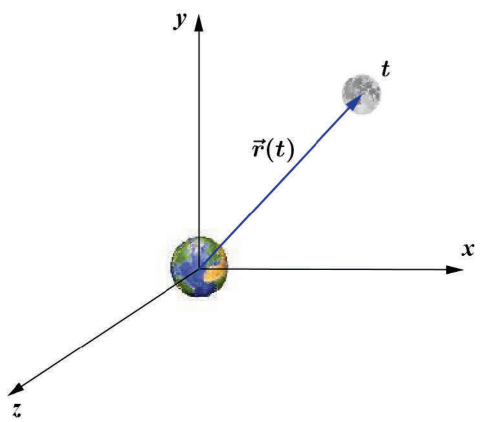
1.3 PARTÍCULA, CUERPO, OBJETO

Un cuerpo u objeto se considera como una partícula cuando sus dimensiones son pequeñas frente a las demás dimensiones que intervienen en el problema y puede ser representado por un único vector posición en el SR adoptado.

Por ejemplo la Luna vista desde la Tierra es una partícula. Si el SR adoptado para observar el movimiento de la Luna es la Tierra, el tamaño de la misma es lo suficientemente pequeño como para considerar que con un único vector posición se puede establecer unívocamente su localización espacial (Figura 1.3).

Figura 1.3

La Luna vista desde la Tierra es una partícula.



De aquí en adelante las palabras objeto, cuerpo y partícula serán consideradas como sinónimos.

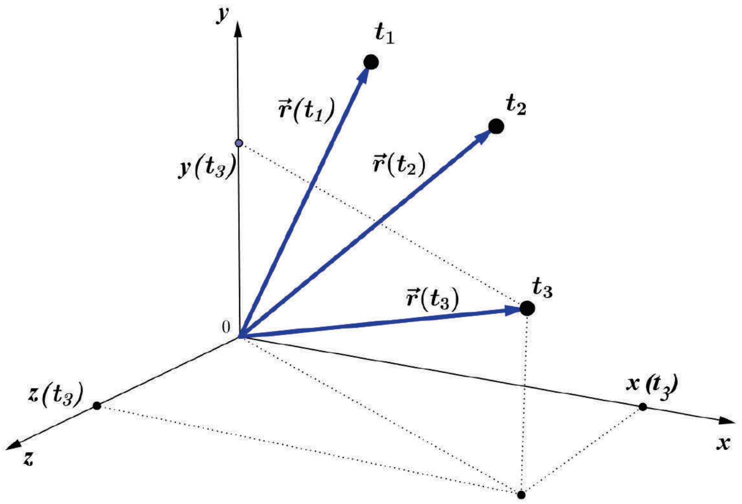
La mecánica de Newton hace referencia a una partícula. En cinemática, las ecuaciones de movimiento representan el movimiento de una partícula.

1.4 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

A medida que la posición de un cuerpo varía en función del tiempo, el vector posición cambia de modo de apuntar a cada una de las diferentes posiciones que ocupa en el espacio. Así el vector $\vec{r}$ es función del tiempo t: $\vec{r}(t)$. En la figura 1.4 se representa a un cuerpo ocupando distintas posiciones para distintos instantes de tiempo visto de un SR con origen O.

Figura 1.4

Vector posición de una partícula en distintos instantes de tiempo.



Como todo vector, $\vec{r}(t)$ tiene tres componentes respecto del SR en que está representado, cada una de las cuales es función del tiempo.

Matemáticamente, las distintas formas de expresar estas componentes son las siguientes, e igualmente válidas.

$$\vec{r}(t)\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \quad \text{ó} \quad \vec{r}(t) = \underbrace{[x(t), y(t), z(t)]}_{\text{Ecuaciones de movimiento u horarias}} \quad \text{ó} \quad \vec{r}(t) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

La unidad de medida en el Sistema Internacional de Unidades es: $[\vec{r}(t)] = [m]$

A las tres componentes del vector posición se las conoce como ecuaciones de movimiento de la partícula o ecuaciones horarias.

El objetivo de toda la mecánica de Newton es obtener las ecuaciones de movimiento correspondientes al objeto bajo estudio, y escribirlas dentro del marco formal que establece la cinemática.

Al escribir matemáticamente estas ecuaciones se logra formalizar racionalmente el movimiento que describe un objeto y conociendo las mismas se podrá responder a cualquier pregunta acerca del mismo.

1.5 SISTEMA DE UNIDADES

A lo largo de la historia de la ciencia, se adoptaron distintos sistemas de unidades de medida y criterios para especificarlas, lo que derivó finalmente en la necesidad de unificarlos. La estandarización establecida para la especificación de las unidades básicas y derivadas se resume en el denominado Sistema Internacional de Unidades (SI), el cual está resumido en el Apéndice 1, que recomendamos consultar y tener presente de aquí en adelante.

1.6 TRAYECTORIA

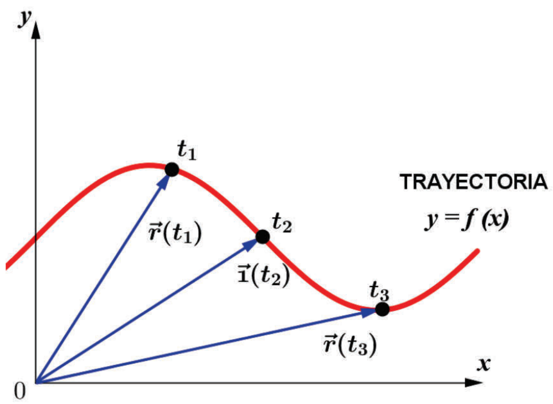
Cuando un objeto se mueve mientras transcurre el tiempo t, el vector posición va cambiando en el SR adoptado. Al lugar geométrico de todos los puntos que une las distintas posiciones que ocupa el objeto en movimiento se lo denomina *trayectoria.*

En otras palabras, la trayectoria es la curva que representa el movimiento de la partícula en el espacio, y puede ser pensada como la traza que dibujaría la punta del vector posición en dicho espacio. Así, la trayectoria es lo que se "ve" (si es que se puede ver, ya que en el caso de un electrón por ejemplo, no es posible) del movimiento de una partícula. Es la curva imaginaria dibujada por el objeto en el espacio a medida que se desarrolla su movimiento.

En la figura 1.5 se muestra una representación de este concepto, en el caso de un movimiento plano. Se entiende por un movimiento plano, al que se desarrolla en dos dimensiones espaciales, un movimiento en donde una de las componentes del vector posición es siempre la misma. Por ejemplo si $z = 0$ ó adopta cualquier valor constante a media que transcurre el tiempo t, el cuerpo se encuentra siempre en el mismo plano (x, y), paralelo al eje z. En la figura 1.5 se omite el eje z, pues el movimiento se desarrolla sobre el plano (x, y).

Figura 1.5

Trayectoria de la partícula: lugar geométrico (curva) que describe el extremo del vector posición en el espacio.



Un ejemplo de trayectoria, es la traza gaseosa que se "ve" en exhibiciones aéreas, y que dejan los aviones en el espacio, mostrando precisamente su trayectoria en la medida que hacen acrobacias.

De ahora en más, para mayor simplicidad, a los movimientos se los va a considerar en un espacio plano (x, y).

Observación

1. La ecuación de la trayectoria resulta de las ecuaciones de movimiento u horarias. Eliminando el tiempo t de estas ecuaciones se obtiene la función matemática $y = f(x)$, (para un movimiento plano) que corresponde a la curva que describe la partícula en el espacio.

Lo que se "ve" (si es que se puede ver) es la trayectoria. Las ecuaciones de movimiento (las componentes de $\vec{r}(t)$) no se "ven", pero en conjunto tienen la información matemática de cómo se mueve la "punta" del vector posición en el espacio.

1.7 VECTOR DESPLAZAMIENTO $\Delta\vec{r}$

Imaginemos una partícula que se mueve en el plano (x, y) y que ocupa las posiciones indicadas en los instantes de tiempo t_1 y t_2. Se define al vector *desplazamiento* como el vector que mide el cambio de posición que experimenta la partícula entre los instantes de tiempo t_1 y t_2. La forma matemática que asume $\Delta\vec{r}$ de acuerdo a su definición es:

$$\boxed{\underset{t_1 \to t_2}{\Delta\vec{r}} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta r_x &= x(t_2) - x(t_1) \\ \Delta r_y &= y(t_2) - y(t_1) \\ \Delta r_z &= z(t_2) - z(t_1) \end{aligned} \right.$$

$$\boxed{\vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1) + \underset{t_1 \to t_2}{\Delta\vec{r}}} \qquad (1.2)$$

La unidad de medida en el SI es: $[\Delta\vec{r}] = [m]$

En la figura 1.6 se muestra la representación vectorial de la situación planteada.

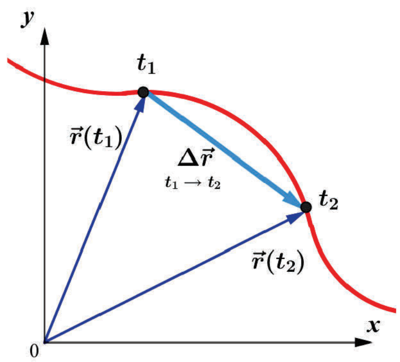


Figura 1.6

Vector desplazamiento.

El vector desplazamiento es la medida del cambio de posición que experimenta la partícula entre los instantes de tiempo t_1 y t_2 (Figura 1.6).

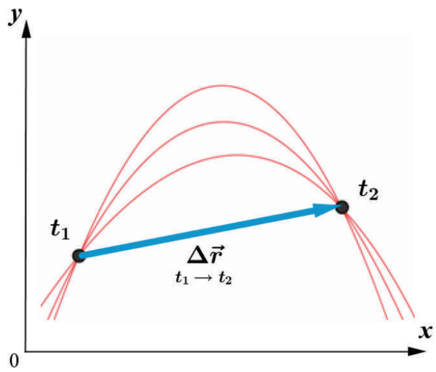
Observaciones

1. El vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ está definido en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, y no en un instante de tiempo t. Es por ello que hay que especificar, el intervalo de tiempo para el cual es calculado.

2. Es importante tener en cuenta que $\Delta\vec{r}$ no es el camino recorrido por la partícula en dicho intervalo, ni tampoco su módulo lo representa. La figura 1.7 muestra varias trayectorias posibles que en un mismo intervalo de tiempo podrían dar lugar a un mismo $\Delta\vec{r}$.

Figura 1.7

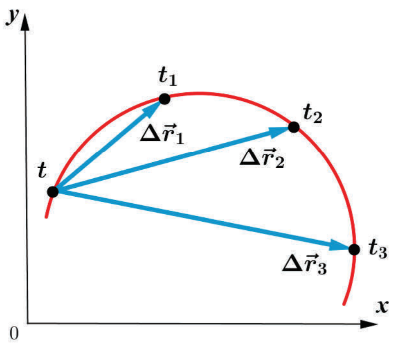
El desplazamiento es el mismo para las tres trayectorias.



3. Se puede destacar que $\Delta\vec{r}$ no tiene un sentido físico claro, ya que no representa ninguna característica del movimiento de la partícula. Sin embargo, sí lo tendrá si se reduce el intervalo de tiempo para el cual es evaluado. Para intervalos pequeños ($t_2 - t_1 = \Delta t \rightarrow 0$), $\Delta\vec{r}$ toma un real sentido físico: representa a la porción de trayectoria que describe la partícula en dicho intervalo. En la figura 1.8, se aprecia, cómo reduciendo el intervalo de tiempo, $\Delta\vec{r}$ se parece más a la porción de la trayectoria y su módulo al camino recorrido por el objeto en dicho intervalo.

Figura 1.8

Vector desplazamiento para distintos intervalos de tiempo.



4. Si $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta\vec{r} \rightarrow \vec{0}$, y en el límite matemático el vector desplazamiento se hace $\vec{0}$, lo que en principio minimizaría su utilidad. Sin embargo, veremos que la función del vector desplazamiento, como representativo de la porción de la trayectoria, tendrá sentido a pesar que aparentemente en el límite matemático tienda a cero.

A los efectos de aplicar los conceptos vistos hasta el momento, se plantea un problema que permite reafirmar la nomenclatura y el formalismo matemático.

Problema 1.1 Video: ***Cinemática clase 3/27***

Imaginemos un objeto que se mueve entre dos puntos A y B separados una distancia de $4400\ m$, del cual se conocen las siguientes posiciones:
En el instante $t = 0$ se encuentra en el punto A, en el instante $t = 600\ s$ se encuentra en el punto B y en el instante $t = 1800\ s$ se encuentra nuevamente en el punto A.

a) Calcular el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ en los siguientes intervalos de tiempo:

1. Entre 0 y $600\ s$
2. Entre 600 y $1800\ s$
3. Entre 0 y $1800\ s$

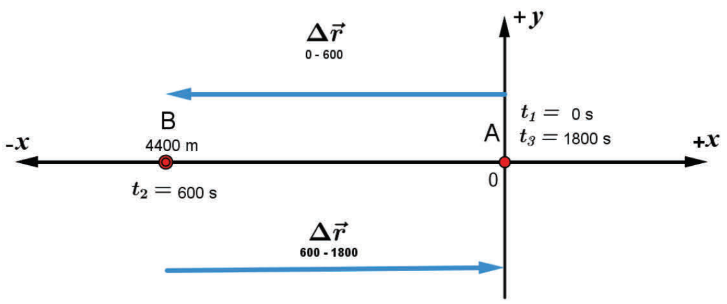
b) ¿En qué posición aproximadamente se encontrará el objeto para el tiempo $t = 800\ s$?

En primer lugar, hay que realizar un gráfico que permita visualizar en el espacio cartesiano la situación planteada.

La figura 1.9 ilustra la situación en el plano cartesiano (x, y), en el cual se ha tomado arbitrariamente el sistema de coordenadas indicado. Es importante destacar que se han indicado las posiciones del objeto y los distintos instantes de tiempo en que las ocupa. En particular, se ve que el punto A corresponde a dos instantes de tiempo: 0 y 1800 segundos. La figura muestra no sólo como convertir un enunciado expresado verbalmente en un gráfico, sino también permite representar los vectores desplazamiento.

Figura 1.9

Sistema de referencia y vectores desplazamiento.



a) El vector desplazamiento en un intervalo de tiempo dado, surge como resultado de la diferencia de los dos vectores posición que corresponden al instante final e inicial del intervalo indicado.

Para realizar el cálculo hace falta conocer los vectores posición del objeto para los instantes de tiempo 0, 600 y 1800 segundos, los cuales vamos a expresar en función del SR adoptado en la figura.

$\vec{r}(0) = (0{,}0)m$

$\vec{r}(600) = (-4400{,}0)m$

$\vec{r}(1800) = (0{,}0)m$

Es importante destacar que hemos sido rigurosos al momento de representar matemáticamente a los vectores posición. Si bien la única componente no nula es la correspondiente al eje x, esto es solamente consecuencia del SR adoptado, en donde se ha hecho coincidir a los puntos A y B sobre el eje de las x. Aunque parezca redundante, debe aclararse que para cada vector la componente en y es cero.

1. $\underset{0-600}{\Delta\vec{r}} = \vec{r}(600) - \vec{r}(0) = (-4400{,}0) - (0{,}0) = (-4400{,}0)m$

2. $\underset{600-1800}{\Delta\vec{r}} = \vec{r}(1800) - \vec{r}(600) = (0{,}0) - (-4400{,}0) = (4400{,}0)m$

3. $\underset{0-1800}{\Delta\vec{r}} = \vec{r}(1800) - \vec{r}(0) = (0{,}0) - (0{,}0) = (0{,}0)m$

b) Con este inciso se busca concientizar al lector acerca de que la opinión y el sentido común no forman parte de una formación científica y son un obstáculo que hay que sortear si se quiere alcanzar una formación racionalista.

Así, con la información que se dispone, de tres posiciones de una partícula y sus correspondientes instantes de tiempo, no se puede responder cuál será posición del objeto en el tiempo $t = 800s$.

Observaciones

1. En la figura 1.9 se representan los vectores desplazamiento correspondientes a los incisos 1 y 2 del problema, sin necesidad de realizar ningún cálculo matemático.

2. El vector desplazamiento correspondiente al intervalo 0 a $600\ s$, tiene una componente negativa ya que apunta hacia las x negativas, mientras que el desplazamiento correspondiente al intervalo 600 a $1800\ s$ tiene una componente positiva.

3. Debe quedar claro en este problema que lo que es negativo o positivo son las componentes de un vector, en este caso el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$. Los vectores no son ni positivos ni negativos, sus componentes sí pueden serlo.

4. En Física y en cualquier otra ciencia, hay cuestiones que no pueden resolverse desde el formalismo correspondiente, ya sea porque no se dispone de suficiente información (como es este caso) o porque no han sido resueltas.

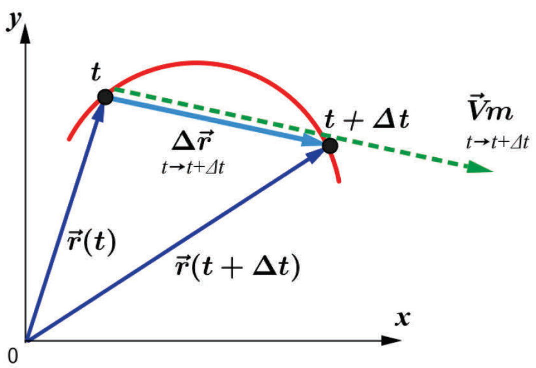
1.8 VECTOR VELOCIDAD MEDIA $\vec{V}_m$

Para continuar con el análisis del movimiento, hay que introducir un nuevo vector, que permitirá representar matemáticamente el cambio de posición ($\Delta\vec{r}$) a medida que transcurre el tiempo t, dando lugar al concepto físico de velocidad.

Imaginemos una partícula que describe una trayectoria plana (x, y) y sean t y $t + \Delta t$ dos instantes cualesquiera del movimiento de la partícula. La figura 1.10 muestra la porción de trayectoria que describe la partícula, los instantes de tiempo, el vector posición correspondiente a dichos instantes y el vector desplazamiento en el intervalo de tiempo considerado.

Figura 1.10

Vector velocidad media.



Se define al vector *velocidad media* en un intervalo de tiempo, como el vector que resulta del cociente entre el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y el intervalo de tiempo Δt considerado, según la siguiente expresión matemática:

$$\boxed{\underset{t\to t+\Delta t}{\vec{V}_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}} \qquad (1.3)$$

La unidad de medida en el SI es: $[\vec{V}_m] = [m/s]$

Observaciones

1. $\vec{V}_m$ es un vector, ya que resulta del cociente entre un vector $\Delta\vec{r}$, y un escalar Δt. El intervalo de tiempo Δt es siempre positivo debido a que el tiempo siempre avanza, no retrocede. Sin embargo, en el espacio cartesiano con variables espaciales, sí es posible retroceder.

2. ¿Cómo se dibuja y cómo se representa el vector velocidad media $\vec{V}_m$?

   a) En el sistema de ejes cartesianos que representa el plano (x, y) donde se desarrolla el movimiento no hay dimensiones para representar velocidades, ya que los ejes x e y tienen dimensiones de longitud (metros) y la velocidad de longitud/tiempo (metros/segundos). Por lo tanto, si se pretende dibujar al vector $\vec{V}_m$ en el mismo espacio cartesiano donde se representa a los vectores posición y desplazamiento, hay que tener en cuenta que no tendrá ningún sentido comparar $\vec{V}_m$ con estos vectores ya que son magnitudes diferentes.

   b) $\vec{V}_m$ tendrá la misma dirección y sentido que $\Delta\vec{r}$, porque surge de dividir un vector $\Delta\vec{r}$ por el escalar Δt que es siempre positivo. Por lo tanto, el vector velocidad media $\vec{V}_m$ es solamente comparable con el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ en dirección y sentido, ya que su módulo no puede compararse porque son vectores que representan distintas magnitudes físicas. La figura 1.10 muestra una posible representación del mismo.

   c) Es importante tener en cuenta que en la Figura 1.10 se ha dibujado a $\vec{V}_m$ más grande que $\Delta\vec{r}$ sólo a los efectos de su visualización debido a que los módulos de estos vectores no son comparables.

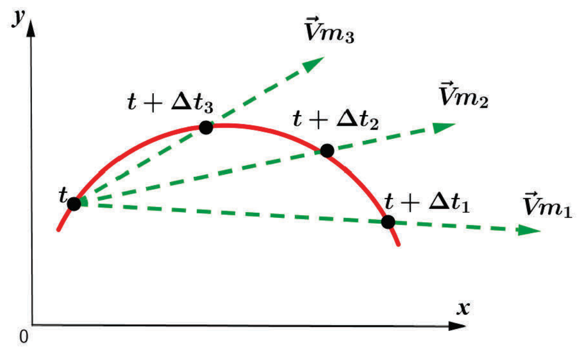
   d) $\vec{V}_m$ por corresponder a un valor medio y no a uno instantáneo no está aplicado en un punto particular, por más que en la Figura 1.10 se vea como aplicado al instante t. Lo que se busca en la representación es emparentarlo con $\Delta\vec{r}$, ya que al tener la misma dirección y sentido le otorga el carácter vectorial que posee en su definición.

3. $\vec{V}_m$ no corresponde a un espacio recorrido en un tiempo dado. Es un error pensar que la velocidad es espacio sobre tiempo. En el problema 1.1 se puede observar que en el intervalo comprendido entre 0 y 1800 segundos, el objeto no se desplazó, por lo que $\underset{0-1800}{\Delta\vec{r}} = \vec{0}$, dando lugar a que en dicho intervalo $\underset{0-1800}{\vec{V}_m} = \vec{0}$, a pesar que hubo un camino recorrido por el cuerpo no nulo.

4. El vector velocidad $\vec{V}_m$, comienza a tener sentido físico cuando el intervalo de observación se reduce. La disminución del intervalo permite que $\Delta\vec{r}$ represente a la porción de la trayectoria de la partícula y que $\vec{V}_m$ pueda realmente medir el ritmo en que cambia la posición de la partícula con el tiempo. La figura 1.11 muestra la representación de tres velocidades medias a partir de un tiempo t, para tres intervalos Δt cada vez más pequeños. Esta figura introduce el concepto de velocidad instantánea $\vec{v}(t)$ que se tratará a continuación.

Figura 1.11

Vector velocidad media para intervalos de tiempo
$\Delta t_3 < \Delta t_2 < \Delta t_1$



1.9 VELOCIDAD INSTANTÁNEA $\vec{v}(t)$

Se define a la *velocidad instantánea* $\vec{v}(t)$ como el vector que resulta de aplicar el límite para $\Delta t \rightarrow 0$ del vector velocidad media.

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{m\ t\rightarrow t+\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}\,(t+\Delta t) - \vec{r}\,(t)}{\Delta t}} \tag{1.4}$$

La unidad de medida en el SI es: $[\vec{v}(t)] = [m/s]$

Matemáticamente, el límite representa la situación física para la cual se puede obtener la velocidad media $\vec{V}_m$ en un intervalo de tiempo Δt muy pequeño; tan pequeño que se dice que tiende a cero.

Este límite matemático trae aparejado un sentido físico muy particular para el vector $\vec{v}(t)$. Es importante por lo tanto, analizar en detalle la definición y las consecuencias que de ella se desprenden de modo de comprender el significado físico del vector $\vec{v}(t)$.

Observaciones

1. Para $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta \vec{r} \rightarrow \vec{0}$; y según la definición para $\vec{v}(t)$ (ecuación 1.4) resulta un cociente del tipo $\vec{0}/0$. Analicemos más detalladamente que implicancias matemáticas puede tener un cociente de este tipo.

Es un cociente que debe realizarse componente a componente. Cada componente del vector desplazamiento ($\Delta \vec{r}$) tiende a cero, de la misma forma que el denominador Δt también lo hace. En las siguientes expresiones matemáticas correspondientes a cada componente de $\vec{v}(t)$ se puede apreciar el tipo de cociente que surge al tomar límite.

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x\,(t+\Delta t) - x\,(t)}{\Delta t} \\ v_y(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r_y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y\,(t+\Delta t) - y\,(t)}{\Delta t} \\ v_z(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r_z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z\,(t+\Delta t) - z\,(t)}{\Delta t} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Se observa que cada componente de $\vec{v}(t)$ surge como un cociente del tipo $0/0$. Tanto el numerador como el denominador tienden a 0. Si analizamos el cociente de dos magnitudes que son casi cero, concluimos que se pueden obtener tres resultados posibles, dependiendo de cómo tiendan a cero en forma separada el numerador y el denominador:

- Si el numerador tiende a cero más rápidamente que el denominador, el cociente dará como resultado cero.
- Si el denominador tiende a cero más rápidamente que el numerador, el cociente dará como resultado infinito.
- Si ambos tienden a cero al mismo ritmo, el resultado será un número finito.

Precisamente, bajo esta última situación toma sentido físico de acuerdo con su definición el vector velocidad instantánea $\vec{v}(t)$.

La posibilidad de realizar matemáticamente este límite está intrínsecamente vinculada con que pueda definirse bajo este formalismo a la velocidad y que sea experimentalmente verificable, lo que le otorga un sentido físico al vector velocidad instantánea.

2. La existencia de este límite, le asigna matemáticamente a $\vec{r}(t)$ la condición de derivabilidad: $\vec{r}(t)$ es derivable al menos una vez.

$$\vec{v}\,(t) = \frac{d}{dt}\,\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) = \begin{cases} v_x(t) = x'(t) = \dfrac{d}{dt}x(t) \\ v_y(t) = y'(t) = \dfrac{d}{dt}y(t) \\ v_z(t) = z'(t) = \dfrac{d}{dt}z(t) \end{cases} \tag{1.6}$$

¿Cómo se deriva un vector?, la respuesta es: componente a componente. Así las tres componentes del vector velocidad surgen de las derivadas respecto del tiempo de cada una de las ecuaciones de movimiento de la partícula, según lo muestra la expresión 1.6.

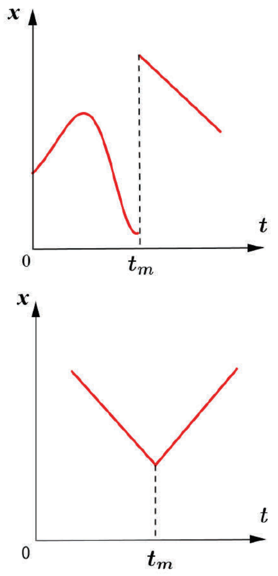
La condición de derivabilidad amplía aún más el conocimiento sobre las componentes de $\vec{r}(t)$: son continuas y coinciden sus derivadas laterales. Físicamente esto significa por ejemplo que la partícula no puede pasar de un punto a otro sin hacerlo por los puntos intermedios, no puede andar a los saltos. La velocidad instantánea de la partícula debe estar definida en todo punto de la trayectoria. La figura 1.12 ilustra situaciones donde no está definida la velocidad y que son físicamente imposibles para la mecánica de Newton.

Observar que en la figura 1.12 se representan dos situaciones en las que una ecuación de movimiento $(x(t))$ puede no ser derivable en un instante de tiempo t_m.

En el primer gráfico, la función es discontinua en dicho instante, y en el segundo se observa que si bien la función es continua y está definida en dicho punto, no existe la derivada. Esto ilustra que la partícula no puede andar a los saltos de un punto a otro, ya que las componentes de su vector posición, no sólo deben ser continuas sino derivables en todos los puntos.

Figura 1.12

Situaciones en donde no está definida la velocidad.



En t_m la función no tiene un límite, hay un salto ⇒ discontinuidad.

En t_m las dos derivadas laterales no coinciden (punto angular) ⇒ pendiente por derecha e izquierda distintas.

3. ¿Cómo y dónde se puede representar gráficamente a $\vec{v}(t)$?

Como todo vector, $\vec{v}(t)$ tiene tres componentes que dan lugar a tres magnitudes que lo caracterizan: módulo, dirección y sentido, que permiten interpretarlo gráficamente. El análisis de estas magnitudes posibilita realizar una caracterización del mismo.

a) **Dirección:** La dirección de $\vec{v}(t)$, es la del vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ que le da origen. Como $\vec{v}(t)$ está definida para $\Delta t \to 0$, la dirección es la tangente a la trayectoria en el instante de tiempo t. Así, la dirección de la velocidad es la de la tangente geométrica en el punto a la trayectoria como se ilustra en la figura 1.13.

b) **Sentido:** el sentido del vector velocidad instantánea $\vec{v}(t)$ es el del movimiento de la partícula a lo largo de la trayectoria, que en definitiva no es más que el sentido del vector $\Delta\vec{r}$.

c) **Módulo**: El módulo surge de la expresión matemática 1.7, en donde se ha aplicado módulo en la definición de $\vec{v}(t)$ (Δt no tiene barras de módulo porque siempre es positivo). Al módulo del vector velocidad se le suele denominar rapidez ($|\vec{v}(t)| = rapidez$)

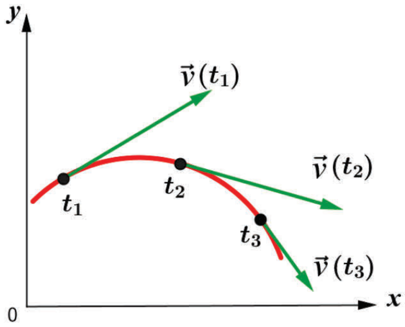
$$\boxed{|\vec{v}(t)| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}} \qquad (1.7)$$

Es importante destacar nuevamente que el módulo de $\vec{v}(t)$ surge de dos magnitudes que tienden a cero de tal forma que de su cociente se obtiene un valor finito que es el módulo del vector velocidad instantánea.

La velocidad instantánea $\vec{v}(t)$ no puede ser representada en el espacio cartesiano, pues los ejes x, y, z no tienen dimensiones de velocidad (m/s) sino dimensiones espaciales (m). De todas maneras, es conveniente representar al vector $\vec{v}(t)$ en los distintos puntos de la trayectoria, mostrando el cambio de velocidad que se origina a lo largo de la misma: la velocidad es tangente a la trayectoria en el punto considerado. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el módulo de $\vec{v}(t)$ (el tamaño del vector) no puede ser comparado con el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$, ya que corresponden a magnitudes diferentes. Las velocidades, sólo pueden ser comparadas con velocidades.

Figura 1.13

Velocidad instantánea $\vec{v}(t)$ *en distintos instantes de la trayectoria de una partícula.*



1.10 ACELERACIÓN MEDIA $\vec{a}_m$

A continuación se va a definir un nuevo vector que permitirá ponderar el cambio de velocidad, $\Delta\vec{v}(t)$, que experimenta la partícula en un intervalo de tiempo Δt.

Sea una partícula que recorre una trayectoria como la de la figura 1.14 y sean t_1 y t_2 dos instantes cualesquiera del movimiento de la partícula, a los que les corresponden velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ respectivamente. La figura 1.14 muestra los vectores posición, y velocidad correspondientes al intervalo considerado.

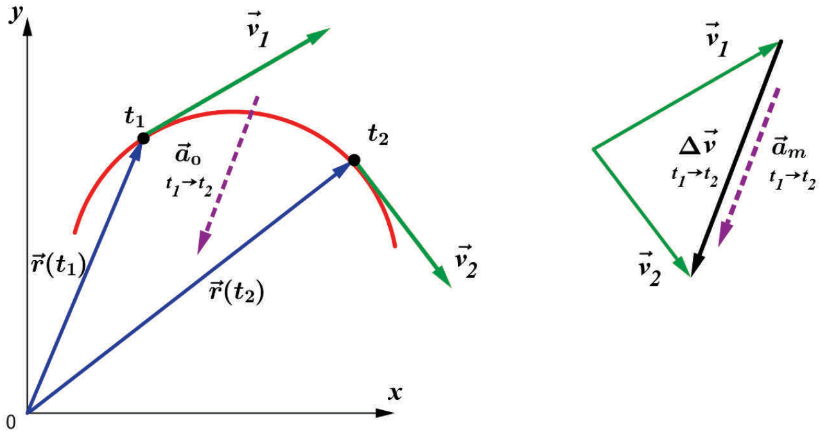
Se define al vector *aceleración media* $\vec{a}_m$ en un intervalo de tiempo Δt como el vector que resulta de realizar el cociente entre el vector cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$ y el intervalo Δt considerado.

$$\boxed{\underset{t_1 \to t_2}{\vec{a}_m} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}} \tag{1.8}$$

La unidad de medida en el SI es: $[\vec{a}(m)] = [m/s^2]$

Figura 1.14

Vector aceleración media.



De la definición surge que el vector $\vec{a}_m$ es una medida del ritmo de cambio del vector velocidad instantánea $\vec{v}(t)$ en un intervalo de tiempo Δt. Si la velocidad instantánea cambia en dicho intervalo, entonces el vector $\vec{a}_m$ da cuenta de dicho cambio, midiendo el ritmo con que varía la velocidad dentro del intervalo.

Observaciones

1. $\vec{a}_m$ está evaluada en un intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ y por eso se denomina media.

2. $\vec{a}_m$ es una medida del cambio del vector velocidad dentro del intervalo de tiempo considerado: ya sea del módulo, de la dirección, del sentido o de todos. En la medida en que varíe la velocidad instantánea de la partícula en el intervalo considerado, habrá una aceleración media que podrá evaluar dicho cambio.

3. ¿Cómo y dónde se puede representar gráficamente a $\vec{a}_m$?
La representación de $\vec{a}_m$ permitirá visualizar en forma gráfica el cambio de la velocidad instantánea en un intervalo de tiempo dado. Analicemos la posibilidad de una representación en el espacio cartesiano.

a) El espacio cartesiano (x, y) no tiene dimensiones de aceleración, lo mismo que sucede con la velocidad, por lo que cualquier representación que se realice, será esquemática a los efectos de visualizar su dirección y su sentido más que su módulo.

b) $\vec{a}_m$ es un vector que posee la dirección y el sentido de $\Delta\vec{v}$. Así, para representar $\vec{a}_m$ conviene realizar un gráfico auxiliar en el cual se pueda visualizar $\Delta\vec{v}$ que es quien da lugar a $\vec{a}_m$. La forma de representar al vector $\Delta\vec{v}$ es dibujando a los vectores velocidad que lo conforman con un origen en común. La figura 1.14 muestra el gráfico auxiliar mencionado, en donde se han transportado las velocidades correspondientes a los instantes t_1 y t_2 a un origen en común a los efectos de poder obtener el vector $\Delta\vec{v}$. Este gráfico auxiliar, permite determinar la dirección y el sentido del vector cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$ que da origen a la dirección y sentido del vector $\vec{a}_m$.

c) $\vec{a}_m$ al estar evaluada en un intervalo de tiempo, es un valor medio y no instantáneo. Esto significa que no tiene un punto de aplicación dentro del intervalo considerado. La figura 1.14 muestra una representación de $\vec{a}_m$, en donde se puede apreciar que no está aplicada a ningún punto concreto de la trayectoria pero sí dentro del intervalo considerado.

d) IMPORTANTE: no tiene ningún sentido realizar la comparación del módulo de $\vec{a}_m$ con el de $\Delta\vec{v}$, ya que si bien $\Delta\vec{v}$ determina la dirección y el sentido de $\vec{a}_m$, se trata de vectores de distinta naturaleza física.

1.11 ACELERACIÓN INSTANTÁNEA $\vec{a}(t)$

La *aceleración instantánea* $\vec{a}(t)$, es la aceleración de la partícula en un punto de la trayectoria y representa el ritmo en que cambia instantáneamente su velocidad. A medida que disminuye el intervalo de tiempo y en particular en el límite matemático para $\Delta t \to 0$, $\vec{a}_m$ se convierte en instantánea. Matemáticamente, $\vec{a}(t)$ responde a la siguiente expresión:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \underset{t \to t+\Delta t}{\vec{a}_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\,\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\,\vec{r}(t) = \vec{r}\,''(t)} \tag{1.9}$$

La unidad de medida en el SI es: $[\vec{a}(t)] = [m/s^2]$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t)} \qquad \left\{ \begin{aligned} a_x(t) &= x''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\,x(t) \\ a_y(t) &= y''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\,y(t) \\ a_z(t) &= z''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\,z(t) \end{aligned} \right. \tag{1.10}$$

Observaciones

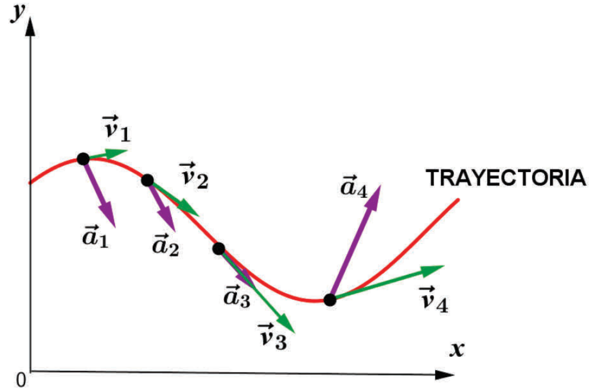
1. $\vec{a}(t)$ es un valor instantáneo y apunta hacia la concavidad de la curva que representa la trayectoria de la partícula. En segmentos rectilíneos, tendrá la dirección del desplazamiento y el sentido del cambio de velocidad que experimenta la partícula.

La figura 1.15 muestra una trayectoria cualquiera que presenta dos concavidades y un tramo recto. En esta figura se pretende dar cuenta del sentido del vector aceleración en distintos puntos de la curva en forma aproximada ya que se necesitaría más información acerca de cómo varía la velocidad de la partícula a lo largo de la curva para realizarlo con mayor rigurosidad. En los puntos 1, 2, 3 y 4 se ha representado la velocidad y la aceleración instantánea.

2. Matemáticamente, para que exista $\vec{a}(t)$, $\vec{v}(t)$ tiene que ser derivable. Así, $\vec{r}(t)$ tiene que ser dos veces derivable (ver ecuación 1.10). Esto habla de la suavidad que caracteriza a las componentes de $\vec{r}(t)$, ya que se trata de una función vectorial doblemente derivable.

Figura 1.15

Vector aceleración y velocidad instantánea en la transición de dos curvas del mismo radio. Observe que:
$|\vec{v}_1| < |\vec{v}_2| < |\vec{v}_3| < |\vec{v}_4|$
$|\vec{a}_4| > |\vec{a}_1| > |\vec{a}_2| > |\vec{a}_3|$



A continuación se plantea un problema que abarca los conceptos hasta aquí abordados. Esto permitirá la familiarización con el manejo vectorial que exige la cinemática y en particular la forma de representar los distintos vectores que caracterizan el movimiento de la partícula.

Problema 1.2 Video: ***Cinemática clase 6/27***

De una partícula que se mueve en el plano (x, y) se conocen las ecuaciones de movimiento que responden a las siguientes expresiones matemáticas:

$$\vec{r}(t) \begin{cases} x(t) = t + t^2 \quad m \\ \\ y(t) = 1 + t + t^2 \quad m \end{cases}$$

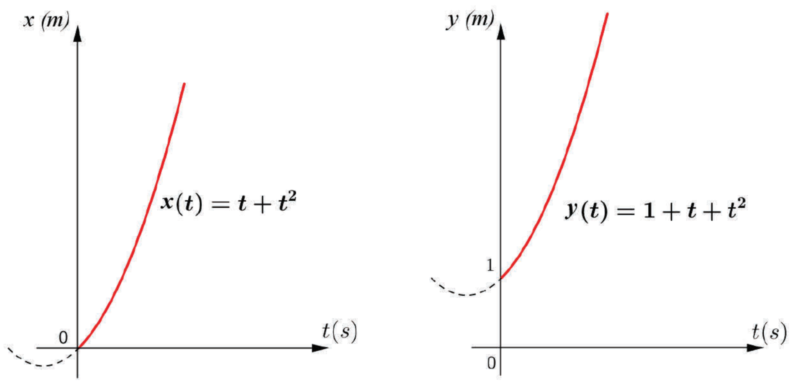
a) Representar gráficamente las ecuaciones horarias.
b) Representar y hallar una ecuación para la trayectoria.
c) Calcular $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$. Representar gráficamente sus componentes.
d) Dibujar los vectores posición, velocidad y aceleración en los siguientes instantes de tiempo $t = 0$ y $t = 1\ s$.

Nos encontramos frente a un problema en el cual el objetivo de la cinemática ha sido cumplido ya que se conocen las ecuaciones de movimiento de la partícula. Por este motivo estamos en condiciones de responder a cualquier pregunta que se nos formule acerca del movimiento. En particular, las cuestiones planteadas apuntan a representar el movimiento en forma gráfica, y hallar los vectores velocidad y aceleración en forma matemática y gráfica.

a) Este inciso consiste en representar gráficamente $x(t)$ e $y(t)$. Es importante al realizar estos gráficos comprender que el tiempo es la variable independiente común a cada ecuación de movimiento. Conviene por lo tanto ubicar los gráficos uno encima del otro, de forma tal que la variable representada en el eje de las abscisas, y común a ambas, permita identificar claramente los distintos valores que asumen x e y para cada instante t. La figura 1.16 muestra los gráficos correspondientes, que por una cuestión de espacio no se representaron como se ha sugerido. Puede uno darse cuenta que ambas ecuaciones de movimiento son parábolas, y que en particular $y(t)$ está corrida en una unidad respecto de $x(t)$. El vértice de la parábola correspondiente a $x(t)$ tiene coordenadas$(-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ y la de $y(t)$ tiene coordenadas $(-\frac{1}{2},\frac{5}{4})$.

Figura 1.16

Representación de las ecuaciones horarias.



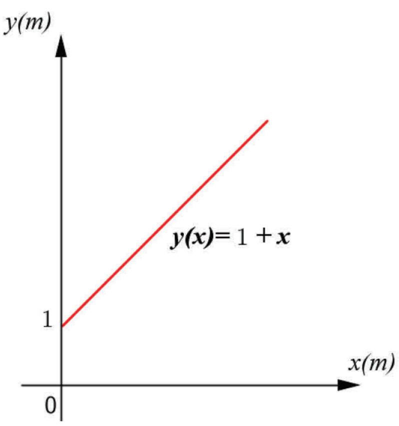
b) Para obtener la trayectoria, se debe encontrar una función matemática del tipo $y(x)$, que represente en el espacio cartesiano la curva que describe la partícula. La forma de obtener esta ecuación es despejar t de la ecuación $x(t)$ y reemplazarla en $y(t)$. Sin embargo, si se observan con detenimiento las ecuaciones, el término $t + t^2$ que figura en $y(t)$ es $x(t)$, por lo tanto se puede escribir:

$y(x) = 1 + x \quad m$

Vemos que esta ecuación corresponde a la de una recta, por lo que se puede decir que se trata de

Figura 1.17

Trayectoria de la partícula.



un movimiento rectilíneo (MR). Para representar la ecuación de la recta a la cual corresponde la trayectoria que describe la partícula en el espacio, se deben tomar los ejes cartesianos que definen dicho espacio, como se ilustra en la figura 1.17.

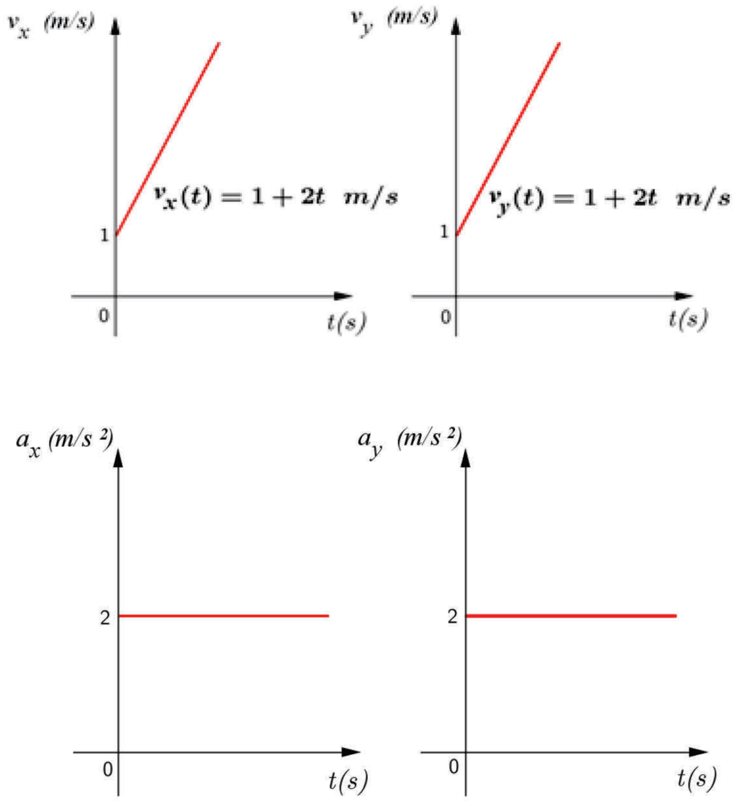
Es importante observar que si bien la trayectoria que describe la partícula en el espacio es una recta, y es lo que se vería del movimiento ya que habitamos un espacio en el cual vemos a los objetos moverse, las ecuaciones horarias son parábolas.

c) Para obtener los vectores velocidad y aceleración de la partícula, como se conocen las ecuaciones horarias, matemáticamente se deben realizar sus derivadas. En cuanto a la representación, es conveniente realizar un gráfico encima del otro con el eje correspondiente al tiempo en común para cada componente. La figura 1.18 muestra los resultados obtenidos.

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = 1 + 2t \quad m/s \\ v_y(t) = 1 + 2t \quad m/s \end{cases} \qquad \vec{a}(t)\begin{cases} a_x(t) = 2 \quad m/s^2 \\ a_y(t) = 2 \quad m/s^2 \end{cases}$$

Figura 1.18

Velocidad y aceleración de la partícula.



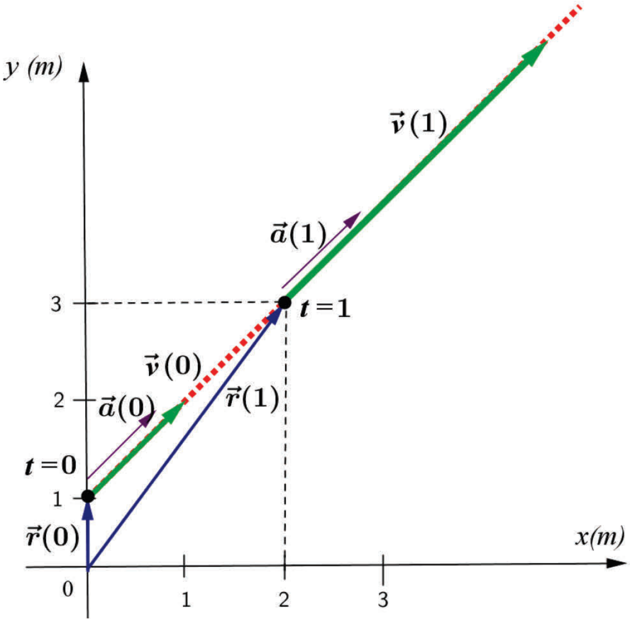
d) Este inciso es particularmente interesante, pues permite reafirmar los conocimientos acerca de cómo y dónde deben representarse los vectores que caracterizan el movimiento de la partícula bajo estudio cinemático. Como ya se han calculado las componentes de los distintos vectores en función del tiempo en los incisos anteriores, simplemente se debe especializar el valor de t en 0 y 1 segundo en cada uno de ellos. En la figura 1.19 se muestran los resultados obtenidos.

$$t = 0 \quad \begin{cases} \vec{r}(0) = (0,1)\, m \\ \vec{v}(0) = (1,1)\, m/s \qquad |\vec{v}(0)| = \sqrt{2}\, m/s \\ \vec{a}(0) = (2,2)\, m/s^2 \qquad |\vec{a}(0)| = 2\sqrt{2}\, m/s^2 \end{cases}$$

$$t = 1 \quad \begin{cases} \vec{r}(1) = (2{,}3)\ m \\ \vec{v}(1) = (3{,}3)\ m/s \qquad |\vec{v}(1)| = 3\sqrt{2}\ m/s \\ \vec{a}(1) = (2{,}2)\ m/s^2 \quad |\vec{a}(1)| = 2\sqrt{2}\ m/s^2 \end{cases}$$

Figura 1.19

Vectores posición, velocidad y aceleración para t *: 0 y 1 segundo.*



Observaciones

1. La dirección de los vectores velocidad y aceleración coinciden con la trayectoria. En particular $\vec{v}(t)$, es tangente a la trayectoria en cada punto y la tangente a una recta es la recta misma.

Como la pendiente de la recta que representa la trayectoria es igual a 1 (esto significa una pendiente de $45°$), ambas componentes del vector velocidad son iguales para cada instante t considerado. Esto no significa que $\vec{v}(t)$ sea constante, sino simplemente que ambas componentes en cada instante son iguales. Observar que el módulo de la velocidad aumenta desde $\sqrt{2}\ m/s$ en $t = 0$ hasta $3\sqrt{2}\ m/s$ en $t = 1$.

2. La aceleración es constante ($\vec{a} = cte$) durante todo el movimiento de la partícula.

3. Se trata de un movimiento rectilíneo: la trayectoria es una recta. Sin embargo hacemos notar que el SR adoptado para describir este movimiento no es el adecuado, ya que según su elección, el movimiento rectilíneo se desarrolla en el plano, lo que da lugar a la necesidad de dos ecuaciones de movimiento $x(t)$ e $y(t)$ para describirlo.

4. Como se verá a continuación, la elección de un SR adecuado es importante en la resolución de todo problema de Física, y para describir matemáticamente a un movimiento rectilíneo es conveniente hacer coincidir uno de los ejes coordenados (el eje x o el eje y) con la trayectoria, que en este caso es una recta. De esta manera se trabaja con una sola ecuación de movimiento distinta de cero.

5. En particular, vamos a reparar en los valores iniciales de los vectores: $\vec{r}(0)$ y $\vec{v}(0)$ que representan las condiciones iniciales del movimiento (CI) y de las cuales nos ocuparemos a continuación.

1.12 RESUMEN DEL CAPITULO

Dentro de las pautas cinemáticas que se deben seguir para poder describir matemáticamente el movimiento de una partícula se han definido los vectores posición, velocidad y aceleración como representativos del mismo.

Conociendo $\vec{r}(t)$ y por ende las ecuaciones de movimiento de la partícula, se puede derivar dos veces y obtener $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$. Matemáticamente se resume de la siguiente forma:

$$\vec{r}(t)\begin{cases} x(t) \\ \\ y(t) \end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) \\ \\ v_y(t) \end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{a}(t)\begin{cases} a_x(t) \\ \\ a_y(t) \end{cases} \tag{1.11}$$

Se plantea ahora la siguiente pregunta: ¿Y si se conoce $\vec{a}(t)$, se puede obtener $\vec{r}(t)$? Vamos a responder con un ejemplo, que permite comprender con qué dificultades nos vamos a encontrar al momento de reconstruir $\vec{r}(t)$ a partir del conocimiento de $\vec{a}(t)$.

Supongamos una partícula que describe un movimiento plano cualquiera y cuyas ecuaciones de movimiento son conocidas. Derivando cada una de ellas podemos obtener las componentes de $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ respectivamente como sigue:

$$\text{Sea } \vec{r}(t)\begin{cases} x(t) = t^2 + 2\,t + \boxed{1} \\ \\ y(t) = t^2 + 3\,t + \boxed{4} \end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = 2t + \boxed{2} \\ \\ v_y(t) = 2t + \boxed{3} \end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{a}(t)\begin{cases} a_x(t) = 2 \\ \\ a_y(t) = 2 \end{cases}$$

$\uparrow$ se pierde $\vec{r}(0)$ $\quad\quad$ $\uparrow$ se pierde $\vec{v}(0)$

Se observa que cada vez que derivamos se pierden las constantes que caracterizan a las condiciones iniciales $\vec{r}(0)$ y $\vec{v}(0)$ del movimiento de la partícula. Es por ello que si pretendemos partir del conocimiento de $\vec{a}(t)$ para reconstruir $\vec{r}(t)$, vamos a necesitar integrar la aceleración y conocer las constantes de integración: los valores $\vec{r}(0)$ y $\vec{v}(0)$ que son las CI del movimiento.

Para reconstruir $\vec{r}(t)$ a partir de $\vec{a}(t)$ se deben conocer las condiciones iniciales $\vec{r}(0)$ y $\vec{v}(0)$ que en definitiva matemáticamente no son más que las constantes que surgen al momento de integrar dos veces la aceleración de la partícula.

Resumiendo:

$$\text{Conociendo}\begin{cases} \vec{a}(t) \\ + \\ \text{Condiciones iniciales: CI } \vec{r}(0) \text{ y } \vec{v}(0) \end{cases} \longrightarrow \vec{r}(t)$$

Nos surge entonces la siguiente pregunta: ¿Cómo se puede conocer la aceleración $\vec{a}(t)$ en el movimiento de una partícula?

La respuesta se encuentra en las bases de la mecánica de Newton. Las causas, en la mecánica de Newton son las fuerzas, y las fuerzas están vinculadas con aceleraciones. El conocimiento de las fuerzas que obran sobre una partícula permitirá obtener matemáticamente la aceleración de la misma. Así, si podemos hallar la aceleración de la partícula mediante el estudio de las causas (fuerzas), y tomar conocimiento de cuáles son las condiciones iniciales del movimiento $\vec{r}(0)$ y $\vec{v}(0)$ se podrán escribir las ecuaciones de movimiento correspondientes y racionalizar matemáticamente el problema. Pero, la vinculación de las causas con el movimiento es material de estudio para la dinámica.

Nos ocupamos por ahora de la cinemática, para la cual el propósito es describir al movimiento, asumiendo que las causas (aceleraciones) están dadas.

2 MOVIMIENTOS ESPECIALES

Hasta aquí se estudió el formalismo matemático necesario para describir cinemáticamente el movimiento de una partícula. Lo aplicaremos en casos particulares, que son representativos de muchas situaciones que se encuentran en la práctica, donde las ecuaciones adoptan formas particularmente sencillas.

En general, la forma de la trayectoria, caracteriza a un tipo de movimiento, otorgándole un nombre al mismo. Así surgen el *movimiento rectilíneo*, el *tiro oblicuo* y el *movimiento circular*. En este capítulo y el siguiente se estudiarán los dos primeros casos, dejando el capítulo 4 para el movimiento circular, que merece un tratamiento más detallado.

2.1 MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS (MR)

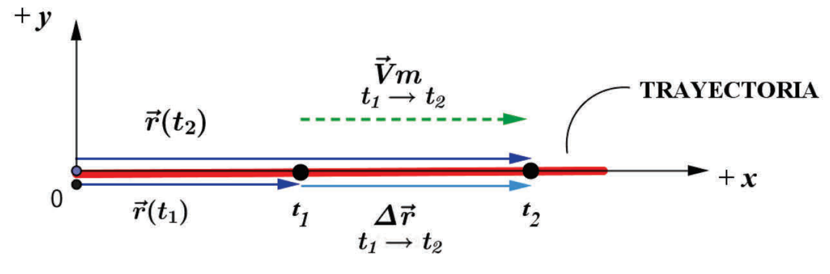
Si la trayectoria que describe una partícula es una recta, al movimiento se lo denomina *Rectilíneo* (MR). Una trayectoria rectilínea lleva a pensar en un movimiento muy simple, en el cual no hay curvas, y aparentemente los cambios son menores. Pero si hay cambios, hay una física y un movimiento a describir. Toda trayectoria muestra un cambio al menos de posición, que debe ser acompañado por ecuaciones matemáticas que permitan describir el movimiento bajo un formalismo matemático.

Las ecuaciones de movimiento de una partícula, no sólo describen matemáticamente al movimiento, sino que lo hacen con la mayor simplicidad posible, la cual puede lograrse con la libertad en la elección de un SR. Así, si la trayectoria es una recta, se puede hacer coincidir uno de los ejes cartesianos con la misma. De esta manera todos los vectores $\vec{r}(t)$, $\Delta\vec{r}$, $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ tendrán una sola componente no nula. Por ejemplo en el caso que se muestra en la figura 2.1, la única componente no nula que representa a cada vector es la proyección del vector sobre el eje x, porque se hizo coincidir al eje x con la trayectoria de la partícula.

Esta única componente no nula que caracteriza a cada vector podrá ser positiva, cero o negativa, indicando su signo el sentido del vector al que representa: apuntará hacia las x positivas o negativas según corresponda.

Figura 2.1

Vectores en un movimiento rectilíneo.



Dentro de los movimientos rectilíneos, existen dos particularmente sencillos y representativos de muchas situaciones físicas, el *Movimiento Rectilíneo Uniforme* (MRU) y el *Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado* (MRUV).

2.1.1 MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU)

El Movimiento Rectilíneo Uniforme es el más simple de todos los movimientos rectilíneos: la velocidad es constante en todo punto de la trayectoria y la aceleración de la partícula es cero. Si se hace coincidir el eje de las x con la trayectoria de la partícula, el formalismo matemático que caracteriza a este movimiento en cuanto a la cinemática es el siguiente:

- Sobre el eje x:

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = cte \\ v_x(t) = cte = v \quad \rightarrow \quad \boxed{x(t) = x_0 + v\,t} \\ a_x(t) = 0 \end{cases} \qquad (2.1)$$

Ecuación de movimiento

↓

$$\boxed{y = 0}$$

Ecuación de la trayectoria

De este formalismo matemático, surgen las figuras 2.2-a que se corresponden con los gráficos de la posición y la velocidad del movimiento y la 2.2-b que representa la trayectoria.

Figura 2.2-a

Gráficos de posición y velocidad de un MRU.

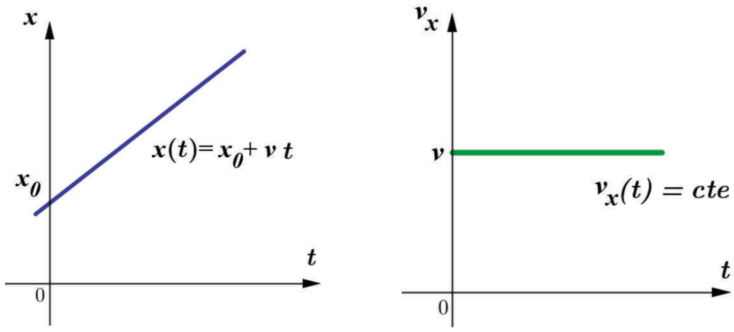
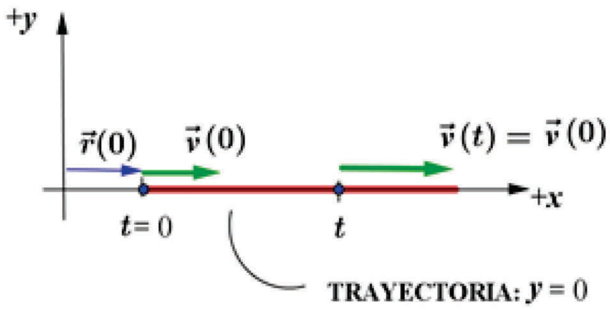


Figura 2.2-b

Gráfico de trayectoria de un MRU.



Observaciones

1. La ecuación para la trayectoria de la partícula es: $y = 0$, que representa al eje x en donde se desarrolla el movimiento.

2. Se han representado, los vectores $\vec{r}(0)$ y $\vec{v}(0)$ que corresponden a las CI del movimiento. Como la velocidad es constante, el vector velocidad $\vec{v}(t)$ coincide con la condición inicial para la velocidad $\vec{v}(0)$.

3. En la figura 2.2-a se representa la ecuación horaria del movimiento. Observar que en esta figura no aparece ningún vector por la simple razón de que es imposible representarlos. Los vectores de la cinemática se representan en el espacio cartesiano.

4. Todo vector tiene la dirección del eje x, mientras que su sentido puede ser para la derecha o la izquierda, según la figura 2.2-b.

2.1.2 MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (MRUV)

Este movimiento rectilíneo se caracteriza por tener aceleración constante. Si se considera que se hace coincidir el eje de las x con la trayectoria de la partícula, el formalismo matemático que corresponde a este movimiento es el siguiente:

- Sobre el eje x : $\begin{cases} \vec{a}(t) = cte \\ a_x(t) = cte = a \quad \rightarrow \end{cases}$

$$\boxed{v_x(t) = v_0 + a\,t} \qquad (2.2)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2} \qquad (2.3)$$

Ecuación de movimiento

De este formalismo matemático, surgen las figuras 2.3-a y 2.3-b, que se corresponden con la posición, la velocidad, la aceleración y la trayectoria del movimiento.

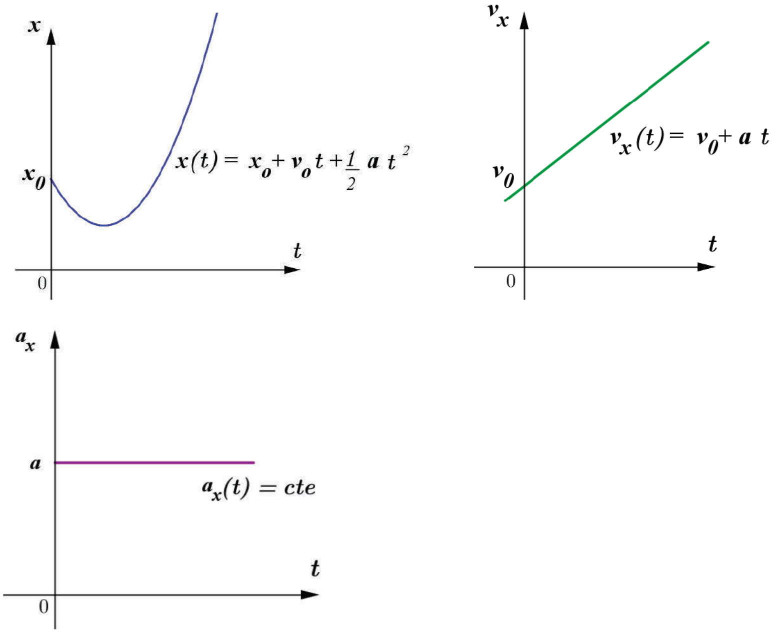


Figura 2.3-a

Gráfico de posición, velocidad y aceleración de un MRUV.

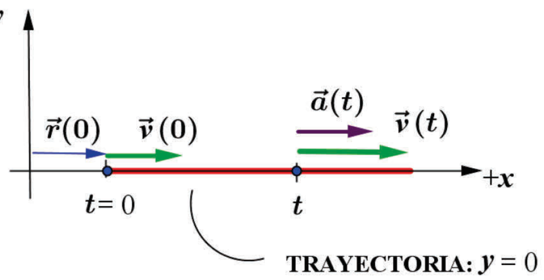
Observaciones

1. La ecuación para la trayectoria de la partícula es: $y = 0$, que representa al eje x en donde se desarrolla el movimiento, al igual que en el MRU.

2. Se han representado, los vectores $\vec{r}(0)$ y $\vec{v}(0)$ que corresponden a las CI del movimiento, y al vector aceleración que es constante en todo punto de la trayectoria.

Figura 2.3-b

Gráfico de trayectoria de un MRUV.



3. Todo vector tiene la dirección del eje x dependiendo su sentido del signo de su única componente no nula.

4. La ecuación de movimiento es una parábola, mientras que la trayectoria es una recta. Esto nos muestra que no tiene por qué existir relación alguna entre una y otra.

2.2 TIRO EN EL VACIO

El problema del movimiento de un proyectil fue objeto de estudio desde la Grecia antigua hasta los tiempos de Galileo Galilei (1564-1642), en donde nace una nueva ciencia y un nuevo concepto acerca del estudio del movimiento. Así, la Física de Aristóteles que estaba basada en la percepción sensible y por ende era totalmente antimatemática, se negaba a realizar una abstracción geométrica de hechos cualitativamente determinados por la experiencia y por el sentido común, negando la posibilidad misma de una física matemática.

Desde Galileo Galilei hasta la actualidad se entiende por problema del tiro de un proyectil al movimiento de un proyectil en el vacío y en las cercanías de la superficie de la Tierra.

Esta evolución en el estudio establece dos condiciones que en definitiva son aproximaciones realizadas a los efectos de poder abordar matemáticamente un problema que es complejo si no se realizaran. Analicemos un poco estas condiciones: *en el vacío y cerca de la superficie de la Tierra.*

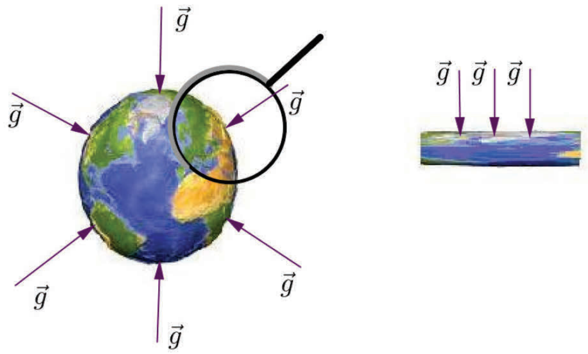
La palabra "vacío" que acompaña al tiro del proyectil, quiere significar que se desprecia la resistencia del aire, aproximación física importante que se realiza para destacar que la única acción perturbadora sobre el movimiento del proyectil es la gravedad.

La condición referente a que el proyectil se mueva en las cercanías de la superficie de la Tierra permite aproximar al campo gravitatorio como uniforme (constante) lo que da lugar a que en todo punto de la trayectoria del proyectil la aceleración será la de la gravedad, como se indica en la figura 2.4.

En dinámica se profundizará con un análisis matemático del por qué, cerca de la superficie de la Tierra, la aceleración es constante y se denomina aceleración de la gravedad, cuando se estudie la ley de gravitación universal elaborada por Newton.

Figura 2.4

Aceleración de la gravedad en la cercanía de la superficie de la Tierra.



En la figura 2.4, se observa que en una pequeña porción de la superficie terrestre, podemos aproximar la existencia de una aceleración constante e igual a la de la gravedad en dicha zona. Cuando decimos "cerca" de la superficie de la Tierra, queremos significar distancias no mayores a $10\ km$. En la figura 2.4 se puede ver que a estas distancias, la Tierra se ve plana. A mayor altura, se comienza a visualizar la curvatura terrestre. El hecho de que se pueda considerar como plana, permite aproximar, en una pequeña región, al campo gravitatorio como uniforme. Si el campo gravitatorio es aproximadamente uniforme en toda la región donde se mueve el proyectil, la aceleración de éste, en todo punto de su trayectoria será constante e igual a la denominada aceleración de la gravedad en el vacío de valor aproximado a $9{,}8\ m/s^2$.

Dependiendo de las CI con las que se arroje el proyectil, el tiro en el vacío da lugar a dos movimientos particulares que son:

1. Tiro vertical $\longrightarrow$ conduce a un MRUV
2. Tiro oblicuo $\longrightarrow$ conduce a un movimiento plano de trayectoria parabólica.

Es importante tener presente cómo las CI pueden influir en el movimiento del proyectil, dando lugar a los dos movimientos mencionados.

Cuando se arroja una pelotita al aire, dependiendo de cómo sea arrojada, es decir de las CI, resultarán dos movimientos diferentes: el denominado *tiro vertical* y el *tiro oblicuo* según muestra la figura 2.5.

Tiro vertical

Si la pelotita es arrojada con una velocidad inicial $\vec{v}(0)$ hacia arriba (no superando una altura de $10\ km$), o hacia abajo, describirá como trayectoria una recta y corresponderá a un MR, que además será uniformemente variado ya que la aceleración es constante e igual a la de la gravedad en todo punto de la trayectoria de la partícula.

Tiro oblicuo

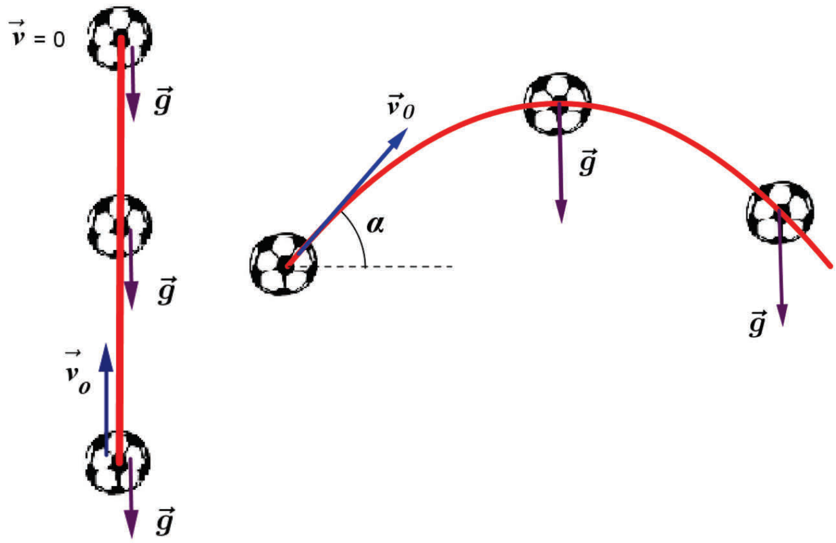
Si en cambio, la arrojamos de tal forma que la velocidad inicial $\vec{v}(0)$ forma un cierto ángulo con la horizontal, la pelotita describirá una trayectoria parabólica (demuéstrelo como ejercitación), que corresponde a un movimiento plano.

Se trata de un movimiento en el plano (x, y). Galileo fue el primero en mostrar que el movimiento parabólico de un proyectil en las cercanías de la Tierra es un movimiento compuesto por dos: uno horizontal y otro vertical independientes. Por lo tanto es un movimiento compuesto en el plano cuyas ecuaciones describirán movimientos independientes uno de otro en los ejes x e y respectivamente.

Ambos movimientos tienen en común la misma aceleración $\vec{g}$, pero cambiando una de las condiciones iniciales, como es el sentido del vector velocidad inicial $\vec{v}(0)$, la trayectoria pasa de ser una recta a una parábola.

Figura 2.5

Tiro vertical y tiro oblicuo al arrojar una pelota.



2.3 ARISTÓTELES, TEORIAS DEL MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL Y DEL VACIO

La explicación del movimiento de los proyectiles es un punto problemático dentro de la Teoría Aristotélica del movimiento.

El problema para esta teoría consiste en que los proyectiles continúan moviéndose después de haber dejado de estar en contacto con aquello que los ha impulsado. Esto parece en principio entrar en conflicto con el principio básico de la Teoría Aristotélica del movimiento, según la cual todo movimiento o cambio exige para poder seguir desarrollándose el contacto físico e ininterrumpido entre el agente y el paciente del cambio (todo tiene una causa, principio fundamental del Aristotelismo que no admite un movimiento sin causas).

En tal sentido, Aristóteles menciona aquí dos explicaciones diferentes que intentan conciliar el fenómeno del movimiento de los proyectiles con el señalado presupuesto básico de la causación.

La primera explicación mencionada, la cual corresponde a ciertas indicaciones de Platón (Timeo diálogo escrito por Platón en torno en el año 360 a. C.), es la del muto reemplazamiento. Según esta explicación, es el aire que el propio proyectil impulsa y desplaza delante de sí el que, al circular en dirección contraria al movimiento del proyectil, vuelve a su vez a impulsarlo por detrás y hace así que este continúe en movimiento a pesar de haber dejado de estar en contacto con aquello que lo impulsó.

La segunda explicación, en cambio, es la que el propio Aristóteles adopta y desarrolla más extensamente. Según esta, el motor, al impulsar el proyectil imprime a la vez movimiento al aire (o en general al medio), a través del cual el móvil se desplaza, y es este aire, dotado de un movimiento, es el que continúa impulsando el proyectil hacia adelante e impide que este siga su tendencia natural a moverse a su lugar propio (hacia abajo), al menos mientras el impulso transmitido por el aire o medio es superior a la tendencia del propio proyectil.

Más allá de sus diferencias de detalle y de la preferencia de Aristóteles por la segunda, las dos explicaciones poseen un elemento esencial en común: ambas buscan en la acción del medio la causa que justifica el movimiento de los proyectiles una vez abandonado el contacto con el motor, y ello por la simple razón de que es precisamente el medio el único objeto que está en contacto con el proyectil a lo largo de su movimiento.

Ahora bien, este tipo de explicación no es posible para el caso del movimiento en el vacío, por lo que es un argumento más para desechar la posibilidad de vacío dentro de la teoría Aristotélica.

Se ve claramente la falta de un racionalismo matemático en la teoría Aristotélica, e incluso la multiplicidad de explicaciones, para un mismo fenómeno lo que lleva aparejado desde ya a dar lugar a todo tipo de conjeturas al respecto. Una ciencia de la opinión, del sentido común, plagada de obstáculos que durante prácticamente dos mil años primó sobre toda otra teoría al respecto.

ARITÓTELES: FISICA LIBROS III y IV, Buenos Aires, ed. Biblos 1995

3 CINEMÁTICA: LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para poder resolver satisfactoriamente un problema de Física, es necesario adquirir diferentes capacidades, entre ellas comprender que resolverlo implica transformar su enunciado en un marco racional dentro del formalismo de la mecánica sin apartarse de las leyes que sustentan a esta teoría científica.

La opinión y el sentido común deben quedar totalmente fuera en la resolución de un problema de Física. La ciencia está enteramente ligada a las teorías científicas que le dan sustento y fueron alcanzadas por siglos de evolución en el pensamiento.

3.1 PAUTAS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE CINEMÁTICA

Al momento de iniciar la resolución de un problema de cinemática, se plantea la duda ¿por dónde comenzar? A continuación se proponen una serie de pasos generales que permiten seguir un camino, que podrá ser modificando a medida que se gane experiencia y práctica en la resolución de problemas, pero que en primera instancia ayudará a plantear la resolución de cualquier problema de cinemática.

1. Lectura del enunciado
2. Realización de un gráfico o boceto
3. Elección de un sistema de referencia (SR)
4. Escritura de las ecuaciones del movimiento
5. Dar respuesta a las consignas del problema

3.1.1 LECTURA DEL ENUNCIADO

Por lo general un problema de Física está referido a un hecho real, o a una situación que podría llegar a suceder en la realidad. Ahora bien, si se piensa en la naturaleza y en los hechos que la misma plantea, en ellos no hay enunciados. Por lo tanto un enunciado es una creación o una recreación en un lenguaje que no es el de la naturaleza y que trata de describir los acontecimientos. Hay que tener en cuenta que el enunciado es parte del problema. Nunca se le debe dar más valor del que realmente tiene, y tampoco esperar encontrar en él la solución al problema, ya que es una descripción metafórica que deberá permitir alcanzar la racionalización matemática de éste: escribir las ecuaciones matemáticas que representen la situación descripta en el enunciado.

Es conveniente hacer una primera lectura del enunciado sin tener en cuenta las cuestiones que plantea. Leerlo, en una primera instancia, sin importar qué es lo que pide encontrar. ¿Por qué? Porque la meta es la racionalización matemática del problema, y si la racionalización matemática es adecuada no sólo se podrán responder las cuestiones que plantea, sino que además, dicha racionalización permitirá alcanzar la cabal comprensión de la situación.

> Se comprende un problema cuando se lo resuelve. Y resolverlo significa que se ha logrado transcribir el enunciado en ecuaciones matemáticas dentro del racionalismo de la teoría (Mecánica) que le da sustento a la resolución.

3.1.2 REALIZACIÓN DE UN GRÁFICO O BOCETO

A partir de una segunda lectura del enunciado, hay que realizar un gráfico o boceto de la situación, llevando el enunciado y los hechos que en él se describen a un dibujo sencillo, en donde se ubiquen los actores (objetos) del problema, como así también las condiciones bajo las cuales se desarrollan.

Este boceto es muy importante pues permite obtener una imagen visual del enunciado, en la cual las metáforas que contiene se plasman en tiempos, posiciones, velocidades y aceleraciones, conceptos físicos que posibilitarán la racionalización matemática buscada.

3.1.3 ELECCIÓN DE UN SISTEMA DE REFERENCIA (SR)

Adoptar un SR es crucial en la resolución de todo problema de cinemática. Ninguna ecuación matemática, que se pueda escribir, tiene sentido si no se encuentra referenciada a algún SR. Si bien existe libertad en adoptar un SR, su elección debe estar enfocada a que sea parte de la solución del problema, ya que de ella surgen las ecuaciones matemáticas que son la verdadera descripción del problema. Un buen SR permite simplificar la interpretación racional de un problema.

3.1.4 ESCRITURA DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Para continuar con la resolución del problema, se deben plantear las ecuaciones de movimiento de los cuerpos que describe el enunciado. Cada cuerpo tendrá su juego de ecuaciones de movimiento que lo representará matemáticamente dentro del SR adoptado. Es importante destacar que no siempre la escritura de las ecuaciones podrá ser realizada en forma directa con los datos volcados en los gráficos realizados. Seguramente existirán datos dentro del enunciado que de alguna manera permitirán encontrar todas las constantes necesarias para escribirlas.

Con las ecuaciones de movimiento, se responderá cualquier situación planteada por el enunciado. Las ecuaciones de movimiento conforman el verdadero problema escrito en lenguaje matemático. Son el objetivo primordial de toda la Mecánica. Conocer las ecuaciones de movimiento de un objeto, es haber alcanzado la meta en lo que refiere a la matematización del problema.

3.1.5 DAR RESPUESTA A LAS PREGUNTAS DEL PROBLEMA

Este es el momento de abordar las cuestiones: ¿qué preguntas fueron formuladas y hay que responder?, o en otras palabras ¿qué es los que se quiere saber?

Las ecuaciones de movimiento que se han escrito y que recrean en forma matemática a la naturaleza del problema tienen toda la información necesaria para responder cualquier pregunta que se formule. Si no es así, está mal enunciado el problema o están mal escritas las ecuaciones de movimiento correspondientes. El verdadero problema es obtener las ecuaciones de movimiento y esa es la meta en su resolución.

3.2 SITUACIONES PROBLEMÁTICAS Y SU RESOLUCIÓN

A continuación se aplican a algunos problemas concretos esta serie de pasos que se acaban de describir, de forma que se comprenda que existe un método, y que ese método es posible desarrollarlo en toda resolución, sin salirse nunca del marco de la mecánica: las leyes que establecen su formalismo matemático.

Cada problema es resuelto con esta metodología en donde son explicados detalladamente los resultados de la aplicación de cada paso.

3.2.1 ENCUENTRO ENTRE DOS MÓVILES

En este primer problema se busca resolver el encuentro de dos móviles. Es importante observar las metáforas que encierra el enunciado en donde se consignan los distintos datos que surgen de ellas. Como el enunciado es parte del problema, no se debe esperar de él más información de la que brinda que es una pequeña narración de una situación física real.

Problema 3.2.1 Video: ***Cinemática clase 10/27***

Cuando las luces de un semáforo se ponen verdes, un automóvil que ha estado esperando acelera a razón de $1.2\ m/s^2$, mientras que un segundo automóvil, que acaba de llegar a la intersección en ese preciso instante continúa moviéndose con una velocidad constante de $36\ km/h$. Responder:
a) ¿Cuánto tiempo es necesario para que el primer automóvil alcance al segundo?
b) ¿Con qué velocidad se mueve en dicho instante y dónde se produce el encuentro?
c) Representar gráficamente las cuestiones planteadas.

- *Lectura del enunciado*

De la primera lectura, surge una imagen inicial de la situación planteada. Dos móviles, uno detenido en un semáforo esperando y otro que viene en movimiento se cruzan en el preciso instante en que el semáforo se pone en verde. Esta primera lectura brinda las pautas del gráfico/boceto que se va a realizar en la segunda lectura, tratando de llevar al mismo las distintas situaciones, e identificando en él los tiempos, posiciones, velocidades y aceleraciones que son los datos con que está nutrido el problema y nos permitirán escribir las ecuaciones de movimiento buscadas para poder acceder a las cuestiones.

Se identifican las metáforas utilizadas en donde se describen tiempos. Por ejemplo, el enunciado dice metafóricamente: "*cuando las luces del semáforo se ponen verdes*". En esta metáfora está implícitamente planteado un instante de tiempo: $t = 0$. A partir de este instante comienza la recreación de las ecuaciones que deberemos encontrar.

Asimismo, se puede ir identificando a cada móvil con su movimiento: un móvil que describe un MRUV, partiendo del reposo, y el otro móvil que describe un MRU.

- *Realización del gráfico o boceto*

El siguiente boceto es una posible ilustración del enunciado, en donde no sólo se han volcado los datos sino que se ha utilizado una nomenclatura adecuada, tratando de diferenciar a los dos móviles: móvil 1 inicialmente en reposo, y móvil 2 que viene moviéndose a velocidad constante.

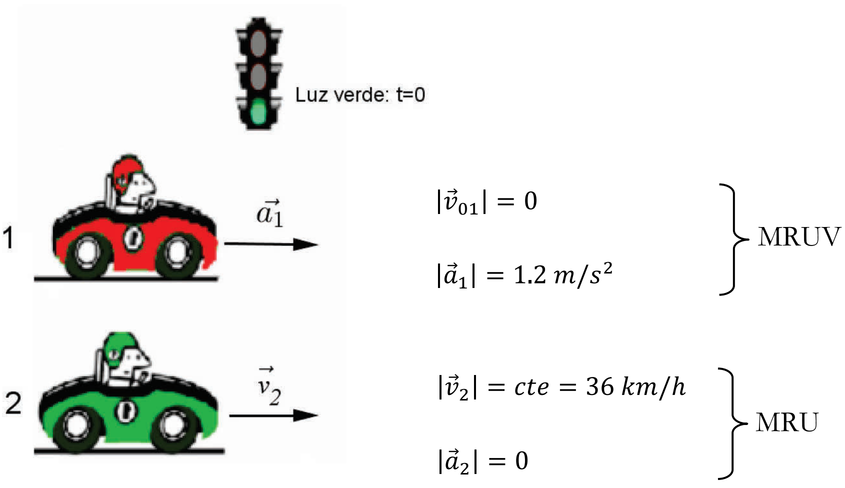


Figura 3.1

Boceto del enunciado del problema.

En la figura 3.1 se utilizan subíndices para diferenciar las distintas variables involucradas. Asimismo se han indicado los vectores y los módulos de los mismos que surgen de la lectura del enunciado. Observar que en esta instancia aún no fue adoptado ningún SR, simplemente se ha transcripto el enunciado en forma de un gráfico o boceto indicando las variables reconocidas.

- *Elección de un SR*

Este problema implícitamente sugiere que se adopte al eje de las x coincidente con la dirección de movimiento de ambos móviles. Además el origen de coordenadas que conducirá a ecuaciones más sencillas es el representado por el semáforo, que es donde por primera vez están juntos ambos móviles. La figura 3.2 muestra el SR adoptado y la descomposición de los distintos vectores de acuerdo al mismo (eje x), en donde ahora sí se puede expresar cada vector representado con sus respectivas componentes.

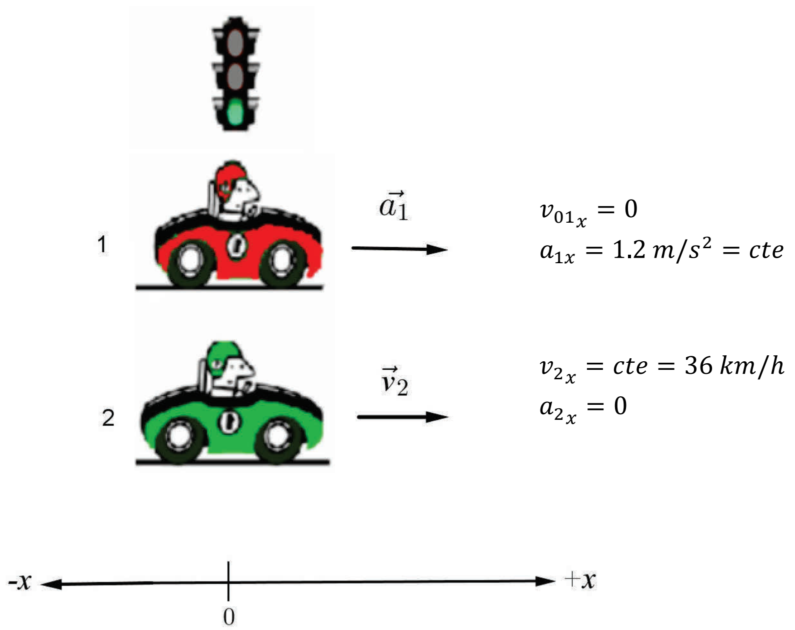


Figura 3.2

Sistema de referencia y magnitudes vectoriales que intervienen en el problema.

- *Escritura de las ecuaciones de movimiento*

Del SR adoptado y de las condiciones iniciales (CI) que fueron volcadas en los gráficos realizados, según los tipos de movimiento que se han reconocido para los móviles surgen los siguientes juegos de ecuaciones de movimiento para cada uno de ellos.

Móvil 1: MRUV

El móvil 1, partiendo del reposo y del origen de coordenadas, posee una ecuación de movimiento correspondiente a un MRUV según se indica a continuación:

$$a_{1x} = cte = 1.2\,m/s^2 \qquad x_{01} = 0 \qquad v_{01} = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = x_{01} + v_{01} + \frac{1}{2} a_{1x}\, t^2 = \frac{1}{2}\ 1.2\ t^2 = \ 0.6\, t^2\ \ m \\ v_{1x}(t) = 1.2\, t \quad m/s \end{array} \right.$$

Móvil 2: MRU

El móvil 2, que se mueve a velocidad constante de $36\,km/h$ y que cruza el origen de coordenadas adoptado para el instante $t = 0$, responde matemáticamente a la ecuación de movimiento correspondiente a un MRU. Es importante destacar que deben expresarse los $36\,km/h$ en el Sistema Internacional, en m/s.

$$v_{2x} = cte = 36\,km/h = 10 m/s \qquad x_{02} = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_2(t) = x_{02} + v_{2x} t = 10\, t \ \ m \\ v_{2x}(t) = 10\, m/s \end{array} \right.$$

- *Respuesta a las consignas del problema*

a) Igualando las posiciones de ambos móviles, se obtienen el instante y el punto de encuentro. Cabe destacar que en $t = 0$ ambos móviles ocupaban la misma posición $x = 0$. Por lo tanto en la solución del problema hay dos tiempos en los cuales las posiciones se igualan. Matemáticamente se deben igualar las ecuaciones de movimiento de ambos móviles para poder hallar los tiempos de encuentro.

$x_1(t_e) = x_2(t_e)$; $t_e =$ tiempo de encuentro

$0.6\, {t_e}^2 = 10\, t_e$ de donde surgen las siguientes soluciones: $t_{e1} = 0\, s$ y $t_{e2} = 16.67\, s$

b) Para hallar la velocidad del móvil 1 en el instante $t_{e2} = 16.67\, s$, se debe especializar la ecuación para la velocidad del móvil en dicho instante de tiempo. Para hallar el punto de encuentro, se puede especializar en cualquiera de las dos ecuaciones de movimiento, tanto en la del móvil 1 como en la del 2 en el instante $16.67\, s$.

Recordar, que el otro punto de encuentro, $x = 0$ corresponde para $t = 0$ ya que ambos partieron del mismo origen en dicho instante.

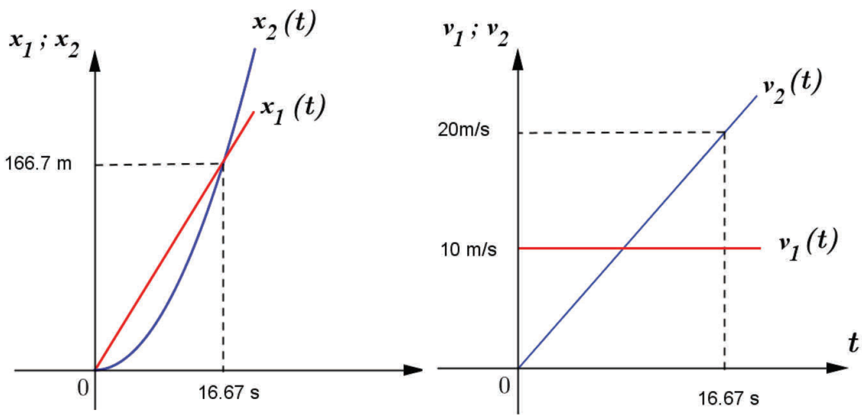
$$v_1(t) = 1.2\, t \quad \Rightarrow v_1(16.67\, s) = 1.2\ \ 16.67\, m/s = 20\, m/s$$

$$x_1(16.67\, s) = x_2(16.67\, s) = 0.6\,(16.67)^2\ m = 166.7\, m$$

c) En figura 3.3 se han representado gráficamente las ecuaciones de movimiento y de la velocidad para ambos móviles. En ellos se puede visualizar que en el instante de encuentro $t_{e2} = 16.67\, s$, si bien las posiciones ocupadas son las mismas, las velocidades no lo son. Esto físicamente significa que en dicho instante el móvil 2 que partió del reposo alcanza al móvil 1, situación que únicamente es posible si en dicho instante su velocidad es superior a la del móvil 1. Observar que en el instante $t_{e2} = 16{,}67\, s$, las pendientes de las rectas tangentes a las ecuaciones de movimiento, que definen el valor de la componente de la velocidad, son diferentes, y es mayor la correspondiente al móvil 2.

Figura 3.3

Representación gráfica de las ecuaciones de movimiento y de la velocidad.



No olvidar que en estos movimientos la trayectoria es una recta y que las ecuaciones de movimiento son las componentes del vector posición. Además hay que tener presente que cuando decimos que la componente del vector velocidad es tangente en el punto a la ecuación de movimiento, nos referimos a una componente. El vector velocidad, como vector, es tangente a la trayectoria que describe la partícula en un punto, y puede ser representado únicamente en el espacio cartesiano donde tiene lugar el movimiento.

OPCIONAL: Como finalización de este ejercicio, Ud. podría realizar una representación de las trayectorias de ambas partículas, en donde se indiquen además los vectores: velocidad final, aceleración y posición en el instante de encuentro de las partículas.

3.2.2 TIRO VERTICAL

Este segundo problema posee un breve enunciado que contrasta con el alto contenido de información que encierra y debe reconocerse. Además permite resaltar la importancia que tiene el objetivo de matematizarlo antes de comenzar con la búsqueda de las cuestiones planteadas.

Problema 3.2.2 Video: *Cinemática clase 12/27*

Una pelota arrojada verticalmente hacia arriba regresa a su punto de partida 6 segundos más tarde.
a) ¿Cuán alto ascendió?
b) ¿Cuál es la velocidad cuando llega a las manos de quién la arrojó?

- *Lectura del enunciado*

El enunciado del problema como puede observarse es muy breve y sencillo. Sin embargo posee mucha información que implícitamente está contenida en el mismo, aportando los datos necesarios para cumplir con el objetivo de escribir la ecuación de movimiento de la pelota.

En primer lugar, se puede destacar que la pelota se arroja desde algún punto. Podemos pensar que se encuentra en nuestras manos y que la arrojamos verticalmente hacia arriba, con una cierta velocidad inicial. De esta forma la pelota se encontrará en nuestras manos tanto en el tiempo $t = 0$ como en el tiempo $t = 6$ segundos, que es el tiempo que tarda en subir y bajar.

En este enunciado, como suele ocurrir, hay situaciones que no están del todo claras que hay que interpretar físicamente y visualizarlas en un gráfico o boceto. Por ejemplo, no está claro cómo y quién arroja la pelota, pero la metáfora empleada "arrojada verticalmente hacia arriba" indica una velocidad inicial con sentido hacia arriba.

Por otro lado, se puede interpretar que la pelota alcanzará una altura máxima, a partir de la cual comenzará a descender. En este punto, la velocidad de la pelota debe ser 0, pues de lo contrario seguiría ascendiendo.

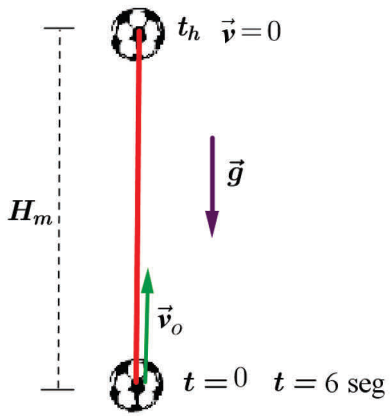
Finalmente, como se trata de un tiro vertical, se debe suponer que en todo el trayecto la aceleración es la de la gravedad y es constante. Se trata de un MRUV.

- *Realización de un gráfico o boceto*

La figura 3.4 ilustra el boceto correspondiente a la situación planteada en el problema, en donde se han volcado los datos que surgen de la lectura del mismo, aunque no estén explícitamente detallados en el enunciado.

Figura 3.4

Boceto de la situación planteada.



Por tratarse de un tiro vertical, se asume que el mismo se realiza en las cercanías de la superficie de la Tierra, y que se desprecia la resistencia del aire. De esta forma el movimiento se desarrollará con aceleración constante, igual a $\vec{g}$, como indica la figura 3.4.

También, se indica la altura máxima que alcanzará la pelota, que corresponde a un instante de tiempo en que la velocidad se hace cero.

Finalmente, observar que se da una dirección y sentido para el vector velocidad inicial, del cual se desconoce su módulo.

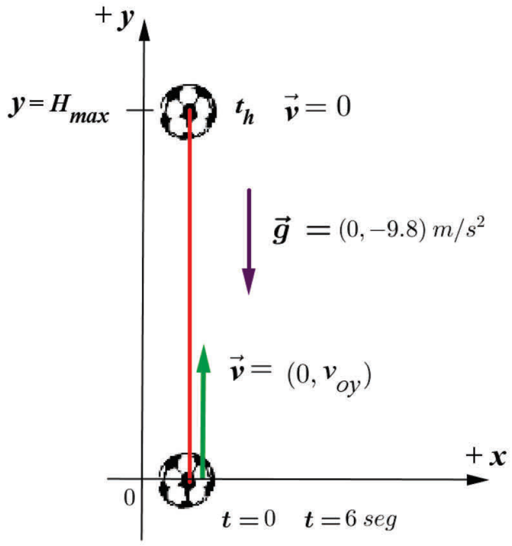
- *Elección de un (SR)*

El SR que se elija debe ayudar en la posterior resolución del problema. Es evidente que en esta situación conviene tomar como origen el punto inicial donde se arroja la pelota: la mano. Se toma el sentido positivo hacia arriba, pero cabe destacar que se podría haber tomado hacia abajo. Como el movimiento es vertical, se hace coincidir al eje y con la trayectoria de la partícula.

En la figura 3.5 se indican los distintos vectores que se representaron en el boceto, descompuestos según la referencia adoptada. Así, se pueden observar los vectores $\vec{g}$ y $\vec{v}_0$ con sus respectivas componentes.

Figura 3.5

Sistema de referencia, condiciones iniciales y vectores que intervienen.



- *Escritura de las ecuaciones del movimiento*

La ecuación de movimiento para un MRUV, responde a la siguiente expresión general:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2}\, a_y\, t^2$$

Por tratarse de un tiro vertical, la aceleración es $\vec{g}$, vector que de acuerdo con el SR adoptado, tiene las siguientes componentes: $\vec{g} = (0, -9.8)\ m/s^2$. Bajo esta premisa, la ecuación general para el MRUV adopta la siguiente forma:

$$y(t) = v_{0y}\, t - \frac{1}{2}\, 9.8\ t^2\ m$$

Se observa que en la última ecuación la componente inicial para la velocidad es una incógnita. Resta por lo tanto encontrar v_{0y}, para poder realmente haber racionalizado el problema.

Sin embargo, aún no se ha utilizado un dato: $t = 6$ segundos que corresponde al instante en que la partícula vuelve al punto de partida $y = 0$. Especializando la ecuación de movimiento para $t = 6\ s$, la situación física se traduce en el siguiente formalismo matemático:

$$y(6) = 0 = v_{0y}\ (6) - \frac{1}{2}\ 9.8\ (6)^2\ m$$

De esta manera se obtiene una ecuación, cuya única incógnita es v_{0y}, de donde resulta el siguiente valor para la velocidad inicial:

$$v_{0y} = 29.4\ m/s$$

Así, finalmente se obtiene la siguiente ecuación de movimiento que racionaliza matemáticamente al enunciado:

$$y(t) = 29.4\, t - \frac{1}{2}\, 9.8\, t^2 = 29.4\, t - 4.9\, t^2\ m$$

- *Respuesta a las consignas del problema*

Para calcular la altura máxima H_m, se debe tener en cuenta el hecho físico que significa para la partícula alcanzar dicha altura: deja de subir. Esta situación corresponde a que su velocidad sea 0. Así, se puede igualar la velocidad de la partícula a 0 y encontrar el tiempo t_h para el cual se produce dicha situación. Matemáticamente:

$v_y(t) = 29.4 - 9.8\,t$ $\quad$ $v_y(t_h) = 0 = 29.4 - 9.8\,t_h$ $\quad$ de donde resulta $\quad$ $t_h = 3\,s$

Cabe destacar que es un resultado esperado, concebido por alguien que tiene un camino ya recorrido en la mecánica de Newton. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el hecho físico de que el tiempo de subida sea igual al de bajada es un resultado que surge como consecuencia de la racionalización matemática del problema. Esto no es resultado ni de la intuición ni del sentido común.

Habiendo obtenido el tiempo para el cual la pelota alcanza la altura máxima, y reemplazando este tiempo en la ecuación de movimiento, surge la altura que ascendió la pelota.

$H_m = y(3s) = 29.4\,(3) - 4.9(3)^2 = 44.1\,m$

Resta calcular la velocidad de la partícula cuando retorna al punto de donde fue arrojada, 6 segundos después. Reemplazando en la ecuación de la velocidad de la partícula para $t = 6\,s$, se obtiene el valor buscado:

$v_y(6s) = 29.4 - 9.8\,(6) = -29.4\,m/s$

Otro resultado interesante que merece ser comentado: la velocidad es en módulo igual a la de partida, pero de sentido contrario. En la medida que se avance en el estudio de la mecánica, este resultado va a ser valorado por las implicancias energéticas que encierra. A esta altura, en cinemática, destacamos que el módulo de la velocidad es igual en el punto de partida y llegada.

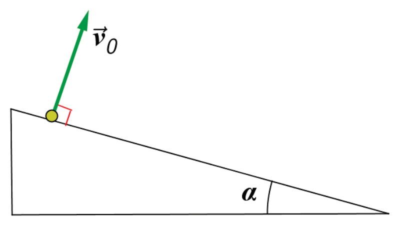
OPCIONAL: Le proponemos obtener el tiempo que tarda en llegar la pelota a una altura menor que la máxima, tanto en la subida como en la bajada y calcular la velocidad en ese instante.

3.2.3 TIRO OBLICUO SOBRE UN PLANO INCLINADO

Este problema aborda la libertad y condicionamientos que surgen en la elección de un SR adecuado en la resolución de un problema. Si bien hay libertad de elección de un SR, las ecuaciones de movimiento que surjan pueden condicionar la resolución del mismo.

Problema 3.2.3 video: ***Cinemática clase 14/27***

Desde la superficie de un plano inclinado un ángulo α con la horizontal se arroja un proyectil con una velocidad inicial en la dirección y sentido indicado en la figura. Si el plano es lo suficientemente largo, encontrar el punto en donde el proyectil impacta con él.



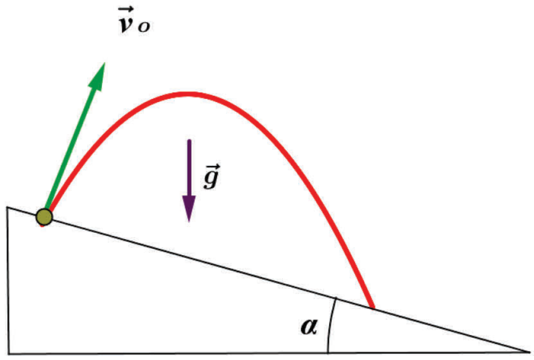
- *Lectura del enunciado y realización de un gráfico o boceto*

El enunciado de este problema está acompañado por un dibujo ilustrativo, que puede mejorarse a los efectos de incluir toda la información necesaria para escribir las ecuaciones de movimiento.

En la figura 3.6 se representa en forma aproximada la trayectoria que describe el proyectil, y se indica al vector $\vec{g}$ presente en todo el movimiento del mismo. El movimiento corresponde al de un tiro oblicuo, caso particular del tiro en el vacío, en el cual las condiciones iniciales del lanzamiento se aprecian en el mismo boceto.

Figura 3.6

Boceto de la situación planteada.



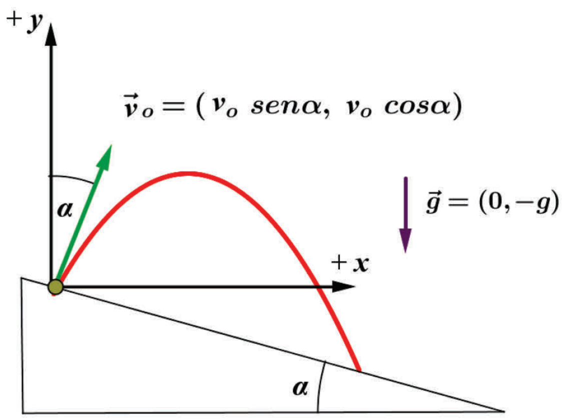
- *Elección de un (SR)*

Todo indica que un sistema de referencia adecuado será el que se ilustra en la figura 3.7, que denominamos sistema de referencia 1 (SR 1). Sin embargo, este sistema de referencia, si bien conduce en forma simple a obtener las ecuaciones de movimiento del proyectil, complica la resolución de problema al momento encontrar el punto de impacto sobre el plano.

Figura 3.7

Sistema de referencia 1 (SR1).

$$CI \begin{cases} \vec{v}_0 = (\,v_0 \;\; sen\alpha\,, v_0 \;\; cos\;\alpha) \\ \vec{r}_0 = (\,0\,,0) \end{cases}$$

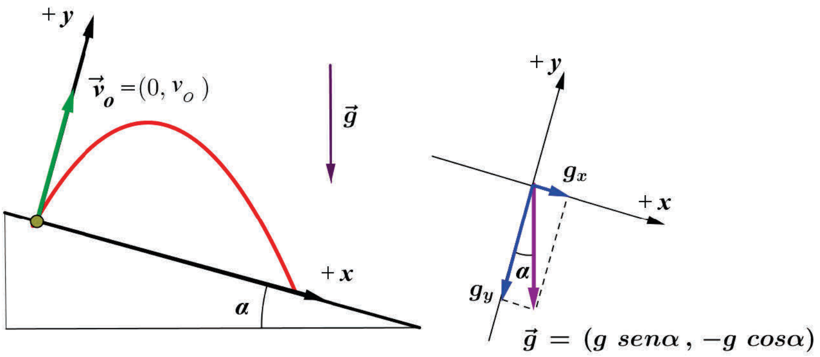


La elección del sistema de referencia 2 (SR 2) presentado en la figura 3.8, conduce a ecuaciones de movimiento más complejas porque hay que descomponer la aceleración en los dos ejes. Sin embargo al momento de realizar el cálculo del punto de impacto es mucho más simple el planteo matemático.

Figura 3.8

Sistema de referencia 2 (SR2).

$$CI \begin{cases} \vec{v}_0 = (0\,, v_0) \\ \vec{r}_0 = (0\,, 0) \end{cases}$$



- *Escritura de las ecuaciones del movimiento*

Se trata de un movimiento en el plano (x, y) de acuerdo con el SR adoptado. Por lo tanto es un movimiento compuesto en el plano cuyas ecuaciones describirán movimientos independientes uno de otro en los ejes x e y respectivamente.

Las ecuaciones de movimiento para el SR1, se muestran a continuación. En el eje x la partícula describe un MRU (no hay aceleración en la dirección del eje x), mientras que en el eje y posee un MRUV.

Ecuaciones de movimiento SR1:
$$\begin{cases} x_1(t) = v_{0x}\, t = v_0\, sen\alpha\ \ t \\ \\ y_1(t) = v_{0y}\, t + \dfrac{1}{2}\, a_y\, t^2 = v_0\, cos\alpha\ \ t - \dfrac{1}{2}\, g\, t^2 \end{cases}$$

Las ecuaciones de movimiento para el SR2, corresponden en ambos ejes, a dos MRUV, debido a las componentes de la aceleración $\vec{g}$.

Ecuaciones de movimiento SR2:
$$\begin{cases} x_2(t) = v_{0x}\, t + \dfrac{1}{2} a_x t^2 = \dfrac{1}{2}\, g\, sen\alpha\ \ t^2 \\ y_2(t) = v_{0y}\, t + \dfrac{1}{2}\, a_y\, t^2 = v_0\ \ t - \dfrac{1}{2}\, g\, cos\alpha\, t^2 \end{cases}$$

Es de destacar la diferente complejidad de las ecuaciones de movimiento obtenidas. También se debe tener en cuenta que la trayectoria que ambos juegos de ecuaciones encierran es la misma parábola que describe el proyectil en su movimiento. Si bien son diferentes las ecuaciones de movimiento, ambos SR representan la misma trayectoria y deben por lo tanto dar cuenta de ella.

- *Dar respuesta a las consignas del problema*

Para dar respuesta a las preguntas del problema se comienza a trabajar con las ecuaciones de movimiento correspondientes al SR2. Bajo este sistema de referencia, el punto de impacto del proyectil con el plano inclinado se reduce a encontrar el instante de tiempo para el cuál $y_2(t) = 0$. Al calcular este instante de tiempo, y reemplazarlo en la ecuación $x_2(t)$, se obtiene la distancia sobre el plano en la cual impacta el proyectil. La distancia que hay entre el punto de partida del proyectil y el punto de impacto. En forma matemática:

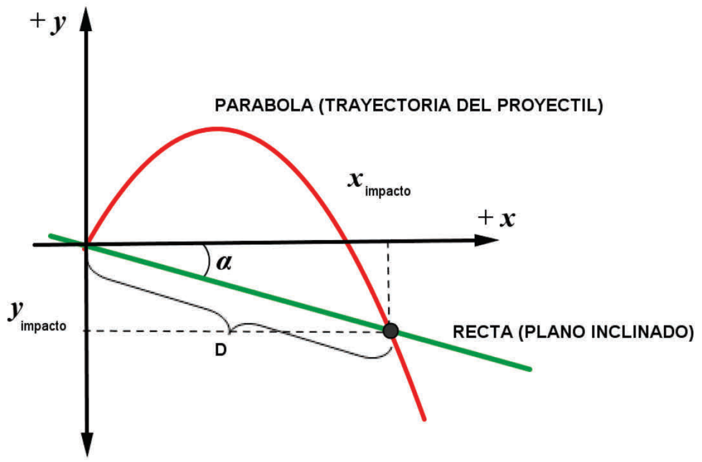
$$y_2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = v_0\ t - \tfrac{1}{2}\ g\ cos\alpha\ t^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = \dfrac{2v_0}{g\ cos\alpha} \end{cases}$$

$$x_2(t_2) = \frac{1}{2}\ g\ sen\alpha\ \left(\frac{2v_0}{g\ cos\alpha}\right)^2 = \frac{2\ v_0^2\ sen\alpha}{g\ \ cos^2\alpha}$$

Para dar respuesta a la misma consigna utilizando el SR1, hay que trabajar con el juego de ecuaciones correspondiente a ese sistema de referencia. Como el proyectil, no impacta sobre ninguno de los dos ejes, sino sobre el plano (que no coincide con ningún eje en particular), se debe encontrar el punto de intersección entre la trayectoria que describe el proyectil (una parábola) y la ecuación de la recta que matemáticamente representa al plano, según se puede observar en la figura 3.9.

Figura 3.9

Intersección entre la trayectoria y la recta que representa al plano.



La ecuación matemática de la parábola que corresponde a la trayectoria del proyectil se puede obtener a partir de las ecuaciones de movimiento, eliminando t entre ellas para hallar $y(x)$. Despejando t de $x(t)$ y especializando este valor en $y(t)$ se obtiene la trayectoria buscada. Matemáticamente:

$$y = \frac{x}{tg\alpha} - \frac{1}{2}\frac{g}{(v_0\ sen\alpha)^2}\ x^2$$

La ecuación de la recta, que representa matemáticamente al plano inclinado es la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas y de pendiente conocida (la pendiente del plano inclinado con la horizontal). Matemáticamente:

$$y = -tg\alpha\ \ x$$

Sin embargo, todavía no se resuelve el problema. Hay que encontrar el punto de intersección de estas dos curvas (recta y parábola) que corresponden físicamente al punto de impacto del proyectil sobre la superficie del plano.

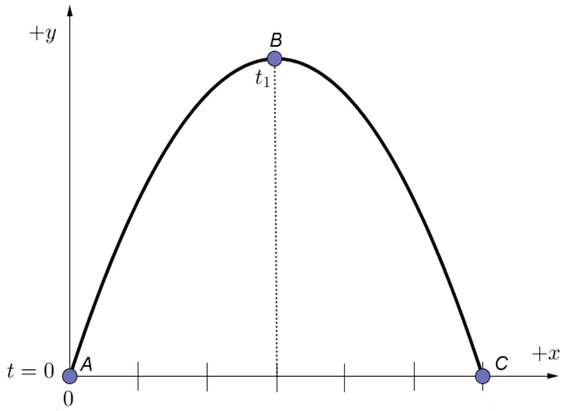
OPCIONAL: Hallar el punto de intersección mencionado en el último paso. Este punto, no responde aún a la consigna, ya que la misma plantea que se encuentre la distancia D entre el punto de partida del proyectil y el de impacto. Sin embargo aplicando el teorema de Pitágoras, se logra encontrar la distancia D buscada.

3.2.4 TIRO OBLICUO EN UN PLANETA

Con este problema, se intenta reafirmar aún más los conocimientos del tiro en el vacío, y sobre todo lo que significa poder comprender la información contenida dentro de un gráfico que surge del estudio experimental del movimiento

Problema 3.2.4 Video: ***Cinemática clase 13/27***

Se lanza un proyectil en la superficie de un planeta desconocido con el fin de estudiar la gravedad en el mismo. Se realiza la siguiente gráfica de la experiencia, donde se observa que en un tiempo t_1 la pelota alcanza la altura máxima. La componente vertical inicial de la velocidad es de $80\ m/s$. En el diagrama se indican los tiempos y posiciones en el eje x. Observar que en el eje y no se informan posiciones.
Datos: $t_1 = 4\ s$ y cada división del eje x equivale a $16\ m$



Calcular y representar los vectores velocidad y vectores aceleración en los puntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ indicados.

- *Lectura del enunciado*

Del enunciado y la gráfica de la posición del proyectil que presenta el problema se desprende información básica que permitirá escribir la ecuación del movimiento correspondiente.

Se puede observar del gráfico de la trayectoria del proyectil, que se arroja desde el origen de coordenadas, punto A, y que luego de un tiempo $t_1 = 4\ s$ alcanza la altura máxima. El proyectil parte de su posición inicial ($t = 0$) con una componente vertical de su vector velocidad de $80\ \mathrm{m/s}$, regresando a la altura de donde se arrojó luego de 8 segundos (punto C), que es el tiempo que tarda en subir y bajar.

Del gráfico proporcionado, se puede interpretar que la pelota alcanzará una altura máxima, a partir de la cual comenzará a descender impactando contra el piso, eje x, a $96\ m$ de donde se arrojó, considerando la escala proporcionada, donde cada división en el eje x equivale a $16\ m$.

Finalmente, como se trata de un tiro oblicuo, se debe suponer que en todo el trayecto la aceleración es la de la gravedad del planeta considerado y será considerada constante por encontrarse cerca de la superficie. Se trata entonces de un movimiento plano con aceleración constante.

- *Realización de un gráfico o boceto*

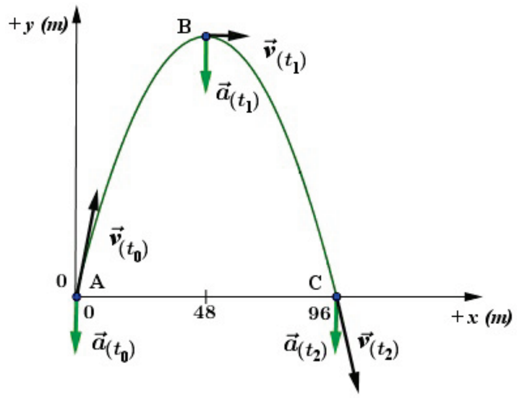
La figura 3.10 ilustra el boceto correspondiente a la situación planteada en el problema, en donde se han representado los vectores aceleración y velocidad en cada punto de acuerdo a lo solicitado en el enunciado, a pesar de no haber aún realizado cálculos para los mismos.

La situación problemática trata de un tiro oblicuo en un determinado planeta, por lo tanto se asume que el mismo se realiza en las cercanías de la superficie, y que se desprecia toda resistencia al movimiento con el aire si la hubiera. De esta forma el movimiento se desarrollará con aceleración constante, igual a $\vec{a}$, perpendicular a la superficie del planeta en todos los puntos considerados, como indica la figura 3.10. Se ha graficado también la velocidad en cada punto que como corresponde, debe ser tangente en cada punto a la trayectoria seguida por el proyectil.

Además, se destaca el punto B donde alcanzará la pelota la altura máxima, que corresponde al instante tiempo $t_1 = 4\ s$, en el cuál la componente vertical de la velocidad se hace cero (vértice de la parábola), y por lo tanto el vector velocidad tendrá una dirección paralela a la superficie del planeta.

Figura 3.10

Boceto de la situación planteada.



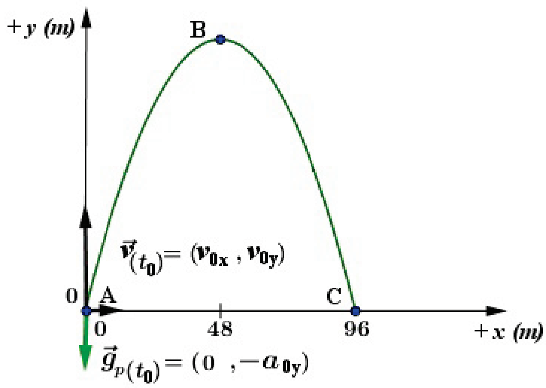
- *Elección de un (SR)*

Como ya se indicó el SR que se elija debe ayudar en la posterior resolución del problema. Es evidente que en esta situación conviene tomar como origen el punto inicial donde se arroja el proyectil. Se toma el sentido positivo hacia arriba y hacia la derecha, pero cabe destacar que se podría haber tomado hacia abajo y a la izquierda.

En la figura 3.11 se indican distintos vectores en la condición inicial, que se representaron en el boceto, descompuestos según la referencia adoptada. Así, se pueden observar los vectores $\vec{a} = \vec{g}_p$ (aceleración de la gravedad en el planeta estudiado), que representará la gravedad del planeta y $\vec{v}_0$ con sus respectivas componentes.

Figura 3.11

Sistema de referencia, condiciones iniciales y vectores que intervienen.



- *Escritura de las ecuaciones del movimiento*

Las ecuaciones de movimiento corresponden a un tiro oblicuo en el vacío con aceleración constante. Si generalizamos para los movimientos en el eje x y en el eje y, independientes uno del otro, el vector posición $\vec{r}(t)$ puede escribirse como sigue:

$$\vec{r}(t)\ \begin{cases} y(t) = y_0 + v_{0y}\,t + \dfrac{1}{2}\,a_y\,t^2 \\ \\ x(t) = x_0 + v_{0x}\,t + \dfrac{1}{2}\,a_x\,t^2 \end{cases}$$

Mientras que el vector velocidad $\vec{v}_{(t)}$ resulta de la forma:

$$\vec{v}_{(t)}\ \begin{cases} v_y(t) = \ v_{0y} + a_y\,t \\ \\ v_x(t) = v_{0x} + \ a_x\,t \end{cases}$$

Por tratarse de un tiro oblicuo en un planeta el vector aceleración es $\vec{a} = \vec{g}_p$. De acuerdo con el SR adoptado, las componentes del vector aceleración de la gravedad en el planeta son:

$\vec{g}_p = (0, -a_y)\ m/s^2$.

Bajo esta premisa, las ecuaciones generales para para $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}_{(t)}$ adoptan la siguiente forma:

$y(t) = v_{0y}\,t - \frac{1}{2}\,a_y\,t^2$

$x(t) = v_{0x}\,t$

$v_y(t) = \ v_{0y} - a_y\,t$

$v_x(t) = v_{0x}$

- *Respuesta a las consignas del problema*

De los datos del problema se conoce que la componente vertical de la velocidad inicial del proyectil es igual a $80\ m/$s y que a los $4\ s$ alcanza la altura máxima, de lo que se desprende que la componente de velocidad vertical en ese instante es igual a cero. Resta por tanto encontrar v_{0x}.

Especializando en la ecuación para la componente vertical de la velocidad en $t = 4\ s$, resulta:

$v_y(4) = \ 0 = 80\ m/s + a_y\ 4\ s$

De esta manera se obtiene una ecuación, cuya única incógnita es a_y, de donde surge el siguiente valor para la aceleración de la gravedad en el planeta:

$a_y = 20\ m/s^2$

Considerando que en los $4\ s$ citados el proyectil recorrió la mitad del alcance en x, de la ecuación de la posición $x(t)$, puede ser calculada la componente horizontal del vector velocidad, que se mantiene constante a lo largo de toda la trayectoria.

$x(4) = 48\ m = v_{0x}\ 4\ s$

$v_{0x} = 12\ m/s$

Así, previo al cálculo de la velocidad del proyectil al llegar al punto C se puede obtener el tiempo de vuelo t_2 de la ecuación de movimiento, considerando que en ese instante alcanzó la superficie del planeta.

$$y(t) = 0 = 80\,m/s\,t - \frac{1}{2}\,20\,m/s^2\,t^2 = t\,(80\,m/s - 10\,m/s^2\,t)$$

Vemos que esta ecuación tiene dos soluciones, una conocida para $t_0 = 0$ y la otra $t_2 = 8\,s$. Si bien es un resultado esperado dada la simetría de la función cuadrática, ya fue comentado que puede ser esperado para alguien que tiene un camino ya recorrido en la mecánica de Newton. Sin embargo, nuevamente aquí es un resultado que surge como consecuencia de la racionalización matemática del problema. Con este último tiempo ahora se está en condiciones de calcular la velocidad en C , punto alcanzado en $t = 8s$:

$$v_y(8) = \ 80\,m/s - 20\,m/s^2\ \ 8\,s = -\,80\,m/s$$

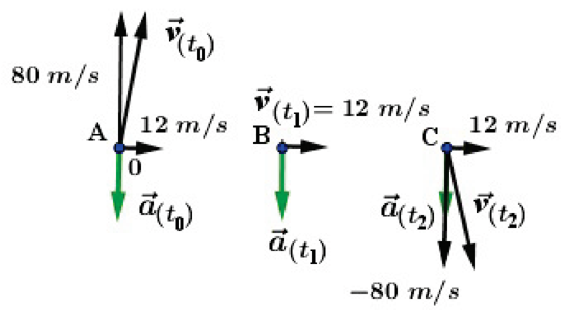
$$v_x(8) = 12\,m/s$$

Nuevamente observamos que la velocidad obtenida es en módulo, igual a la de partida, pero de sentido contrario, reflejado por el cambio de signo de la componente vertical del vector obtenido respecto del de partida.

De esta forma podemos representar como solicita la consigna, los vectores velocidad y aceleración en los puntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ de la trayectoria como se indica en la figura 3.12:

Figura 3.12

Vectores velocidad y aceleración en los puntos solicitados.



3.2.5 MOVIMIENTO VERTICAL DE DOS PIEDRAS

En este problema, de encuentro de dos móviles, pondremos de manifiesto la importancia de la racionalización integral de un problema. Siempre debe esperarse que el racionalismo solucione las partes que pudieran ser detectadas dentro de un proceso involucrado en un problema, y debe evitarse en lo posible el dividirlo, por más que de su lectura se considere que se sugiere esto.

Problema 3.2.5 Video: ***Cinemática clase 15/27***

Una piedra A, inicialmente en reposo, cae desde la orilla de un peñasco. Un segundo más tarde, una segunda piedra B es arrojada hacia abajo de la orilla del mismo peñasco, con una rapidez inicial de $12\,m/s$. Si las dos piedras chocan en el fondo, calcular: a) ¿Cuán alto es el peñasco? b) ¿Cuál es la velocidad de las piedras en el fondo? c) Representar en un mismo gráfico la posición de las piedras en función del tiempo. d) Representar en un mismo gráfico la velocidad de las piedras en función del tiempo. ($g = 9.8\,m/s^2$)

- *Lectura del enunciado*

Se desprende de la lectura que las piedras seguirán una trayectoria vertical aceleradas por acción de la gravedad. Ambas en una caída libre, pero con una diferencia de tiempo de lanzamiento de 1 segundo. No debe detenernos el que los tiempos estén corridos en 1 segundo. Serán planteadas ecuaciones de movimiento para cada piedra, en forma independiente, para luego si tener en cuenta que ambos tiempos de observación están separados por 1 segundo.

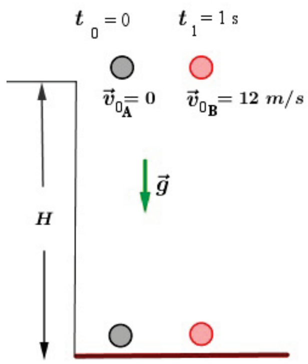
- *Realización de un gráfico o boceto*

La situación problemática trata de sendos MRUV, si se asume que los mismos se realizan en las cercanías de la superficie de la tierra, por lo que la aceleración de la gravedad es $9.8\, m/s^2$, y se desprecia en este caso toda resistencia al movimiento con el aire. De esta forma los movimientos se desarrollarán con aceleración constante, igual a $\vec{g}$, perpendicular a la superficie del planeta en todos los puntos considerados, como indica la figura 3.13.

Se ha aclarado para cada piedra el tiempo de partida, $t_0 = 0\, s$ para para la que hemos denominado A y $t_1 = 1\, s$ para la B, que es lanzada con una velocidad inicial vertical de $12\, m/s$.

Figura 3.13

Boceto de la caída de las piedras.



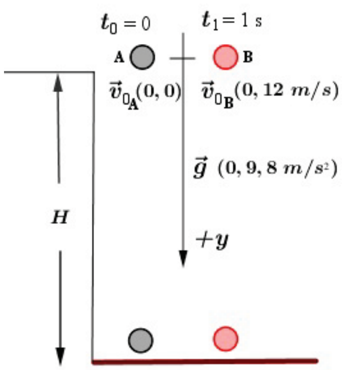
- *Elección de un (SR)*

En este problema se pude observar que la altura del peñasco H es una incógnita y que el sistema de referencia se puede tomar en forma independiente de ésta. Conviene ubicar el cero del sistema en la posición inicial desde donde son lanzadas ambas piedras, considerando el eje y como positivo hacia abajo, ya que ambos movimientos se desarrollan hacia abajo. Se ha destacado la importancia de la elección de un buen SR. De dicha elección surgirán las ecuaciones de movimiento, en este caso de ambas piedras. Tomar el eje positivo hacia abajo, permite manejar magnitudes positivas durante el desarrollo del problema.

En la figura 3.14 se indican los distintos vectores que se representaron en el boceto, descompuestos según la referencia adoptada. Así, se puede escribir el vector aceleración $\vec{g} = (0,\ 9.8)\ m/s^2$, que representará la gravedad de la Tierra, y la velocidad inicial de la piedra B, $\vec{v}_{0B} = (0,\ 12\, m/s)$.

Figura 3.14

Sistema de referencia adoptado.



- *Escritura de las ecuaciones del movimiento*

La ecuación de movimiento de cada partícula corresponde a un MRUV en el eje y. Para la partícula A el vector posición $\vec{r}(t)$ puede escribirse como la coordenada y (única no nula) en función del tiempo:

$$\vec{r}_A(t) \; \rightarrow \; y_A(t) = y_{0A} + v_{0Ay}\, t - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2$$

La segunda partícula, B comienza su movimiento $1\, s$ después referido a t que es el cronómetro con que se mide el tiempo para la primera piedra. Sin embargo, para esta segunda piedra vamos a utilizar otro cronómetro distinto que denominaremos t', iniciando el movimiento en $t' = 0$. La ecuación de movimiento se puede escribir:

$$\vec{r}_B(t) \; \rightarrow \; y_B(t') = y_{0B} + v_{0By}\, t' - \tfrac{1}{2}\, g\, t'^2$$

Debe quedar claro que hay una relación entre t y t', que deberemos tener en cuenta al momento de referenciar ambas ecuaciones a un mismo cronómetro de tiempo.

Mientras que para la velocidad de cada piedra resultan las siguientes ecuaciones:

$$v_A(t) = \; v_{0Ay} - g\, t$$

$$v_B(t') = \; v_{0By} - g\, t'$$

Cabe aclarar aquí que significan estos dos tiempos que hemos denominado t' y t. Ambas piedras, independientes en sus movimientos, están siendo medidas desde distintos cronómetros de tiempo, uno que hemos denominado t y el otro t'. Cada una de ellas, en forma independiente de la otra, describe un MRUV, cuyas ecuaciones son las que hemos expresado racionalmente. Ahora bien, estos distintos cronómetros, desfasados en 1 seg, pueden vincularse con la siguiente expresión:

$$t' = t - 1$$

Cabe destacar, que esta expresión racional, no tiene sentido físico por ejemplo para $t = 0$, en donde $t' = -1$, pero si tiene sentido matemático, y quedará reflejado en las ecuaciones.

Reemplazando en las ecuaciones anteriores los datos numéricos del problema, y la relación entre tiempos indicada, $t' = t - 1$ s, resultan finalmente las siguientes ecuaciones, ambas referidas al mismo tiempo:

$$y_A(t) = \frac{1}{2}\; 9.8\; m/s^2\;\; t^2$$

$$y_B(t) = 12\;\; m/s\;\; (t - 1s) + \frac{1}{2}\; 9.8\;\; m/s^2\;\; (t - 1s)^2$$

$$v_A(t) = \;\; 9.8\;\; m/s^2\;\; t$$

$$v_B(t) = \;\; 12\;\; m/s + 9.8\;\; m/s^2\;\; (t - 1s)$$

Ahora sí, ambas ecuaciones, una para cada piedra, están referenciadas a una única variable temporal, en este caso t. Habiendo racionalizado el problema, se está en condiciones de responder a las consignas del mismo.

- *Respuesta a las consignas del problema*

a) ¿Cuán alto es el peñasco?

Para resolver esta consiga se debe tener en cuenta que ambas piedras chocan en el momento que tocan el fondo, un dato que está explícitamente expresado en el enunciado. Por lo tanto, igualando la posición de ambas piedras, resulta la altura que debe tener el peñasco:

$$y_A(t) = y_B(t)$$

$$\frac{1}{2}\ 9.8\ m/s^2\ t^2 = 12\ m/s\ (t - 1s) + \frac{1}{2}\ 9.8\ m/s^2\ (t - 1s)^2$$

De la igualdad anterior se puede despejar el tiempo de caída, que no es más que el tiempo de encuentro, lo que permitirá calcular posteriormente la altura del peñasco.

$$4.9\ m/s^2\ t^2 = 12\ m/s\ t - 12\,m + 4.9\ m/s^2\ t^2 - 9{,}8\,m/s^2\ t + 4.9\,m$$

$$7.1\,m = 2.2\,m/s\ t$$

$$t = 3.22\,s = t_{encuentro} = t_e$$

La altura del peñasco es, especializando en cualquiera de las ecuaciones de movimiento:

$$y_A(3.22) = y_B(3.22) = \frac{1}{2}\ 9.8\ m/s^2\ (3.22\ s)^2 = 50.8\,m$$

b) ¿Cuál es la velocidad de las piedras en el fondo?

De acuerdo a las ecuaciones de velocidad planteadas, especializando para el tiempo $t_e = 3.22\,s$ resultan los siguientes valores de velocidad en el fondo del peñasco:

$$v_A(3.22) = 9.8\ m/s^2\ 3.22\,s = 31.56\ m/s \qquad v_A(3{,}22) = 31.56\ m/s$$

$$v_B(3.22) = 12\ m/s + 9.8\ m/s^2\ (2.22\ s) = 33.76\ m/s \qquad v_B(3{,}22) = 3.76\ m/s$$

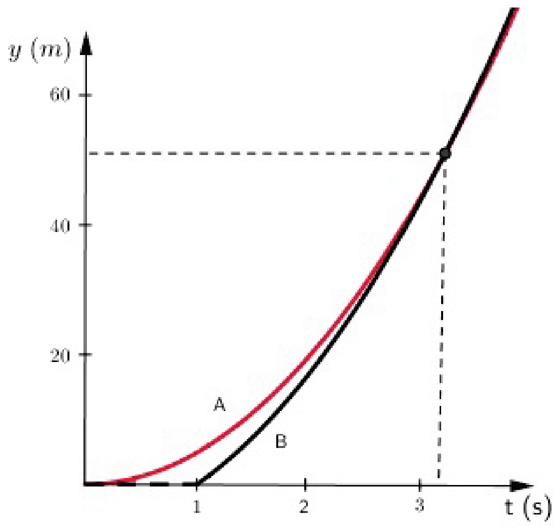
c) Representar en un mismo gráfico la posición de las piedras en función del tiempo.

La gráfica de la posición de cada piedra en función del tiempo corresponde a una función cuadrática, figura 3.15. Del análisis de las ecuaciones se desprende que ambas tienen su eje centrado en $t = 0$. El vértice de la primera, A, está en el origen de coordenadas mientras que para la B, durante el primer segundo está detenida, y su vértice está en $y_B(0) = -7.1\ m$. Además fue calculado que llegaban al fondo en $t = 3.22\ s$ con una altura del peñasco de $50.8\ m$, que se visualiza y verifica en la gráfica.

Cabe destacar que se ha punteado la función cuadrática entre 0 y 1 segundo para la piedra B, debido a que en este lapso de tiempo, si bien la ecuación refleja una porción de la parábola, la piedra se encuentra detenida y en $y = 0$. Volvemos a insistir sobre este punto. Dentro del racionalismo, hay condiciones físicas que debemos reconocer y que no se corresponden con las ecuaciones, que son totalmente válidas a partir de 1 segundo para ambas piedras.

Figura 3.15

Gráfico de la posición de las piedras en función del tiempo

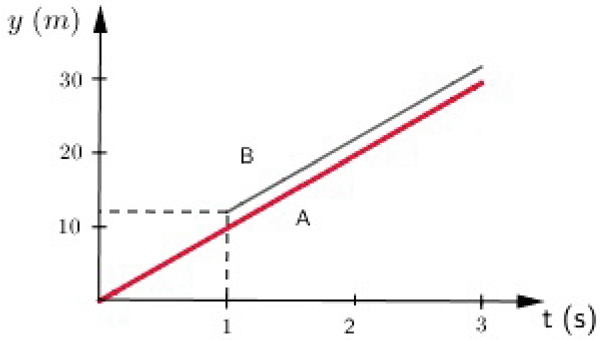


c) Representar en un mismo gráfico la velocidad de las piedras en función del tiempo.

Ambos gráficos corresponden a funciones lineales, figura 3.16, con una pendiente de 9.8 m/s^2 y una ordenada al origen para la piedra A igual a $0\ m/s$ y para la B igual a $12\ m/s$, considerando que esta última comenzará su desplazamiento $1\ s$ más tarde.

Figura 3.16

Gráfico de la velocidad de las piedras en función del tiempo.



Conclusión final:

En general el alumno iniciado, es difícil que siga este camino de resolución que se ha planteado. ¿Por qué? La respuesta está íntimamente relacionada a la dificultad que presenta un camino totalmente racional de resolución. El alumno intuye, cree entender, y en general trata de evitar descansar en un racionalismo de este tipo.

La pregunta es, ¿qué camino seguiría en general un alumno? Habiendo trabajado durante años con cientos de ellos, ellos tienden a dividir en problema en partes, o en pequeños mini problemas, que luego hay que vincular para poder resolver el problema general. En este caso, un mini problema, sería por ejemplo, calcular al cabo de 1 segundo cuanto ha descendido la piedra A y a qué velocidad se está moviendo. Esto permitirá alcanzar una única referencia de tiempo, que es cuando se lanza la piedra B, para ahora sí, volver a escribir una ecuación de movimiento para la piedra A teniendo en cuenta estos resultados previos obtenidos.

Toda división de un problema trae aparejados posibles errores de resolución. Hay que creer en el racionalismo matemático y esperar que de él surja la solución sin tentarse con intentar intuir lo que va a ocurrir e ir resolviendo partes si se quiere de un problema que funciona matemáticamente como un todo.

4 MOVIMIENTO CIRCULAR

4.1 HISTORIA

La importancia histórica del movimiento circular se remonta a la Grecia antigua, más precisamente a Platón (427-347 ac). En esos tiempos surgían las primeras cosmologías científicas que trataban de dar cuenta de un modelo que permitiera prever para cada día del año la posición de las estrellas y de los planetas que encontramos cuando miramos el cielo. Fueron así los griegos los primeros en intentar formular una teoría explicativa de los datos observables. Surgieron de ellos los primeros modelos planetarios, y en particular es Platón quién formula las primeras exigencias y presupuestos que deben ser considerados en una astronomía teórica: reducir los movimientos de los planetas a movimientos regulares y circulares.

Se ha dicho mucho de esta obsesión griega por lo circular, de este deseo de reducir todos los movimientos celestes a movimientos circulares. Sin embargo esto no es tan ridículo como se pretende: el movimiento de rotación es un tipo propio y muy notable de movimiento, el único que en un mundo finito se prosigue eternamente sin cambio, y es eso justamente lo que buscaban los griegos. Es decir, encontrar un movimiento que pudiera proseguirse y reproducirse eternamente. Este gusto de los griegos por lo eterno es algo muy característico de su mentalidad científica. Los teóricos griegos no hablan nunca del origen de las cosas, o si hablan de ello, es de un modo muy conscientemente mítico. En cuanto a la idea de que el movimiento circular es un movimiento natural, parece paradójicamente confirmarse en nuestros días. Acaso no se dice que el Sol gira, las nebulosas giran, los electrones giran, todo gira ¿Cómo negar que esto sea algo completamente "natural"? (Alexander Koyre, Estudios de historia del pensamiento científico, p. 78, Siglo XXI 1973).

4.2 CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR (MC)

Respondiendo al objetivo de la cinemática, si un objeto describe un movimiento circular (MC) cualquiera, el problema cinemático consiste en encontrar qué formas asumen las ecuaciones de movimiento, el vector velocidad $\vec{v}(t)$ y el vector aceleración $\vec{a}(t)$ para este movimiento particular.

La característica principal del movimiento circular está dada por su trayectoria que es una circunferencia de radio R, lo que significa que la partícula siempre se va a encontrar confinada a moverse dentro de esta circunferencia. Esto impone condiciones muy especiales a las variables $x(t)$ e $y(t)$, que de alguna manera se puede decir tienen una ligadura especial dada por la trayectoria circular y el radio de la circunferencia.

En la Figura 4.1 se representa un movimiento circular y la posición que ocupa la partícula para un instante t, en donde se ha tomado como origen del sistema de referencia el centro de dicha circunferencia.

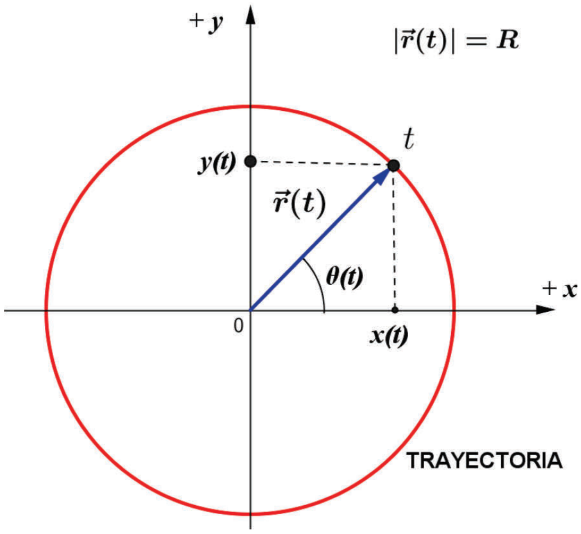
Las ecuaciones de movimiento se obtienen de la descomposición del vector posición sobre los ejes:

$$\vec{r}(t) \quad \begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) \\ y(t) = R\,sen\,\theta(t) \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\boxed{|\vec{r}(t)| = R = constante} \tag{4.2}$$

Figura 4.1

Trayectoria del movimiento circular.



En vista de las ecuaciones 4.1 y 4.2 se puede formular la siguiente pregunta ¿acaso no dependen de una única variable angular que se ha denominado $\theta(t)$? Ambas, son dependientes de esta variable: $\theta(t)$. De alguna manera se ve que si bien el movimiento es plano, y se requiere de dos ecuaciones de movimiento $x(t)$ e $y(t)$ para describirlo, ambas son dependientes de una única variable que es $\theta(t)$. Esto significa que, si se logra escribir una ecuación para $\theta(t)$, unívocamente se encuentra una expresión para $x(t)$ e $y(t)$.

Conocer $\theta(t)$ y el radio R de la circunferencia implica conocer las ecuaciones del movimiento: $x(t)$ e $y(t)$.

4.3 TRAYECTORIA EN UN MC

La trayectoria de un MC es una circunferencia de radio R. La ecuación de la trayectoria se puede encontrar de las ecuaciones de movimiento $x(t)$ e $y(t)$. Matemáticamente lo que hay que lograr es eliminar la variable t, para lo cual se puede proceder de la siguiente manera:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = (R\ cos\theta(t))^2 + (R\ sen\theta(t))^2$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2\ cos^2\theta(t) + R^2\ sen^2\theta(t)$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2\ (cos^2\theta(t) + sen^2\theta(t))$$

$$\boxed{x(t)^2 + y(t)^2 = R^2}$$

Trayectoria en un MC
(Ecuación de una circunferencia de radio R) (4.3)

4.4 EL MCU Y EL MRU

A continuación se compara brevemente un MRU con un MCU, y se extraen algunas conclusiones físicas y filosóficas.

- Un MRU, es una experiencia física imaginaria, pues este tipo de movimiento presume la existencia de un espacio infinito para desarrollarse.
- Si una partícula, imaginariamente describe un MRU, y se pierde la oportunidad de observarla cuando pasa frente a nosotros, nunca se podrá volver a tener esa oportunidad, pues la partícula se aleja indefinidamente de nuestra posición.
- Un MCU, requiere para desarrollarse un espacio finito, y además tiene una característica importantísima que no la tiene el MRU: es periódico, o sea se repite a intervalos de tiempos iguales denominados períodos que se simbolizan con la letra T.
- Que el MCU sea periódico significa que si la partícula pasa frente a nosotros y no tuvimos oportunidad de verla, tendremos nuevamente la oportunidad si esperamos un tiempo igual al período del movimiento T ya que ésta volverá a pasar por la misma posición transcurrido un período. El movimiento se repite en intervalos de tiempos iguales denominados períodos.
- Filosóficamente hablando, un MRU, requiere aceptar la existencia de un espacio infinito. En tiempos de los griegos, las filosofías Aristotélicas y Platónicas no aceptaban la existencia de un espacio de estas características, por lo que rechazaban la posibilidad de un MRU.
- Estas filosofías antiguas, observaron que los movimientos planetarios presentaban una armonía muy particular: se repetían periódicamente a sí mismos, lo que los llevó a postular (Platón) que debían ejecutar movimientos circulares y uniformes (MCU). Esta premisa permitió justificar no sólo las armonías de estos movimientos sino también la existencia de un espacio finito en donde se pudieran desarrollar. Es así, que Platón, postuló trayectorias circulares y uniformes (MCU) para los planetas, lo que se conoce en la historia de la ciencia como la maldición de Platón, pues llevó casi 2000 años, hasta que Kepler (1571-1630) pudiera obtener racionalmente la verdadera forma de la trayectoria de un planeta: elíptica.

4.5 LA LUNA Y EL MCU

La Luna, describe una órbita aproximadamente circular alrededor de la Tierra, en forma periódica. Se trata de un MCU, en donde el período es de aproximadamente 29.53 días. Este período se lo denomina sinódico y surge del tiempo transcurrido entre dos fases consecutivas de la Luna. Los astrónomos también miden otro período de la Luna llamado sidéreo de menor valor: 27.3 días. Este tiempo es el que tarda la Luna en volver a ocupar la misma posición respecto a una referencia fija e inmóvil. La gran diferencia entre estos períodos del mismo objeto es el sistema de referencia adoptado para determinarlo. En el primero observamos la rotación de la Luna respecto a un origen móvil, que es el Sol, en el segundo se toma a las estrellas como referencia, y estas, están tan lejos que pueden considerarse inmóviles para los tiempos transcurridos de nuestra existencia, tratándose de una medida casi absoluta del movimiento de la Luna. Ambos períodos son constantes.

Esta periodicidad permitió una de las primitivas formas de medir el tiempo (tiempos lunares) basados precisamente en estos períodos. Hoy en día incluso se suele decir que un embarazo normal transcurre durante 9 lunas.

En general se confunden, cuando se observa a la Luna en una noche estrellada, su propio movimiento con el de rotación de la Tierra sobre su eje. Si se mira a la Luna, se la ve moverse, pero en realidad se mueve por una combinación de dos movimientos: giro alrededor de la Tierra y rotación de la Tierra sobre su eje cada 24 horas.

La forma de eliminar la rotación de la Tierra en las observaciones, y sólo percibir la rotación de la Luna, es realizarlas siempre a la misma hora. Por ejemplo, observar la posición de la Luna a las 22 hs, y volver a observar su posición a las 22 hs de mañana. De esta forma, la variación de su posición se debe únicamente al movimiento de la Luna, pues la Tierra a las 22 horas siempre estará en la misma posición respecto de su eje ya que habrá dado una vuelta completa en las 24 horas transcurridas.

Vamos a iniciar el estudio del MC con la resolución de un problema, tratando de obtener una ecuación para la posición angular $\theta(t)$ de la Luna, utilizando el conocimiento del período de rotación y una condición inicial para su posición angular. El planteo matemático permitirá apreciar la importancia que tiene $\theta(t)$ en la descripción racional de un MC cualquiera. A continuación se desarrolla el problema siguiendo los pasos previstos en la "Resolución de problemas de cinemática".

Problema 4.1 Video: *Cinemática clase 17/27*

Imaginemos la siguiente situación: hoy a las 22 hs, observamos la Luna y la misma tiene una posición angular de $30°$ con la horizontal. Aceptando que el período es de 28 días (se toman 28 días para simplificar la interpretación). ¿Bajo qué ángulo se encontrará la Luna transcurrido un tiempo de 2937643 segundos?

- *Realización del gráfico o boceto y elección de un SR*

La figura 4.2 ilustra la situación planteada. Asimismo en la figura se ha representado la posición de la Luna para intervalos de 7 días, que se corresponden con un cuarto del período, que se ha supuesto de 28 días.

La consigna del problema lleva a plantear la posibilidad de escribir una ecuación matemática para $\theta(t)$, que permitirá ubicar la posición de la Luna en todo instante de tiempo t.

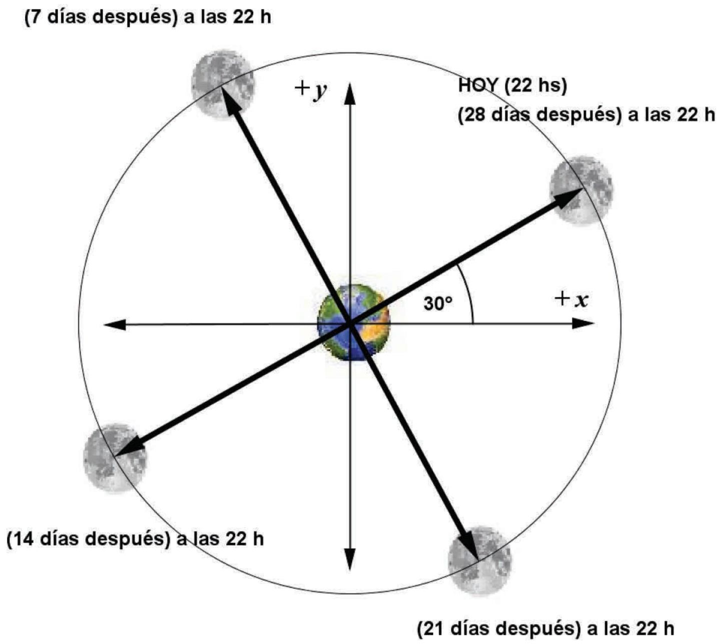


Figura 4.2

Boceto del problema.

- *Escritura de las ecuaciones de movimiento*

De la figura 4.2, y por tratarse de un MCU, se puede deducir que la Luna recorre ángulos iguales en tiempos iguales. Cada 7 días, recorre un ángulo de $90\ °$ o lo que es lo mismo $\pi/2$ radianes. Esta idea de uniformidad en vista del ángulo girado en la unidad de tiempo permite introducir un nuevo concepto para el MC, que es el de velocidad angular.

Así, racionalizando matemáticamente este concepto, se puede escribir la siguiente ecuación para $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \underbrace{\frac{360°}{T=28\ dias}}\ t + 30° = \omega\, t + \theta_0 \tag{4.4}$$

ω= velocidad angular: ángulo girado por día, o en la unidad de tiempo

Observaciones

1. La velocidad angular ω se presenta como una característica fundamental en todo MCU.

2. En la ecuación matemática se ha tenido en cuenta la posición inicial angular que ocupa la luna en $t = 0,\ \theta_0 = 30°$.

- *Respuesta a las consignas del problema*

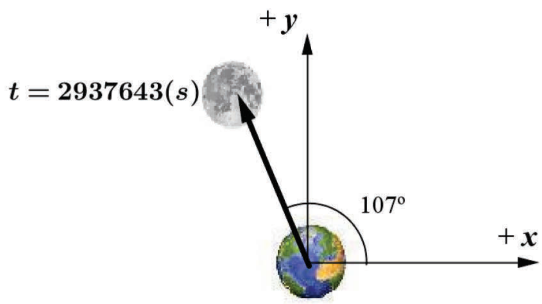
Si se especializa en esta ecuación para el tiempo $t = 2937643\ s$ de acuerdo con la consigna que plantea el problema, se obtiene el ángulo en donde se podrá encontrar a la Luna.

$$\theta(2937643) = \frac{360°}{28d} 2937643\ s + 30° = 467° \to congruente\ con\ 107°$$

La figura 4.3 es una representación del resultado obtenido en la resolución del problema 4.1.

Figura 4.3

Representación del resultado del problema.



El planteo matemático realizado para la resolución del Problema 4.1 muestra la importancia que adquieren en un MC el manejo de variables angulares, como son el ángulo girado y el radio.

En el movimiento circular, cualquiera sea su tipo (uniforme o no), la variable a racionalizar matemáticamente es $\theta(t)$.

Por lo tanto, al escribir una ecuación para $\theta(t)$ conociendo el radio de la circunferencia y las condiciones iniciales, se logra hallar una expresión matemática para $x(t)$ e $y(t)$, las ecuaciones cartesianas del movimiento.

¿Qué se puede destacar?

Si bien el movimiento es plano y aparentemente se necesitan dos ecuaciones de movimiento para hallar $\vec{r}(t) = (x(t)\ ,\ y(t))$, esto no es así. Las ecuaciones de movimiento surgen de la racionalización matemática para $\theta(t)$ ya que el radio de la circunferencia que describe la partícula es constante.

Surge la siguiente pregunta ¿y los vectores $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$? Esta pregunta tiene por objetivo plantear la posibilidad de encontrar expresiones para estos vectores que de alguna manera surjan de esta nueva variable angular $\theta(t)$.

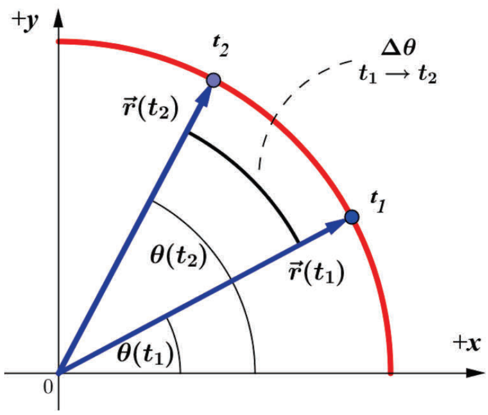
Para poder estudiar $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$, se debe profundizar el análisis respecto al concepto de velocidad angular que de alguna manera surgió naturalmente en el estudio del movimiento de la Luna, y que tiene por objetivo medir cómo varía $\theta(t)$, el ángulo girado por la partícula a medida que transcurre el tiempo.

4.6 VELOCIDAD ANGULAR MEDIA E INSTANTÁNEA ω_m y $\omega(t)$

Sea una partícula que describe un movimiento circular como el representado en la figura 4.4, en el cual para los instantes de tiempo t_1 y t_2 ocupa las posiciones indicadas.

Figura 4.4

Velocidad angular en el MC.



Observar que en la figura 4.4 se han representado no solo los vectores posición correspondientes a los instantes t_1 y t_2 sino también los ángulos girados por la partícula en dichos instantes y el $\Delta\theta$ correspondiente al intervalo considerado.

4.6.1 VELOCIDAD ANGULAR MEDIA ω_m

Se define la velocidad angular media de la partícula, entre los instantes t_1 y t_2, como la medida del cambio angular $\Delta\theta$ que experimenta la partícula en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\underset{t_1 \to t_2}{\Delta\theta} = \theta(t_2) - \theta(t_1) \tag{4.5}$$

$$\boxed{\underset{t_1 \to t_2}{\omega_m} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta(t_2) - \theta(t_1)}{\Delta t}} \tag{4.6}$$

La unidad de medida en el SI es: $[\omega_m] = [rad/s]$

4.6.2 VELOCIDAD ANGULAR INSTANTÁNEA $\boldsymbol{\omega(t)}$

Si el intervalo de tiempo $\Delta t \to 0$, la velocidad angular media se transforma en un valor instantáneo $\omega(t)$. Así, matemáticamente para $\Delta t \to 0$, definimos la velocidad angular instantánea $\omega(t)$, según se indica en la siguiente expresión:

$$\boxed{\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \underset{t \to t+\Delta t}{\omega_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \theta'(t) = \frac{d}{dt}\theta(t)} \tag{4.7}$$

La unidad de medida en el SI es: $[\omega(t)] = [rad/s]$

Observaciones

1. La primera pregunta que surge es: ¿ω y ω_m son vectores? Hasta ahora se han tratado como escalares, pero cuando se amplíe el estudio del movimiento circular se va a profundizar en el carácter vectorial de ω.

2. Nuevamente se encuentra que la derivabilidad de $\theta(t)$ impone que la partícula no pueda pasar de un lugar a otro sin ocupar los intermedios, por lo que $\theta(t)$ debe ser continua, y estar definida la derivada en todos los puntos.

4.7 VELOCIDAD INSTANTÁNEA EN EL MC $\vec{v}(t)$

Se ha visto que para analizar racionalmente el movimiento de una partícula que describe un movimiento circular cualquiera basta con racionalizar matemáticamente a $\theta(t)$.

¿Qué valores tomará $\vec{v}(t)$ en este contexto? ¿Se podrá encontrar una expresión racional para $\vec{v}(t)$ conociendo $\theta(t)$ y R?

A continuación se analiza el caso general de un MC. Sea una partícula que describe una trayectoria circular cualquiera y sean t y $t + \Delta t$ dos instantes de dicho movimiento, como se indica en la figura 4.5.

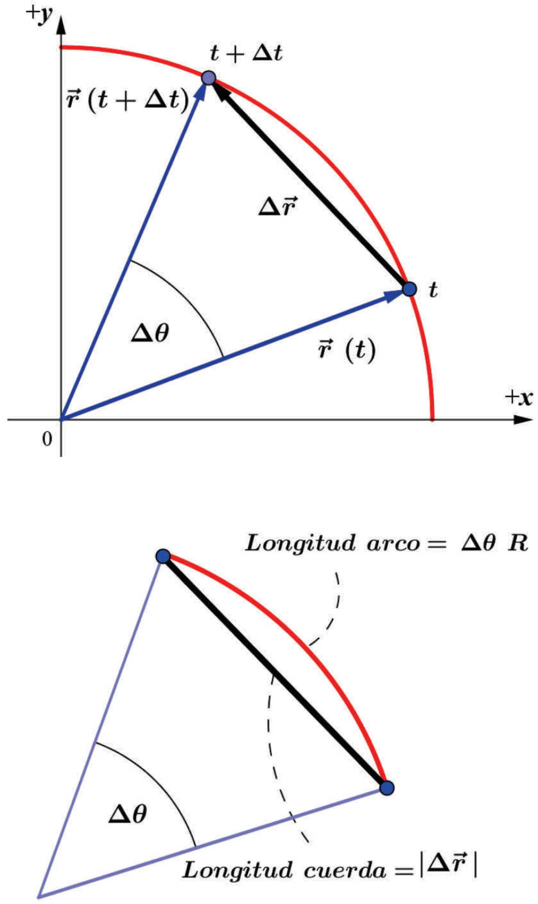


Figura 4.5

Vector desplazamiento en un MC cualquiera.

En la figura 4.5 se representa al vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ en el intervalo considerado, ya que el mismo es el que da lugar al vector velocidad $\vec{v}(t)$ que nos ocupa.

Asimismo, el gráfico auxiliar de la figura 4.5 muestra la diferencia geométrica que existe entre el arco y la cuerda comprendidos en un cierto ángulo. En este caso, la cuerda está representada por el módulo de $\Delta\vec{r}$.

Respecto de la dirección y sentido de $\vec{v}(t)$, se ha visto que el vector velocidad es tangente a la trayectoria en el punto. En el caso particular de una circunferencia, la tangente es perpendicular al radio. En la figura 4.6 se representa la velocidad instantánea para un movimiento circular en donde se ve la perpendicularidad que existe entre la dirección de $\vec{v}(t)$ y la de $\vec{r}(t)$.

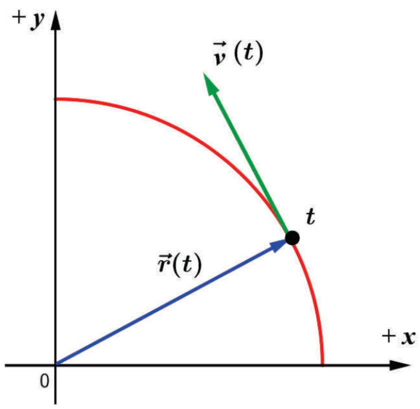


Figura 4.6

Vector velocidad en un MC.

Así, en todo MC, la dirección del vector velocidad es la perpendicular al radio en el punto considerado y el sentido es el del movimiento.

Para analizar el módulo de $\vec{v}(t)$, se recurre a la definición de velocidad instantánea:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad ; \qquad |\vec{v}(t)| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} \tag{4.8}$$

Para $\Delta t \to 0$, $|\Delta \vec{r}|$ se aproxima a la longitud del arco comprendido dentro del intervalo de tiempo Δt por $\Delta\theta$, matemáticamente:

$$|\Delta \vec{r}| \cong longitud\ arco = \Delta\theta\ R \qquad (\text{ si } \Delta t \to 0) \tag{4.9}$$

Llevando esta relación a la definición de $\vec{v}(t)$, se puede escribir para su módulo:

$$|\vec{v}(t)| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{longitud\ arco}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta\ R}{\Delta t} = R \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) = R\ \omega(t)$$

$$\boxed{|\vec{v}(t)| = \omega\ R} \tag{4.10}$$

Así, se ha encontrado la relación buscada, que vincula el módulo de la velocidad con las variables angulares que caracterizan al MC: $\theta(t)$ y R.

Observaciones

1. $|\vec{v}(t)|$ en cualquier MC, se puede calcular conociendo el radio de la circunferencia R y $\theta(t)$, ya que $\omega = \theta'(t)$.

2. $|\vec{v}(t)| = \omega\, R$ es una expresión totalmente general para cualquier movimiento circular, uniforme o no, en dónde ω es en general $\omega(t)$. Con esto se quiere significar que si ω es variable, entonces $|\vec{v}(t)| = \omega\, R$ será variable.

3. La variación de la velocidad instantánea que caracteriza a cualquier MC, lleva a tener que analizar la aceleración, y tratar nuevamente de encontrar alguna expresión para la misma en función de las variables angulares.

.

En todo movimiento circular hay aceleración $\vec{a}(t)$ ya que la velocidad $\vec{v}(t)$ varía al menos en dirección y sentido.

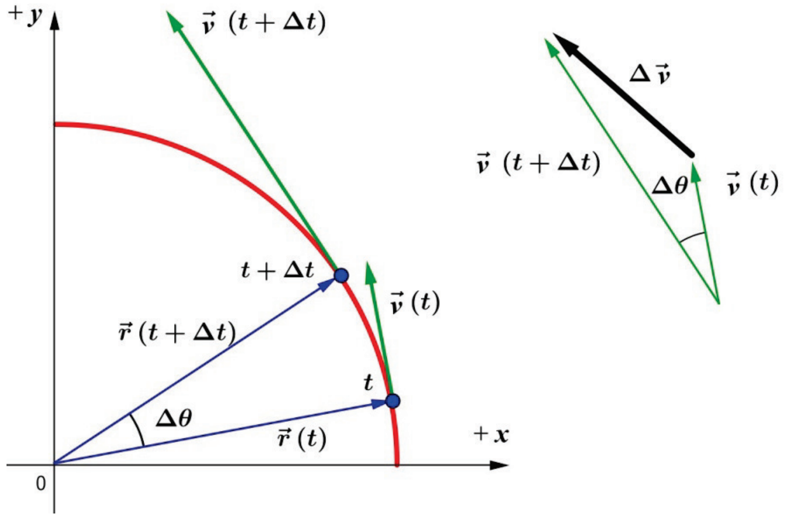
4.8 ACELERACIÓN INSTANTÁNEA EN EL MC $\vec{a}(t)$

Consideremos una partícula que describe un movimiento circular cualquiera con $\omega(t)$ variable ($\omega \neq cte$). Sean t y $t + \Delta t$ dos instantes en el movimiento de la partícula y sean $\vec{v}(t)$ y $\vec{v}(t + \Delta t)$ las velocidades correspondientes.

En la figura 4.7 se representa esta situación, en donde se ha supuesto que el movimiento es antihorario, y que la velocidad aumenta en el intervalo considerado.

Figura 4.7

Deducción gráfica del vector $\Delta\vec{v}$ en un MC.



Asimismo, para poder evaluar el cambio que se origina en el vector velocidad $\Delta\vec{v}$, que da lugar a la aceleración en el movimiento, se ha realizado en un gráfico auxiliar (Figura 4.7) en donde se han representado con un origen en común a los vectores $\vec{v}(t)$ y $\vec{v}(t+\Delta t)$. En esta representación auxiliar se puede visualizar al vector $\Delta\vec{v}$, que mide el cambio de velocidad que experimenta la partícula en el intervalo considerado.

La primer observación que se debe realizar para continuar con el estudio, es que el ángulo que forman los vectores $\vec{v}(t)$ y $\vec{v}(t+\Delta t)$ es el mismo que el ángulo comprendido $\Delta\theta$ entre los vectores $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}(t+\Delta t)$. Esto es así ya que las direcciones de las velocidades son perpendiculares a las direcciones de los radios en los instantes considerados, y entre perpendiculares, el ángulo comprendido es el mismo.

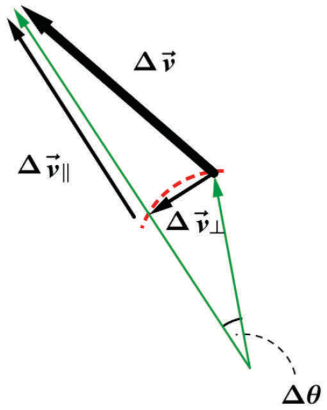
$$\text{Dirección} \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}(t)\ \perp\ \vec{v}(t) \\ \\ \vec{r}(t+\Delta t)\ \perp\ \vec{v}(t+\Delta t) \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \vec{v}(t) \text{ y } \vec{v}(t+\Delta t) \text{ forman un ángulo } \Delta\theta \qquad (4.11)$$

En la figura auxiliar 4.7, $\Delta\vec{v}$ mide el cambio de la velocidad y da lugar a la aceleración de la partícula. Para su estudio, se ha descompuesto en dos: una componente denominada paralela $\Delta\vec{v}_{//}$ y otra perpendicular $\Delta\vec{v}_{\perp}$como se observa en la figura 4.8.

- $\Delta\vec{v}_{//}$: mide el cambio que experimenta el ***módulo*** del vector velocidad en el intervalo considerado.
- $\Delta\vec{v}_{\perp}$: mide el cambio de ***dirección*** que experimenta el vector velocidad en el intervalo considerado.

Figura 4.8

Descomposición de $\Delta\vec{v}$ *en* $\Delta\vec{v}_{//}$ *y* $\Delta\vec{v}_{\perp}$.



La denominación de paralela y perpendicular con que se ha designado a cada una de estas componentes, tienen que ver con sus direcciones respecto de la velocidad de la partícula en el instante t, si el intervalo de tiempo considerado tiende a cero.

Por lo tanto, el vector cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$, en función de la descomposición que se ha realizado para ser estudiado, se puede escribir matemáticamente como suma de dos componentes:

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_{//} + \Delta\vec{v}_{\perp} \tag{4.12}$$

Para calcular $\vec{a}(t)$, hay que recurrir a su definición, y en función de esta descomposición que se ha realizado del vector cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$, se ve que la aceleración tiene dos componentes, cada una de las cuales corresponde a uno de los vectores auxiliares en que hemos descompuesto a $\Delta\vec{v}$:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{v}_{//} + \Delta\vec{v}_{\perp}}{\Delta t}\right) = \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{//}}{\Delta t}\right) + \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{\perp}}{\Delta t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}(t) = \vec{a}_{//} + \vec{a}_{\perp} \tag{4.13}$$

Así, surgen dos componentes para la aceleración a ser analizadas. A estas componentes también se las suele denominar componentes rectangulares de la aceleración: tangencial y centrípeta.

Seguidamente se analiza matemáticamente cada una de estas componentes, con el objetivo de caracterizar su relación con las variables angulares.

4.8.1 COMPONENTE PERPENDICULAR $\vec{a}_{\alpha}$ ACELERACIÓN CENTRÍPETA $\vec{a}_c$

Esta componente tiene en el límite para $\Delta t \to 0$ la dirección del radio y sentido hacia el centro de la circunferencia, es por ello que es más conocida con el nombre de *aceleración centrípeta* ($\vec{a}_c$).

A continuación se analiza el módulo de esta componente y se trata de expresarlo en función de las variables angulares que caracterizan al MC. Para ello, se toma módulo en la expresión que le da origen, de la siguiente forma: (recordar que como Δt es siempre positivo no se lo expresa entre barras de módulo).

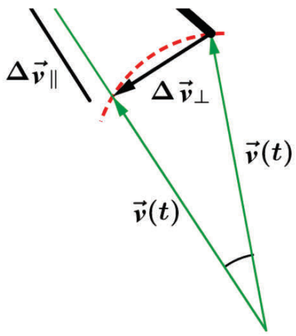
$$|\vec{a}_c(t)| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\Delta \vec{v}_\perp\right|}{\Delta t} \tag{4.14}$$

Se recurre nuevamente a la relación entre la cuerda y el arco de un ángulo. Pero en este caso el ángulo lo forman los vectores velocidad en un intervalo tendiente a cero.

La figura 4.9 es un detalle de los vectores vistos en la figura 4.8.

Figura 4.9

Detalle de la componente $\Delta \vec{v}_\perp$ *cuando el intervalo tiende a cero.*



Esta figura ayuda a visualizar la siguiente relación matemática entre la cuerda y el arco para un intervalo que tiende a cero.

$$\frac{longitud\ arco}{radio} = \Delta\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{|\Delta \vec{v}_\alpha|}{|\vec{v}(t)|} \cong \Delta\theta \tag{4.15}$$

$$\left|\Delta \vec{v}_\perp\right|_{t \to t+\Delta t} \cong |\vec{v}(t)|\ \Delta\theta \tag{4.16}$$

Llevando la expresión (4.16) al módulo de la componente radial de la aceleración se tiene:

$$|\vec{a}_c(t)| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\vec{v}(t)|\ \Delta\theta}{\Delta t} = |\vec{v}(t)|\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = |\vec{v}(t)|\ \omega$$

Observar que se ha sacado fuera del límite $|\Delta \vec{v}|$. Esto es así ya que la componente perpendicular según el gráfico mostrado en la figura 4.9 mide el cambio de dirección que experimenta la velocidad y no el cambio de módulo que para esta componente es constante en el intervalo.

Si utilizamos la expresión 4.10 podemos encontrar distintas expresiones de la aceleración centrípeta.

$$|\vec{a}_c(t)| = |\vec{v}(t)|\ \omega = (\omega\ R)\ \omega = |\vec{v}(t)| \left(\frac{|\vec{v}(t)|}{R}\right)$$

$$\boxed{|\vec{a}_c(t)| = \omega^2\ R = \frac{|\vec{v}(t)|^{\,2}}{R} = \omega\ |\vec{v}(t)|} \tag{4.17}$$

Observaciones

1. Se obtuvo una expresión que permite calcular el módulo de la aceleración radial o centrípeta en función de ω y R (variables angulares).

2. Si $\omega(t)$ es variable, el módulo de la aceleración centrípeta también cambiará con el tiempo.

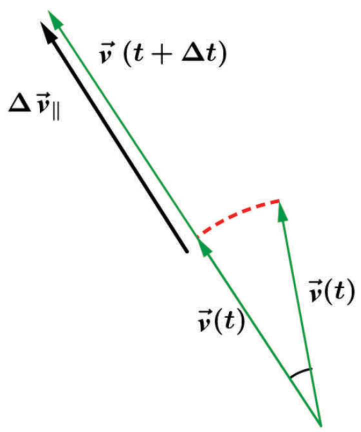
4.8.2 COMPONENTE PARALELA $\vec{a}_{//}$ ACELERACION TANGENCIAL $\vec{a}_{tg}$

Esta componente, tiene en el límite para $\Delta t \to 0$ la dirección de la tangente a la circunferencia en el instante t, y es más conocida con el nombre de *aceleración tangencial* $\vec{a}_{tg}(t)$. Estudiemos algunas características de esta aceleración, que no siempre estará presente en un MC, pues mide el cambio de módulo que experimenta el vector velocidad. Si se trata de un MC uniforme (MCU) por ejemplo, que es un caso muy particular, el módulo de la velocidad instantánea no cambia y por tanto esta componente será cero.

Analicemos el módulo de $\vec{a}_{//}(t)$. El gráfico de la figura 4.10 permite visualizar la variación del módulo de la velocidad que experimenta la partícula.

Figura 4.10

Detalle de la componente $\Delta\vec{v}_{//}$ cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.



Así, de la definición de aceleración, para esta componente $\vec{a}_{//}(t)$ se puede escribir:

$$|\vec{a}_{//}(t)| = |\vec{a}_{tg}(t)| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}_{//}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\vec{v}(t+\Delta t)| - |\vec{v}(t)|}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta|\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{d}{dt}|\vec{v}| = \frac{d}{dt}(\omega\, R) = R\, \underbrace{\frac{d}{dt}(\omega)}_{\text{Aceleración angular } \alpha}$$

$$\boxed{|\vec{a}_{tg}| = \alpha\, R} \qquad (4.18)$$

La unidad de medida en el SI es: $[\alpha] = [rad/s^2]$

Observaciones

1. Se ha introducido una nueva variable angular para el movimiento circular: $\alpha(t)$, que es la aceleración angular y mide el cambio de velocidad angular $\omega(t)$ que experimenta la partícula en la medida que transcurre el tiempo.

2. Se ha expresado en función de la aceleración angular $\alpha(t)$ y el radio R el módulo de la aceleración tangencial, que son variables angulares.

3. Si se trata de un MCU ($\omega(t) = constante = \omega$), resulta $\alpha(t) = 0$, no habiendo en este caso aceleración tangencial: $\vec{a}_{tg} = 0$. Esto significa que el vector velocidad no cambia su módulo a lo largo del movimiento.

Conclusiones

- En todo movimiento circular hay aceleración.

- La aceleración en el MC puede analizarse en función de dos componentes que miden los siguientes cambios posibles del vector velocidad:

$\vec{a}_c$ cambio de dirección
$\vec{a}_{tg}$ cambio de módulo

La figura 4.11 representa la aceleración en un instante de tiempo t para un MC cualquiera, en donde se observan las dos componentes analizadas.

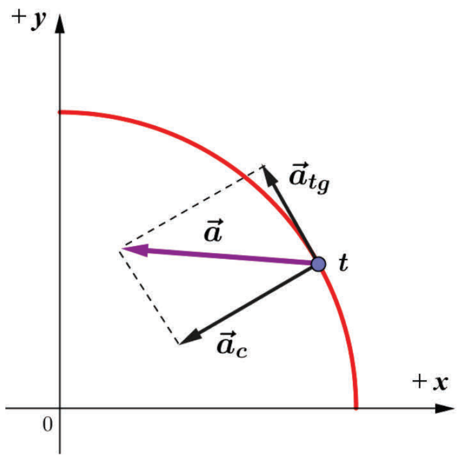


Figura 4.11

Aceleración centrípeta y tangencial en el MC.

4.9 MC CASOS PARTICULARES

En virtud de los resultados obtenidos en el análisis realizado para un MC cualquiera, se aplicarán a dos tipos muy especiales de movimientos que en la práctica se van a presentar y para los cuales las ecuaciones adoptan formas particularmente simples: MCU y MCUV.

4.9.1 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME: MCU

Que un movimiento sea periódico significa que el mismo se repite a intervalos de tiempo iguales denominados períodos, simbolizado con la letra T. Esta particularidad que tiene un MCU lo ha convertido según se ha comentado en un tipo de movimiento que marcó significativamente el desarrollo de la astronomía desde la Grecia antigua hasta el Renacimiento. Más precisamente se debe comprender que un movimiento periódico permite ser considerado como armonioso, y la búsqueda de las armonías del universo fue motivo de preocupación por parte de estos filósofos que fundaron las bases de la ciencia física que estamos abordando.

Si el MCU es periódico, la partícula que lo ejecuta recorre una vuelta completa en el tiempo de un período. Esto significa que gira un ángulo de 2π radianes o de $360°$ en un tiempo igual al período T. Así, la velocidad angular ω es una constante en el MCU, y conociendo el período T se pueden obtener todas las ecuaciones de movimiento, ya sean las angulares como las cartesianas.

Matemáticamente, para un MCU resultan entonces las siguientes ecuaciones:

Variables angulares

$$\omega = constante = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{4.19}$$

$$f = \frac{1}{T}\ ;\ [f] = \left[\frac{1}{s}\right] = [Hz] = \ [rps] \text{ ó } \left[\frac{revoluciones}{segundo}\right] \tag{4.20}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega\, t \tag{4.21}$$

$$\alpha = 0 \text{ (no hay aceleración angular)}$$

$\vec{v}\ y\ \vec{a}$

$$|\vec{v}| = v = \omega\, R = constante \tag{4.22}$$

$$|\vec{a}_c| = a_c = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} = v\,\omega = constante \tag{4.23}$$

$$|\vec{a}_{tg}| = 0 \tag{4.24}$$

Observaciones

1. El conocimiento del período T y radio R de un MCU basta para poder escribir las distintas ecuaciones de movimiento que son necesarias para lograr una adecuada racionalización del problema.

2. Se ha definido a la frecuencia f como la inversa del período T. La utilidad de esta magnitud, que de alguna manera es otra forma de expresar el período radica en los órdenes de magnitud que permite manejar.

Esta apreciación se puede comprender en el siguiente ejemplo: en los automóviles existe un instrumento denominado tacómetro que mide las revoluciones que ejecuta el motor por minuto. Si el tacómetro indica 4000 rev/min, significa que en un minuto el eje del motor ejecuta $4000\ vueltas$. Sin embargo, si se tuviera que indicar el período, o sea el tiempo que tarda en dar una vuelta, el instrumento debería indicar: $T = \left(\frac{1}{4000}\right) min$. Es por ello que para movimientos que se ejecutan muy rápidamente, conviene referirse a la frecuencia y no al período. En un MCU, la frecuencia es constante como se desprende de su definición (ecuación 4.20).

3. Es común que las personas confundan período con frecuencia. Se suele decir que un colectivo tiene una frecuencia de 5 minutos, cuando en realidad se está referenciando al período. Sería correcto decir, que la frecuencia es de 1 cada 5 minutos. Cabe destacar que un colectivo no ejecuta necesariamente un movimiento circular, simplemente se trata de un evento periódico.

4. En el MCU como en todo movimiento circular hay aceleración. Y en este caso, la única componente del vector aceleración es a_c, la aceleración centrípeta. Esto es así pues en el MCU el

módulo del vector velocidad no cambia y es constante en todo punto de la circunferencia que describe la partícula.

4.9.2 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO: MCUV

En este particular movimiento circular, la condición de uniformemente variado se refiere a que la velocidad angular ω no es constante sino que debe variar uniformemente con el transcurso del tiempo. Esto es equivalente a decir que la aceleración angular α es constante. Por lo tanto ya no se está frente a un movimiento periódico, y se requiere, para poder escribir las ecuaciones de movimiento angulares, el conocimiento de la aceleración angular α y las condiciones iniciales θ_0 y ω_0.

Matemáticamente, las ecuaciones de movimiento para un MCUV son las siguientes:

$$\text{Variables angulares} \begin{cases} \alpha = constante \\ \omega(t) = \omega_0 + \alpha\, t & (4.25) \\ \theta(t) = \theta_0 + \omega_0\, t + \dfrac{1}{2}\,\alpha\, t^2 & (4.26) \end{cases}$$

$$\vec{v}\ y\ \vec{a} \begin{cases} |\vec{v}| = v = \omega\, R \ \rightarrow variable & (4.27) \\ |\vec{a}_c| = a_c = \omega^2 R = \dfrac{v^2}{R} = \omega\, v \ \rightarrow variable & (4.28) \\ |\vec{a}_{tg}| = \alpha\, R = constante & (4.29) \end{cases}$$

Observaciones

1. No es periódico. A pesar que la trayectoria es una circunferencia, la partícula no recorre ángulos iguales en tiempos iguales.

2. Se puede hablar de una frecuencia instantánea $f = \omega/2\pi$, que será función del tiempo, de la misma manera que ω lo es.

3. Como en todo MC hay aceleración. En este caso particular se presentan las dos componentes: centrípeta y tangencial.

4. La componente centrípeta (a_c) es variable, ya que ω es variable y la partícula debe cambiar de dirección en la medida que transcurre el movimiento cada vez más rápidamente o lentamente según varíe ω.

5. La componente tangencial (a_{tg}) es constante, ya que el movimiento es uniforme, lo que significa que el módulo del vector velocidad aumenta en forma uniforme.

A los efectos de aplicar los conceptos vistos hasta el momento, se plantea un problema que permite reafirmar la nomenclatura y el formalismo matemático.

Problema 4.2 Video: ***Cinemática clase 21/27***

Auto en una curva

Un automóvil entra en una curva de un cuarto de circunferencia de $200\,m$ de radio a $108\ km/h$ y sale a $72\ km/h$. Calcular suponiendo la aceleración angular constante: a) El tiempo que permanece en la curva. b) La aceleración angular. c) La aceleración centrípeta al entrar y salir de la curva. d) La aceleración tangencial en la mitad de la curva. e) ¿Es constante la aceleración sobre el automóvil?

- *Lectura del enunciado*

Se debe considerar luego de la lectura, que el automóvil avanza siguiendo una trayectoria rectilínea hasta que ingresa en la curva de un cuarto de circunferencia, para salir por otra recta, perpendicular a la primera.

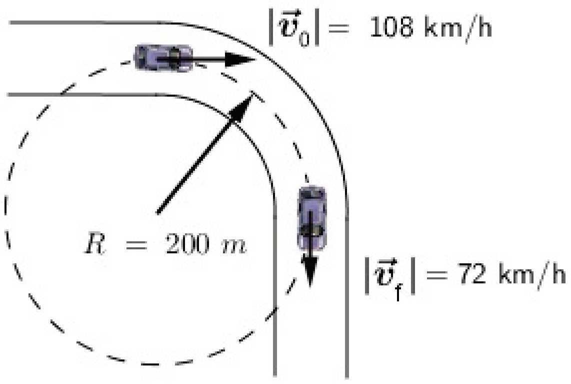
El auto a lo largo de la trayectoria semicircular varía la dirección y sentido de la velocidad así como también su rapidez, manteniendo su aceleración angular constante.

- *Realización de un gráfico o boceto*

Se ha realizado el boceto de la figura 4.12, considerando que el móvil ingresa con una velocidad dada como dato y reduciendo su rapidez luego de recorrer un cuarto de circunferencia, de radio $200\,m$.

Figura 4.12

Boceto de la situación planteada.

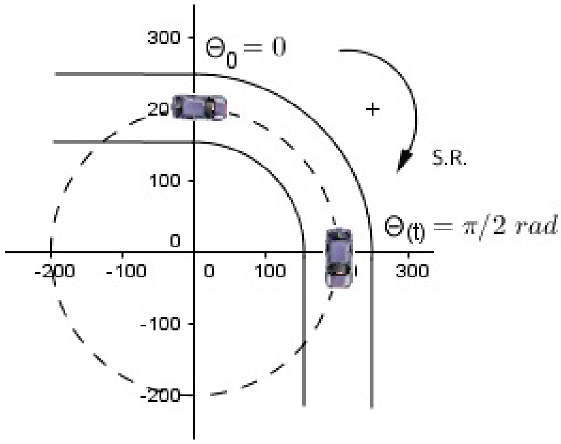


- *Elección de un (SR)*

Por tratarse de un movimiento circular y de acuerdo con lo estudiado para el mismo, el sistema de referencia adecuado para describir este movimiento debe ser de tipo polar. Lo que se busca en definitiva es poder construir la ecuación de movimiento para $\theta(t)$, ya que el radio es constante e igual al de curvatura de la curva que describe el automóvil. En ese tipo de sistemas se debe especificar para dónde se consideran los ángulos positivos. En este caso se tomará positivo en sentido de las agujas del reloj como se indica en el SR de la figura 4.13. El ángulo inicial del movimiento: $\theta_0 = 0\,rad$ se tomará sobre el eje vertical, mientras que el ángulo final será de $\pi/2\ rad$ se ubicará de acuerdo al SR sobre el eje horizontal.

Figura 4.13

Sistema de referencia adoptado.



- *Escritura de las ecuaciones del movimiento*

Ha sido estudiado que el módulo de la velocidad de un movimiento circular se relaciona con la velocidad angular y el radio de la trayectoria por la ecuación (4.27):

$$|\vec{v}(t)| = \omega\ R$$

Ésta permitirá encontrar la velocidad angular en el instante inicial y en el final del movimiento de la siguiente forma:

$$\omega = |\vec{v}|/R$$

De acuerdo a la descomposición del vector cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$ y su variación en el tiempo se obtuvieron las aceleraciones centrípeta y tangencial en un movimiento circular, las que estaban dadas por las ecuaciones (4.17) y (4.18) respectivamente:

$$|\vec{a}_c(t)| = \omega^2\ R \qquad |\vec{a}_{tg}| = \alpha\ R$$

De esta manera, y teniendo en cuenta que el auto ejecuta un movimiento circular uniformemente variado (MCUV), con una aceleración angular α, resulta la siguiente expresión matemática de las variables angulares de acuerdo a las ecuaciones (4.26) y (4.25):

$$\begin{cases} \theta_{(t)} = \theta_0 + \omega_0\ t + \frac{1}{2}\alpha\ t^2 \\ \omega_{(t)} = \omega_0 + \alpha\ t \end{cases}$$

Cabe destacar que no se conoce aún la aceleración angular α, pero, las consignas de alguna manera se orientan precisamente en el cálculo de la misma.

- *Respuesta a las consignas del problema*

De acuerdo a los datos del problema y teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores se está en condiciones escribir las ecuaciones de movimiento y de responder las distintas consignas, comenzando con convertir las distintas unidades al S.I.

$$v_0 = 108\ km/h = 30\ m/s \quad v_f = 72\ km/h = 20\,m/s$$

Con esos datos, previo a desarrollar cada consigna en particular, la velocidad angular inicial y final resultan:

$$\omega_0 = |\vec{v}_0|/R = 30\,m/s\,/200\,m = 0.15\,rad/s \quad \omega_f = |\vec{v}_f|/R = 20\,m/s\,/200\,m = 0.10\,rad/s$$

a) El tiempo que permanece en la curva.

Este tiempo es el que transcurre mientras el móvil recorre un cuarto de circunferencia. Ingresa a la curva con una velocidad angular $\omega_0 = 0.15\, rad/s$ y luego de girar un ángulo de $\pi/2\ rad$ reduce esta velocidad al valor $0{,}10\, rad/s$ en forma uniforme como indica el enunciado. Se debe esperar por tanto que el valor de la aceleración angular sea negativo, indicando precisamente que disminuye la velocidad angular durante el movimiento. Reemplazando entonces en las ecuaciones de MCUV, se obtiene un sistema de ecuaciones que permitirá encontrar el tiempo buscado.

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} rad/s = 0 + 0.15\, rad/s\, t + \dfrac{1}{2} \alpha\, {t_f}^2 \\ 0{,}10\, rad/s = 0.15\, rad/s + \alpha\, t_f \end{cases}$$

Despejando de la última el producto $\alpha\, t = (-0{,}05 rad/s)$ y sustituyéndolo en la primera, se tiene para t_f:

$$\pi/2\ rad/s = 0 + 0.15\, rad/s\, t_f + \tfrac{1}{2}(-0.05 rad/s)\, t_f \qquad\qquad t_f = 12.56\, s$$

b) La aceleración angular.

Del producto hallado entre el tiempo y la aceleración angular se puede despejar α :

$$\alpha = (-0.05 rad/s)/t\ =\ (-0.05 rad/s)/12.56\, s$$

$$\alpha =\ -3.98\ 10^{-3}\, rad/s^2$$

c) La aceleración centrípeta al ingresar y salir de la curva.

Reemplazando en la ecuación (4.17) para los instantes inicial y final resulta:

$$|\vec{a}_c(t)|_{inicial} = (0.15\, rad/s)^2 200\, m =\ 4.5\, m/s^2$$

$$|\vec{a}_c(t)|_{inicial} = 4.5\, m/s^2$$

$$|\vec{a}_c(t)|_{final} = (0.10\, rad/s)^2 200\, m = 2\, m/s^2$$

$$|\vec{a}_c(t)|_{final} = 2\, m/s^2$$

d) La aceleración tangencial en la mitad de la curva.

Con el valor de aceleración angular calculado y el dato del radio de la curva, en la (4.18) se tiene:

$$\left|\vec{a}_{tg}\right| =\ 3.98\ 10^{-3}\, rad/s^2\ 200\, m\ = 0.796\, m/s^2$$

$$\left|\vec{a}_{tg}\right| =\ 0.796\, m/s^2$$

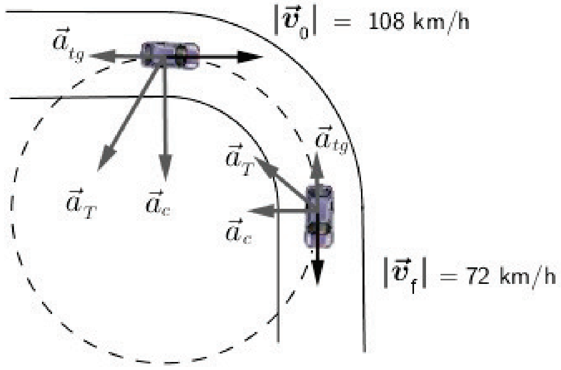
Como la aceleración angular es negativa el signo de la aceleración tangencial también lo será, lo debe interpretarse como una aceleración que actúa frenando tangencialmente al auto (desaceleración).

e) ¿Es constante la aceleración sobre el automóvil?

Para responder esta consigna se graficarán las aceleraciones calculadas en los instantes inicial y final del movimiento de forma de poder tener una idea más clara de lo que ocurre mediante la representación.

Figura 4.14

Gráfico de la aceleración total inicial y final que actúa en este movimiento.



Del análisis del grafico se concluye que el módulo de la aceleración tangencial permanece constante pero no su dirección ni su sentido. Con respecto a la aceleración centrípeta cambia tanto su módulo como la dirección y el sentido. Por lo tanto, la aceleración total que es la suma vectorial de las dos anteriores varía en módulo como dirección y sentido según puede apreciarse del gráfico.

4.10 RADIO DE CURVATURA

Teniendo en cuenta una trayectoria curva cualquiera y una partícula que se mueve por dicha trayectoria, se formula la siguiente pregunta: ¿se podrá aproximar en un Δt dicha curva con una porción de círculo equivalente? Si esto fuera posible, se podría razonar de la siguiente manera: la partícula, en dicho intervalo Δt se comporta como si estuviera recorriendo la porción de un círculo con el radio adecuado, en lugar de la curva. Esto permitirá en principio, si se pudiera determinar qué círculo puede reemplazar a la porción de curva, aplicar los conceptos vistos para MC al movimiento de la partícula en dicho intervalo.

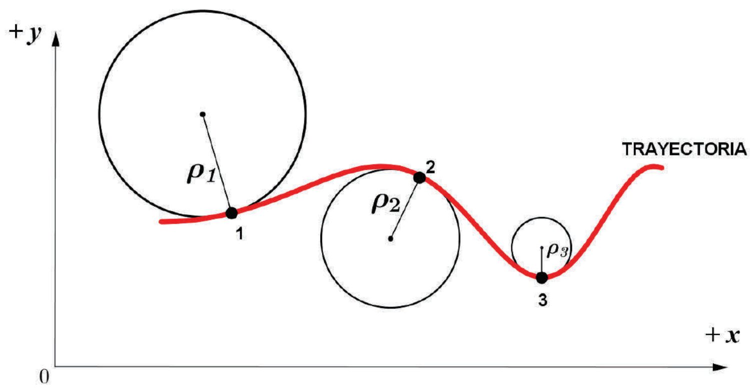
Lógicamente los círculos que representan a cada porción de trayectoria serán distintos y en primera instancia no parece simplificarse con esta forma el análisis.

El nombre de *radio de curvatura* que se suele utilizar cuando se menciona a una curva de una carretera hace referencia precisamente a esta cuestión: toda porción de curva puede ser reemplazada por un círculo de radio adecuado. También se le suele dar a este círculo el nombre de *círculo osculador*.

En la figura 4.15 se representa una trayectoria curva cualquiera y tres puntos en los cuales se muestran los círculos correspondientes a estos puntos a los efectos de ilustrar esta idea de aproximar la porción de curva con una porción de círculo de radio adecuado. El objetivo es encontrar precisamente el radio de cada uno de los círculos que definen los distintos radios de curvatura que presenta la curva.

Figura 4.15

Radio de curvatura para una trayectoria curva.



En la figura 4.15 se simboliza con la letra griega ρ a los distintos radios de curvatura. Obsérvese el punto 1, en donde se representa al círculo con radio de curvatura ρ_1. Se formula entonces la siguiente pregunta: ¿qué condiciones debe tener este círculo para representar a la trayectoria en dicho punto? Las condiciones a cumplir son:

a. Que pase por el punto 1 (hay infinitos)
b. Que sea tangente a la curva en 1 (hay infinitos)
c. Que tenga la misma derivada segunda en el punto, lo que significa físicamente, la misma aceleración

hay un solo circulo posible que cumple las tres, de radio ρ_1

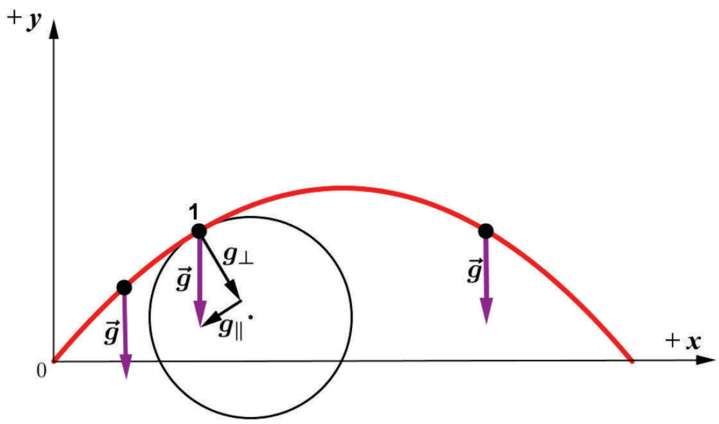
Para que el círculo en el punto 1 sea equivalente a la trayectoria, cuando la partícula pase por el punto 1 debe tener la misma aceleración, ya sea que su movimiento sea circular o que el mismo se desarrolle según la trayectoria.

Ilustremos este nuevo concepto por medio de un ejemplo. Consideremos un movimiento plano como lo es el tiro oblicuo, el disparo de un proyectil en el vacío. Se sabe que en dicho movimiento la aceleración es $\vec{g}$, constante en todos los puntos de la trayectoria de la partícula que es una parábola. En la figura 4.16 se ha representado una trayectoria parabólica como resultado de un tiro en el vacío, y se ha indicado para distintos puntos la aceleración resultante: $\vec{g}$. Analizaremos como calcular el radio de curvatura correspondiente al punto 1 indicado en la figura 4.16.

Como la consigna es encontrar el radio de curvatura para el punto 1 de la figura 4.16, por tratarse de un tiro oblicuo la aceleración resultante de la partícula que pase por dicho punto debe ser $\vec{g}$. Por lo tanto, ya se conoce cuál es la aceleración resultante del movimiento circular con que se pretende reemplazar a la curva (parábola) en el punto 1: $\vec{g}$.

Figura 4.16

Radio de curvatura en un tiro oblicuo.



Como en el estudio de un MC se ha descompuesto a la aceleración en dos componentes, en la figura 4.16 se ha descompuesto a la aceleración resultante $\vec{g}$ en una componente radial (centrípeta) y en una componente tangencial. Estas dos componentes deben responder al siguiente formalismo matemático:

$$\vec{g} = \vec{g}_\perp + \vec{g}_{//} \qquad \text{ó} \qquad \vec{g} = \vec{g}_{c\,1} + \vec{g}_{tg\,1}$$

$$|\vec{g}_\perp| = \frac{{v_1}^2}{\rho_1} = a_{c\,1}$$

$$|\vec{g}_{//}| = \alpha\, \rho_1 = a_{tg\,1} \tag{4.30}$$

De estas expresiones matemáticas y de la Figura 4.16 se observa que si se puede calcular el módulo de la velocidad de la partícula cuando pasa por el punto 1 ($\vec{v}_1$) en módulo y ángulo, se podrá hallar la proyección radial o centrípeta para la aceleración $\vec{g}$ (g_c) y así calcular el radio de curvatura ρ_1 que se busca.

> El radio de curvatura es una construcción física, que permite utilizar resultados del MC para estudiar racionalmente una trayectoria curva cualquiera.

El siguiente problema permite ilustrar el cálculo del radio de curvatura como asimismo reafirmar los conceptos de MC que son necesarios aplicar para la resolución.

En la resolución se aplican cada uno de los pasos sugeridos para la resolución de un problema de cinemática.

Problema 4.3 Video: ***Cinemática clase 23/27***

> Desde una altura de 50 m se lanza una pelota con una velocidad inicial de 50 m/s, formando un ángulo de 37º (considere $\text{sen}(37°) = 0.6$ y $\cos(37°) = 0.8$) con la horizontal. Calcular el radio de curvatura de un punto sobre la trayectoria de la partícula que se encuentra a 100 m del lanzamiento (medido sobre la horizontal).

- *Lectura del enunciado y realización de un gráfico o boceto*

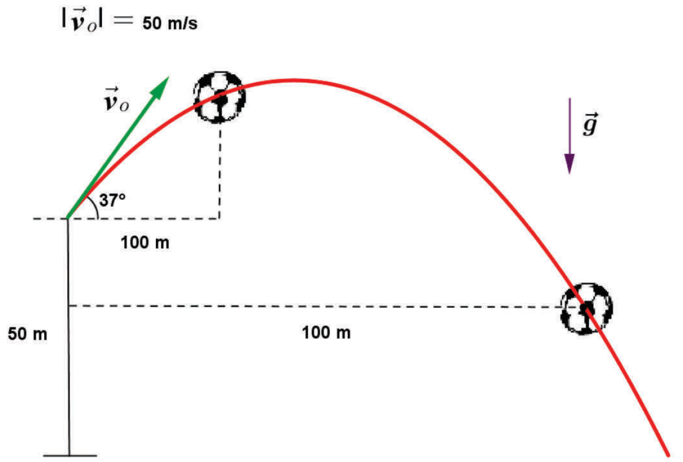


Figura 4.17

Boceto del problema.

Cabe destacar que el enunciado no es muy claro en cuanto al punto donde se debe calcular el radio de curvatura. Es por ello que en el gráfico realizado se indican dos posibles puntos en donde podría encontrarse la pelota: antes de alcanzar la altura máxima o después. Del planteo y resolución de las ecuaciones de movimiento surgirá la verdadera ubicación de dicho punto.

- *Elección de un (SR)*

En la figura 4.18 se indica el SR adoptado, que en este caso y buscando simplificar la resolución se hace coincidir con el punto de lanzamiento del proyectil. Este SR, permite trabajar con una sola componente no nula para la aceleración, de $10\ m/s^2$.

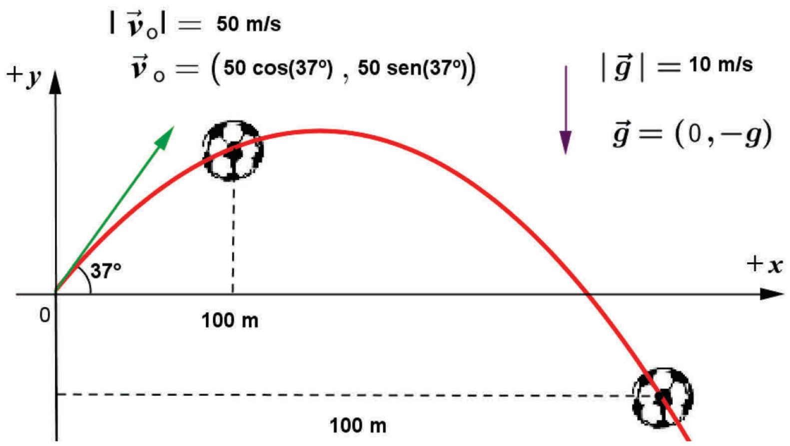


Figura 4.18

Boceto y SR adoptado para el problema.

En la figura 4.18, se expresa a la velocidad inicial y la aceleración de acuerdo con el SR adoptado.

- *Escritura de las ecuaciones del movimiento*

Se trata de un movimiento en el plano (x, y) de acuerdo con el SR adoptado. Por lo tanto es un movimiento compuesto en el plano cuyas ecuaciones describirán movimientos independientes uno de otro en los ejes x e y respectivamente.

Las ecuaciones de movimiento, de acuerdo con el SR adoptado son:

$$\vec{r}(t)\begin{cases} x(t) = 50\cos(37°)\,t \\ y(t) = 50\,\text{sen}(37°)\,t\ -\frac{1}{2}10t^2 \end{cases}$$

Analicemos matemáticamente donde está ubicado el punto donde se quiere calcular el radio de curvatura. Para esto, podemos hacer el siguiente razonamiento matemático:

Si $x(t) = 100\,m \Rightarrow t = 2.5\,s$

Por lo tanto, el proyectil demora $t = 2.5\,s$ en llegar a una distancia horizontal de 100 metros del lanzamiento.

De las ecuaciones para la velocidad podemos calcular cuánto tiempo emplea el proyectil en alcanzar la altura máxima. Esto nos permitirá compararlo con $2.5\,s$.

Para hallar el tiempo que demora el proyectil en alcanzar la altura máxima debemos igualar la componente de la velocidad según el eje y a cero:

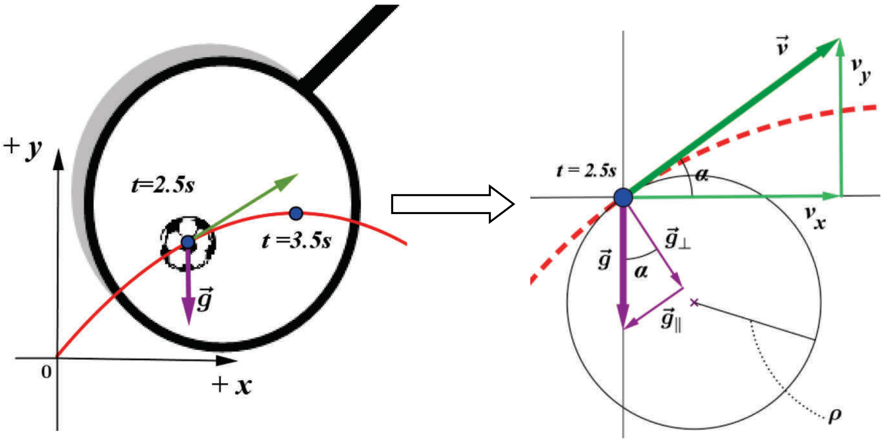
$$\vec{v}_{(t)}\begin{cases} v_x = 50\cos(37°)\ m/s \\ v_y = 50\,\text{sen}(37°) - 10\,t\frac{m}{s} \Rightarrow\ v_y(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad t = 3\,s \end{cases}$$

Entonces si en $t = 3\,s$ alcanza la altura máxima, deducimos que, para $t = 2.5\,s$ la pelota se encontrará en la posición aproximada indicada en la figura 4.19.

Así el punto en donde se desea calcular el radio de curvatura se encuentra antes que el proyectil alcance la altura máxima.

Figura 4.19

Vector velocidad (tangente a la trayectoria) y círculo cuyo radio representa la curvatura.



- *Dar respuesta a las consignas del problema*

En la figura 4.19 se ha ampliado el punto en donde se desea calcular el radio de curvatura. En dicha ampliación se ha representado el vector velocidad (tangente a la trayectoria en el punto) y el círculo cuyo radio representa el radio de curvatura buscado.

Asimismo, como la aceleración es la de la gravedad, se ha descompuesto en una componente radial y otra tangencial. El instante correspondiente a dicho punto es $t = 2.5\ s$ como fue calculado.

Es interesante observar que la componente tangencial $g_{//}$ apunta hacia atrás, indicando que el módulo de la velocidad está disminuyendo ya que la partícula se encuentra ascendiendo. La componente de la velocidad v_x es constante, mientras que la componente v_y disminuye gradualmente hasta hacerse cero cuando el proyectil alcanza la altura máxima.

Volviendo a la consigna, debemos encontrar el valor del vector velocidad para $t = 2.5\ s$, lo que nos permite hallar el ángulo α que se indica en la Figura 4.19.

$$v_x(2.5) = 40\ m/s$$

$$v_y(2.5) = 30 - 10\ (2.5) = 5\ m/s$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{40^2 + 5^2} = 40.31\ m/s$$

$$tg\ (\alpha) = \frac{v_y}{v_x} \quad \square \quad \alpha = 7.12°$$

Conocido α se puede hallar la componente $g_\perp$ de modo de obtener la aceleración centrípeta y con la misma calcular el radio de curvatura buscado.

$$|\vec{a}_\perp| = |\vec{a}_c| = g\ cos\ \alpha = 9.7\ m/s^2$$

$$|\vec{a}_c| = \frac{|v^2|}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{|v^2|}{|\vec{a}_c|} \Rightarrow \rho = \frac{(41\ m/s)^2}{9.7\ m/s^2} = 173.3\ m$$

4.11 CARÁCTER VECTORIAL DE $\vec{\omega}$

Hasta ahora se ha trabajado con ω como si fuera una escalar pero si así fuera, la única información que suministraría sería el ritmo del cambio angular a medida que transcurre el tiempo.

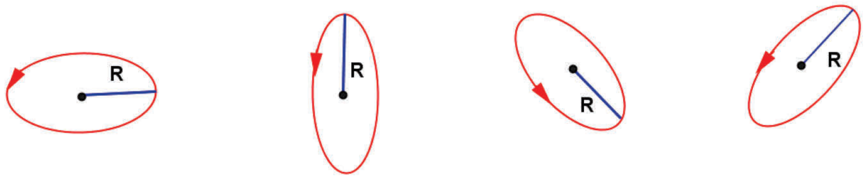
Sin embargo la función de ω no es solamente medir el ritmo angular de cambio. Debe tener un carácter vectorial $(\vec{\omega})$ ya que debe permitir ubicar con su dirección y sentido el plano en donde se está desarrollando el movimiento circular al cual representa.

Para poder comprender esto, se analiza el siguiente ejemplo en donde se podrá apreciar el carácter vectorial que necesariamente tiene que tener la velocidad angular.

Imaginemos los siguientes cuatro movimientos circulares, en donde la partícula tiene el mismo módulo para la velocidad angular ω ($|\vec{\omega}|$ es el mismo para los cuatro), pero que se desarrollan en distintos planos, según se indica en la figura 4.20. Debe comprenderse que hasta ahora no se tuvo en cuenta el plano del movimiento circular, pues en general se consideraba que el mismo era el plano de la hoja. Sin embargo, en la figura 4.20 se proponen cuatro movimientos circulares diferentes, pues el plano en donde se desarrollan es diferente, a pesar que el módulo de la velocidad angular con que recorren la trayectoria circular que describen es la misma.

Figura 4.20

Movimientos circulares: distintos planos de movimiento.

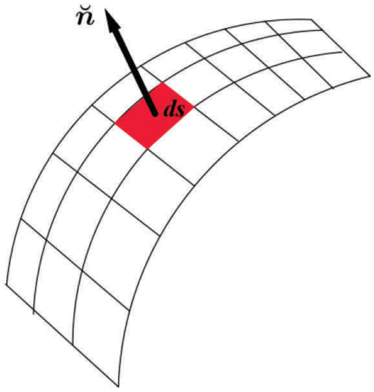


De la figura 4.20 surge la siguiente pregunta: ¿Acaso $\vec{\omega}$ es el mismo para los cuatro? sin dudas, el módulo de $\vec{\omega}$ sí. Una $\vec{\omega}$ vectorial, permite no sólo medir con su módulo la velocidad angular con que se desarrollan los movimientos, sino también con su dirección y sentido ubicar el plano donde se ejecutan los mismos y el sentido del movimiento.

Se denominará: $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \ldots$ a los distintos vectores pues son diferentes. Al pretender que $\vec{\omega}$ brinde la orientación espacial del plano en donde se desarrolla el movimiento, surge la figura 4.21 en dónde se observa cómo un versor normal orienta una superficie en el espacio. Recordar que un versor normal es un vector de módulo unitario, perpendicular al diferencial de superficie que representa y con un sentido dado por la regla del tornillo o del tirabuzón.

Figura 4.21

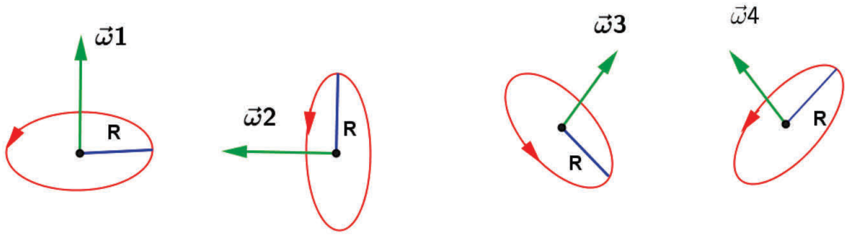
El versor normal orientando una superficie.



Así, si $\vec{\omega}$ con su dirección y sentido hiciera las veces del versor normal, podría orientar instantáneamente el plano del movimiento, y con su módulo medir el ritmo angular con que rota la partícula. La figura 4.22 muestra al vector $\vec{\omega}$ con la función de orientar en el espacio el plano del movimiento.

Figura 4.22

$\vec{\omega}$ como vector.

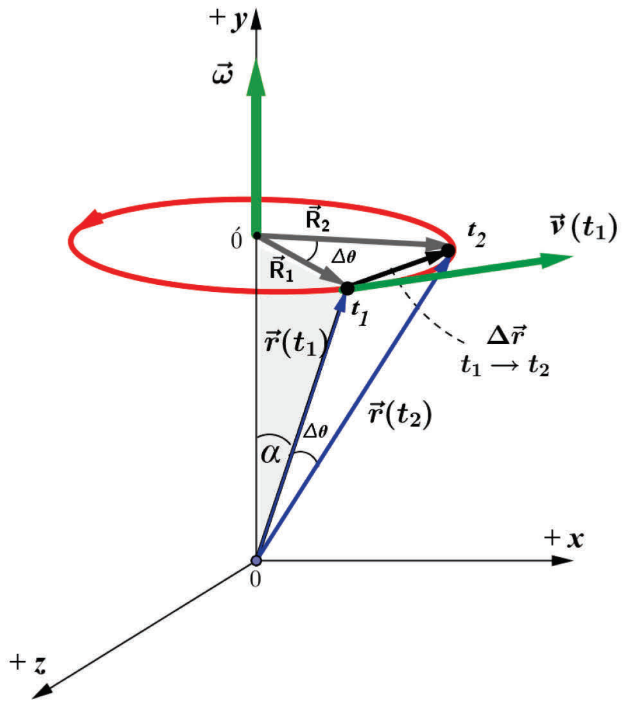


Por lo tanto $\vec{\omega}$ posee una dirección perpendicular al plano instantáneo del movimiento de la partícula y está dirigida en un sentido dado por la regla del tirabuzón, de acuerdo con el sentido de giro de la partícula.

Para poder llegar a una generalización matemática, se debe abandonar momentáneamente el centro de la circunferencia que recorre la partícula para observar el movimiento y, como se muestra en la figura 4.23, tomar un origen de referencia en un punto genérico que está corrido respecto de dicho origen.

Figura 4.23

Caso general de un MC.



En la figura 4.23 se representa una partícula que describe un movimiento circular de radio R, vista de dos sistemas de referencia: uno con origen O y otro con origen O'. El SR con origen O' es el que ya se ha utilizando para describir un MC, un SR centrado en el origen de la circunferencia que describe la partícula. El SR con origen O, está corrido y ve al movimiento desde abajo del plano. Para los instantes de tiempo t_1 y t_2 se han indicado los vectores posición correspondientes a ambos SR. De la figura 4.22, y de los SR adoptados se pude apreciar que:

- El ángulo $\Delta\theta$ que forman los vectores posición vistos de ambos sistemas de referencia es el mismo.
- El vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ correspondiente al intervalo considerado es el mismo.

- La velocidad instantánea $\vec{v}(t_1)$, es tangente a la trayectoria que describe la partícula e independiente del SR.
- Los vectores posición son diferentes de acuerdo con el SR adoptado.

La velocidad instantánea en todo movimiento circular tiene un módulo que está dado por la siguiente expresión:

$$|\vec{v}(t)| = v = \omega\, R = |\vec{\omega}||\vec{r}|sen\alpha \tag{4.31}$$

En donde se ha reemplazado el valor del radio de la circunferencia R por su expresión correspondiente al SR con origen O:

$$R = r\ sen\alpha \tag{4.32}$$

De la expresión (4.31), se deduce que el módulo de la velocidad instantánea se corresponde con el módulo del producto vectorial entre $\vec{\omega}$ y $\vec{r}$. Asimismo la dirección del vector velocidad $\vec{v}$ es perpendicular al plano que forman $\vec{\omega}$ y $\vec{r}$. En la figura 4.23, se ha sombreado el plano formado por $\vec{\omega}$ y $\vec{r}$ al cuál $\vec{v}$ es perpendicular. Por lo tanto se puede escribir la siguiente expresión vectorial para $\vec{v}$:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \tag{4.33}$$

A continuación se analiza este producto vectorial:

- El módulo de la velocidad instantánea, se corresponde al módulo del producto vectorial de la expresión 4.33:

$$|\vec{v}(t)| = v = \omega\, R = |\vec{\omega}||\vec{r}|sen\alpha$$

que coincide con 4.31.

- La dirección y sentido del vector velocidad, responde a las reglas del producto vectorial:

  Dirección: perpendicular al plano imaginario que forman $\vec{\omega}$ y $\vec{r}$.
  Sentido: según la regla del tornillo o tirabuzón.

Así, se ha encontrado una expresión general para el vector velocidad (ecuación 4.33) como función de $\vec{\omega}$ y $\vec{r}$. Por lo tanto, se puede obtener de la misma una expresión para la aceleración $\vec{a}(t)$ en cualquier movimiento circular.

Derivando la velocidad para obtener la aceleración, se observa que de la misma surgen dos términos, cada uno de los cuales representa una componente del vector aceleración: $\vec{a}_c$ y $\vec{a}_{tg}$. Matemáticamente:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\,(\vec{\omega}\ \times \vec{r}) = \left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}\right) \times \vec{r} + \vec{\omega}\ \times \left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right) = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\vec{a}_{tg}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{a}_c}} \tag{4.34}$$

Conclusiones

- Caracterizar a la velocidad angular como vector ($\vec{\omega}$), posibilita encontrar una expresión racional general para la velocidad y la aceleración instantánea en todo MC.
- La expresión general obtenida, comprende a los resultados particulares hallados en donde el origen había sido tomado en el centro de la circunferencia.
- La expresión para la aceleración (ecuación 4.34), obtenida derivando la velocidad, contiene los dos términos centrípeto y tangencial que se obtuvieron cuando se analizó al MC (expresiones 4.17 y 4.18).
- Se destaca que si bien la racionalización conduce rápidamente a una formulación matemática, no brinda una imagen tan clara del significado centrípeto y tangencial para ambos términos que componen la aceleración. Si bien el racionalismo matemático es una herramienta muy poderosa, un análisis detallado para un caso particular como lo es tomar un origen centrado en la circunferencia, permite identificar el sentido físico que tienen ambas componentes.
- Si $\vec{\omega}$ no fuera constante en dirección, el plano del movimiento cambiaría en cada instante, siendo siempre perpendicular a la dirección de $\vec{\omega}$. Esto hace pensar en los juegos clásicos de un parque de diversiones, como por ejemplo el denominado "samba" (figura 4.24). Este juego, se caracteriza porque en la medida que va girando, va cambiando continuamente el plano del movimiento, para el cual el vector $\vec{\omega}$ es siempre perpendicular. Si se piensa en la dirección instantánea de $\vec{\omega}$ en este juego, se debe imaginar una recta que pasa por el centro del disco y que va bamboleándose en la medida que transcurre el tiempo.

Figura 4.24

Ilustración del juego samba para comprender el carácter vectorial de la velocidad angular.

5 MOVIMIENTO RELATIVO

Todo movimiento es relativo a un sistema de referencia. Sin embargo con este título en física se quiere significar algo más profundo: cómo relacionar observaciones realizadas desde distintos SR. En otras palabras, analizar el marco teórico bajo el cual se pueden relacionar las ecuaciones de movimiento vistas desde distintos SR.

Se comienza con el análisis de un ejemplo que podría catalogarse de intuitivo, que permite introducir el tema que se quiere abordar.

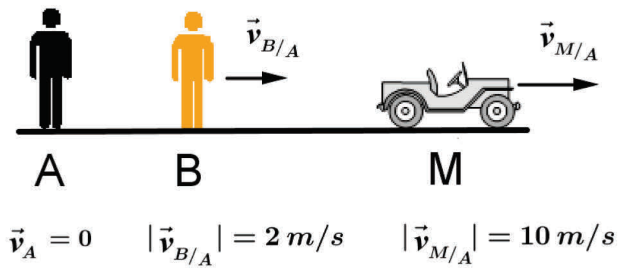
5.1 EJEMPLO INTRODUCTORIO

Sea un observador A fijo a Tierra y un móvil M que se mueve respecto de A con una velocidad constante de 10 m/s en la dirección y sentido indicados en la figura 5.1. En la figura se ha introducido una nomenclatura que utiliza subíndices a los efectos de identificar en cada vector velocidad el sistema de referencia al que corresponde. Así, $\vec{v}_{M/A}$ es el vector velocidad del móvil M visto del sistema de referencia A.

Primera situación: un observador B se mueve respecto de A ($\vec{v}_{B/A}$) con una velocidad de $2\,m/s$ en la dirección y sentidos indicados en la figura 5.1. ¿Cuál es la velocidad del móvil M respecto del observador B?

Figura 5.1

Esquema de la primera situación.



Para resolver la consigna se pasan a un lenguaje matemático los datos del problema:

Observador A : fijo a tierra $\vec{v}_A = 0$

Móvil M: $\vec{v}_{M/A}$; $|\vec{v}_{M/A}| = 10\,m/s$; $v_{M/A_x} = 10\,m/s$

Observador B : $\vec{v}_{B/A}$; $|\vec{v}_{B/A}| = 2\,m/s$; $v_{B/A_x} = 2\,m/s$

La consigna es encontrar $\vec{v}_{M/B} = ?$

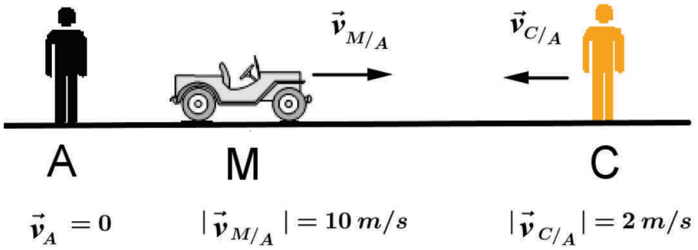
En ésta primer situación, el observador B y el móvil M se alejan de A como se aprecia en la figura 5.1. Asimismo, el móvil M se aleja también del observador B, pero con una velocidad menor de lo que lo hace respecto de A. Podemos imaginar lo que ocurre en una carretera cuando un automóvil nos sobrepasa. Nosotros lo vemos alejarse pero con una velocidad que surge de la diferencia entre la que llevamos (respecto de tierra) y la que él lleva (respecto de tierra). De este razonamiento, surge la siguiente expresión para nuestra incógnita:

$$v_{M/B_x} = v_{M/A_x} - v_{B/A_x} \;\; \Rightarrow \;\; v_{M/B_x} = 10\,m/s - 2\,m/s \qquad \boxed{v_{M/B_x} = 8\,m/s} \;\; \Rightarrow$$

Segunda situación: si en lugar del observador B, se tiene un observador C que se mueve en la dirección y sentido indicados en la figura 5.2 con módulo de velocidad de 2 m/s. ¿Cuánto vale en esta nueva situación la velocidad del móvil M con respecto al observador C?

Figura 5.2

Esquema de la segunda situación.



Observador C: $\vec{v}_{C/A}$; $|\vec{v}_{C/A}| = 2\,m/s$; $v_{C/A_x} = -2\,m/s$

$\vec{v}_{M/C} = ?$ es ahora la consigna.

En esta nueva situación, y como ilustra la figura 5.2, si bien el móvil M se aleja de A, el observador C se acerca, tanto al observador A como al móvil M. La distancia entre el móvil y C se acorta más rápidamente que si uno de ellos estuviera quieto. Es por ello que la velocidad que medirá el observador C del móvil estará dada por la siguiente expresión:

$$v_{M/C_x} = v_{M/A_x} - v_{C/A_x} \;\; \Rightarrow \;\; v_{M/C_x} = 10\,m/s + 2\,m/s \;\; \Rightarrow \qquad \boxed{v_{M/C_x} = 12\,m/s}$$

Con este sencillo ejemplo hemos introducido la idea que encierra medir la velocidad de un móvil respecto de dos observadores distintos que están en movimiento relativo de traslación (B y C se trasladan respecto de A que está fijo).

Se debe generalizar este resultado y que la suma o la resta de las velocidades relativas surjan como consecuencia del carácter vectorial de las mismas.

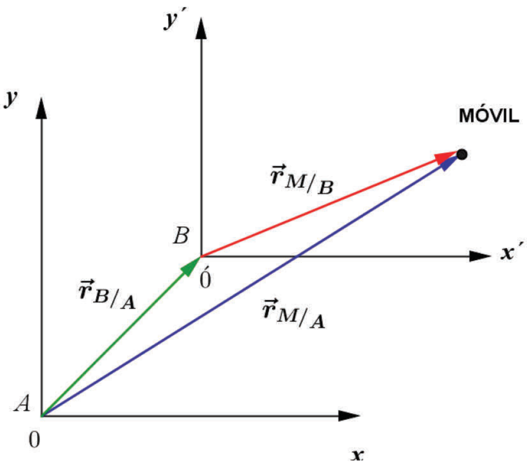
5.2 SISTEMAS DE REFERENCIA EN TRASLACIÓN PURA

Se desarrolla el análisis general para este caso particular en donde los sistemas de referencia simplemente se trasladan uno respecto del otro. Cabe destacar que los resultados a obtener son válidos únicamente en esta condición y no lo serán cuando existe rotación entre los SR, caso que se analiza posteriormente.

La situación a estudiar es la siguiente: un móvil "M" y dos observadores "A" y "B" con sistemas de referencia en traslación pura uno respecto del otro, como se muestra en la figura 5.3.

Figura 5.3

Un móvil visto desde distintos SR en traslación pura.



En la Figura 5.3 se representan los dos sistemas de referencia con sus orígenes O y O' y los vectores posición correspondientes a la ubicación del móvil M. Se ha introducido una nomenclatura que utiliza subíndices a los efectos de identificar en cada vector posición el sistema de referencia al que corresponde. Así, $\vec{r}_{M/A}$ es el vector posición del móvil M visto del sistema de referencia A.

De la Figura 5.3, surge la siguiente relación vectorial entre los distintos vectores posición:

$$\boxed{\vec{r}_{M/A} = \vec{r}_{M/B} + \vec{r}_{B/A}} \quad (5.1)$$

Al derivar ambos miembros respecto del tiempo, se extiende esta relación a las velocidades y a las aceleraciones según se indica:

$$\boxed{\vec{v}_{M/A} = \vec{v}_{M/B} + \vec{v}_{B/A}} \quad (5.2)$$

$$\boxed{\vec{a}_{M/A} = \vec{a}_{M/B} + \vec{a}_{B/A}} \quad (5.3)$$

Se han encontrado las formas matemáticas generales que vinculan las posiciones, velocidades y aceleraciones para dos sistemas de referencia en traslación pura que observan el movimiento de un mismo móvil.

Este resultado permite conciliar las observaciones realizadas y pasar de un sistema de referencia a otro simplemente conociendo como es el movimiento relativo de traslación entre ambos.

Existe un caso particular que debemos analizar. Si $\vec{v}_{B/A}$ es constante, entonces las aceleraciones medidas del móvil en ambos sistemas de referencia son las mismas.

$$\boxed{\vec{v}_{B/A} = cte \Rightarrow \vec{a}_{B/A} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a}_{M/A} = \vec{a}_{M/B}} \quad (5.4)$$

Este resultado es importante al momento de aplicarlo en la resolución de problemas. Si se conoce la aceleración de una partícula respecto de un SR A, esta aceleración será la misma para cualquier otro SR que simplemente se traslade respecto de A con velocidad constante.

Con los siguientes problemas se ilustran estos resultados en donde se reafirma el concepto de traslación entre sistemas de referencia como así también concilian las observaciones realizadas en los mismos.

Problema 5.1 Video: *Cinemática clase 26/27*

Un proyectil es lanzado hacia adelante con una velocidad $\vec{v}_0$, desde un cañón montado en un avión que vuela horizontalmente con una velocidad $\vec{v}_A$. Hallar:
a) La ecuación de la trayectoria del proyectil relativa a la tierra.
b) La ecuación de la trayectoria del proyectil respecto al avión.
c) La ecuación de la trayectoria del avión relativa al proyectil.

- *Lectura del enunciado*

De la lectura del enunciado, surgen los siguientes lineamientos particulares para la resolución de este problema, todos enmarcados dentro de los pasos generales sugeridos para resolver problemas de cinemática:

1. Si bien la consigna es encontrar la trayectoria, para hallarla se deben necesariamente escribir las ecuaciones de movimiento.

2. El avión, que vuela a velocidad constante respecto de tierra, ilustra la situación que se ha desarrollado: dos sistemas de referencia en traslación pura.

3. Como la velocidad de traslación del avión respecto de tierra es constante, la aceleración de cualquier partícula que se observe desde los SR planteados será la misma. Como en este caso, el proyectil una vez abandonado caerá con aceleración $\vec{g}$ respecto de tierra, esta aceleración será también la que se medirá respecto del avión.

4. Un comentario especial merece la velocidad de lanzamiento del proyectil $\vec{v}_0$. El proyectil se lanza desde el avión, lo que significa que esta velocidad está medida desde el avión. Si se hubiera lanzado en tierra, sería la velocidad medida desde tierra. Este punto a veces causa confusión. La velocidad de lanzamiento es independiente del movimiento del SR donde se realiza.

Como cada inciso solicita referir las ecuaciones a SR diferentes, en realidad debemos resolver el problema tres veces, buscando las ecuaciones de movimiento correspondientes a cada SR y obtener de ellas la trayectoria.

Inciso a) Ecuación de la trayectoria del proyectil relativa a la tierra.

- *Realización del gráfico o boceto*

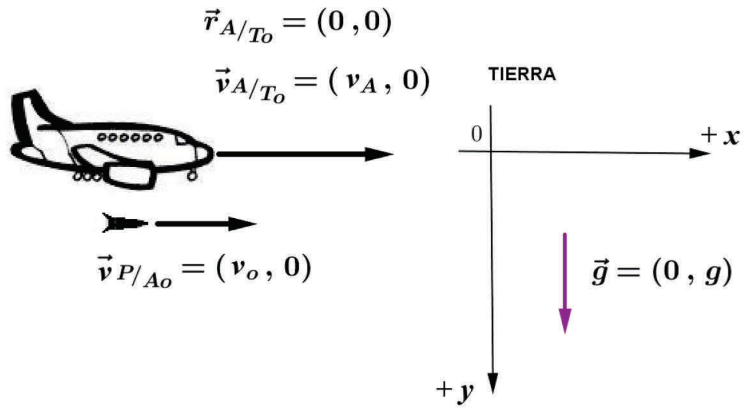
En la figura 5.4 se realiza el boceto de la situación planteada acompañada del SR adoptado, que en este caso es un SR fijo en tierra.

Se ha adoptado la convención de tomar el eje de las y positivas hacia abajo, ya que como el movimiento se realiza en caída, permitirá trabajar con valores positivos para la aceleración.

En la figura 5.4 se indican las componentes de los distintos vectores involucrados, las condiciones iniciales como la aceleración respecto del SR adoptado. Asimismo se utiliza una nomenclatura de subíndices para identificar a cada vector con el SR respecto del cual está medido.

Figura 5.4

Sistema de referencia en tierra para el Problema 5.1.

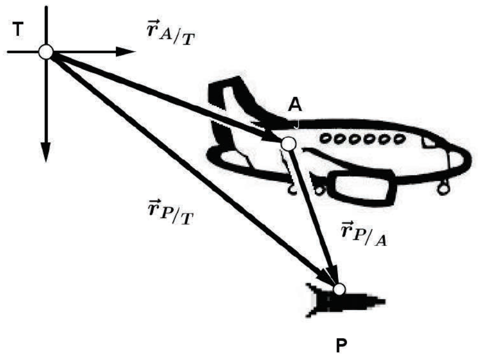


• *Escritura de las ecuaciones de movimiento*

En la figura 5.5 se realiza un esquema de tipo triangular para vincular los distintos vectores medidos desde los dos SR posibles: tierra y avión. Este tipo de construcción triangular es muy útil al momento de necesitar vincular vectores ya que permite fácilmente encontrar las relaciones buscadas.

Figura 5.5

Deducción grafica de la relación entre los vectores posición.



La relación entre estos vectores queda expresada como:

$$\vec{r}_{P/T} = \vec{r}_{P/A} + \vec{r}_{A/T}$$

De esta manera, se obtienen las CI del problema medidas respecto de tierra y la aceleración, que en este caso es la misma para ambos SR, también respecto de tierra.

$$\vec{r}_{P/T_0} = (0{,}0)$$

$$\vec{v}_{P/T_0} = \vec{v}_{P/A} + \vec{v}_{A/T_0} = (v_0 + v_A, 0)$$

$$\vec{a}_{P/T} = (0, g)$$

Con las CI y la aceleración, podemos escribir la ecuación de movimiento del proyectil respecto de tierra.

$$x_{P/T} = (v_0 + v_A)t$$

$$y_{P/T} = \frac{1}{2}gt^2$$

- *Respuesta a las consignas del problema*

Como lo que se solicita es encontrar la ecuación de la trayectoria del proyectil vista desde tierra, se debe despejar la variable t para encontrar la $y(x)$ de la trayectoria. Matemáticamente:

$$\left.\begin{array}{l} x_{P/T} = (v_0 + v_A)t \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{x_{P/T}}{(v_0 + v_A)} \\ y_{P/T} = \frac{1}{2} g t^2 \end{array}\right\} \qquad \boxed{y_{P/T} = \frac{1}{2} g \frac{x_{P/T}^2}{(v_0 + v_A)^2}}$$

- *Análisis del resultado obtenido*

- Se trata de una parábola, como era de esperar para un tiro oblicuo.
- La velocidad del proyectil, vista desde tierra, contempla la velocidad de lanzamiento más la del avión.
- En la figura 5.6 se representa gráficamente la parábola obtenida, que contrastaremos con los resultados correspondientes a los incisos b) y c) en la medida que sean resueltos.

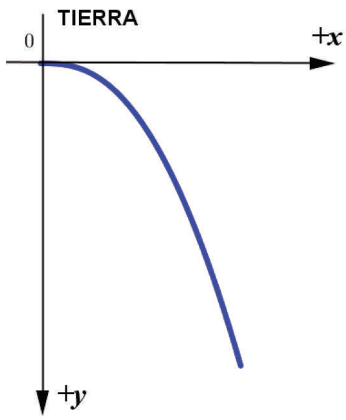


Figura 5.6

Trayectoria vista desde tierra (parábola).

Inciso b) Ecuación de la trayectoria del proyectil respecto al avión.

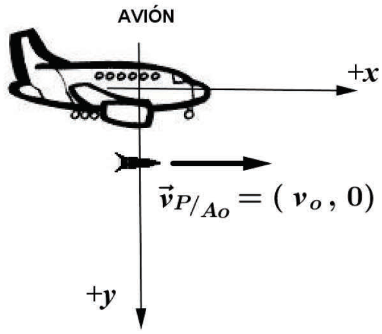
- *Realización del gráfico o boceto*

En la figura 5.7 se realiza el boceto de la situación planteada acompañada del SR adoptado, que en este caso es un SR fijo en el avión que se mueve respecto de tierra a velocidad constante.

Se ha adoptado la convención de tomar el eje de las y positivas hacia abajo, ya que como el movimiento se realiza en caída, nos permitirá trabajar con valores positivos para la aceleración.

Figura 5.7

Sistema de referencia en el avión para el Problema 5.1.



- *Escritura de las ecuaciones de movimiento*

Del esquema de tipo triangular representado en la figura 5.5 se plantean las relaciones ente los vectores posición y desplazamiento vistos del SR que se está analizando, el avión. Esta relación permite determinar las CI necesarias para escribir las ecuaciones de movimiento buscadas. Asimismo, como el avión se traslada en un MRU respecto de tierra, la aceleración es la misma para ambos SR: la aceleración de la gravedad $\vec{g}$. Se trata por tanto de un MRUV.

Para la posición inicial se llega al mismo resultado que en el inciso anterior ya que desde ambos SR resulta el vector nulo, puede probarlo Ud. despejando la posición del proyectil respecto del avión.

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/T} - \vec{r}_{A/T}$$

La velocidad inicial se deduce de la misma relación de la posición derivada una vez respecto del tiempo, resultando:

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/T} - \vec{v}_{A/T}$$

De estas relaciones resultan las condiciones iniciales:

$$\vec{r}_{P/A_0} = (0{,}0)$$

$$\vec{v}_{P/A_0} = (v_0, 0)$$

$$\vec{a}_{P/A} = (0, g)$$

Las ecuaciones horarias en base a estas condiciones iniciales y aceleración, resultan:

$$x_{P/A} = v_0 t$$

$$y_{P/A} = \frac{1}{2} g t^2$$

- *Respuesta a las consignas del problema*

La consigna es determinar la trayectoria del proyectil vista desde el avión. Eliminando t, se obtiene para la misma una parábola, (figura 5.8).

$$\left.\begin{aligned} x_{P/A} &= v_0 t \\ y_{P/A} &= \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{y_{P/A} = \frac{1}{2} g \frac{x_{P/A}^2}{(v_0)^2}}$$

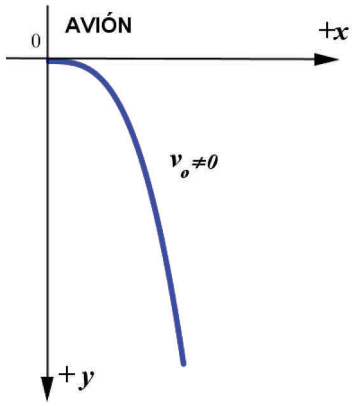


Figura 5.8

Trayectoria vista desde el avión (parábola).

- *Análisis del resultado obtenido*

➢ Si se compara matemáticamente a esta parábola con la obtenida en el inciso a) se observa una diferencia sustancial en el denominador, en donde no aparece v_A. Esto condiciona la solución encontrada, donde se ha aclarado que la misma es para $v_0 \neq 0$.

➢ Si $v_0 = 0$ entonces la trayectoria degenera en una recta como se ilustra en la figura 5.9, donde matemáticamente tenemos: $x_{P/A} = 0$.

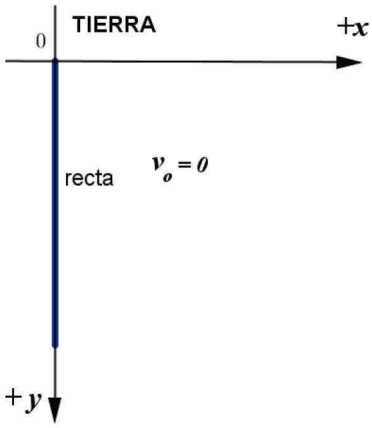


Figura 5.9

Trayectoria vista desde el avión con $v_0 = 0$.

➢ El resultado es interesante: Si al proyectil simplemente se lo deja caer desde el avión (como en realidad ocurre con las bombas que lanzan los bombarderos), desde el mismo se ve al proyectil moverse en línea recta hacia abajo.

➢ Nuevamente se destaca la importancia de contrastar un resultado para situaciones extremas que permitan asegurar la validez de los mismos.

Inciso c) Ecuación de la trayectoria del avión relativa al proyectil.

Debido al detallado análisis que se ha realizado en los incisos anteriores, se deja simplemente desarrollado el racionalismo matemático que permite abordar este inciso, mostrando cómo es posible pasar de un sistema de referencia a otro si relacionamos adecuadamente las variables involucradas.

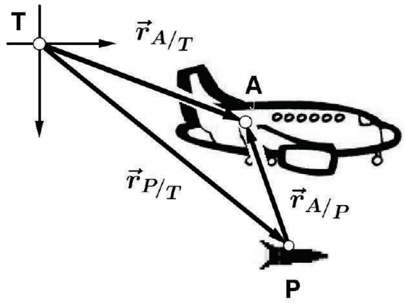


Figura 5.10

Deducción gráfica de la relación entre vectores posición.

De la figura 5.10 surge la relación entre los vectores:

$$\vec{r}_{A/T} = \vec{r}_{P/T} + \vec{r}_{A/P} \; \rightarrow \; \vec{r}_{A/P} = \vec{r}_{A/T} - \vec{r}_{P/T}$$

Y las condiciones iníciales:

$$CI \begin{cases} \vec{r}_{A/P_0} = (0{,}0) \\ \vec{v}_{A/P_0} = (-v_0, 0) \\ \vec{a}_{A/P} = \vec{a}_{A/T} - \vec{a}_{P/T} = (0{,}0) - (0, g) = (0, -g) \end{cases}$$

Finalmente llegamos a la ecuación de trayectoria buscada

$$\left.\begin{array}{l} x_{A/P} = -v_0 t \; \rightarrow \; t = -\dfrac{x_{A/P}}{v_0} \\ y_{A/P} = -\dfrac{1}{2} g t^2 \end{array}\right\} \quad \boxed{y_{A/P} = -\frac{1}{2} g \frac{x_{A/P}^2}{(v_0)^2}}$$

Problema 5.2 Video: ***Cinemática clase 25/27***

Encuentro entre dos móviles, movimiento relativo.

Dos móviles A y B se mueven a lo largo de la misma recta, con velocidad constante de $+40\ m/s$ y $-80\ m/s$ respectivamente.

a) ¿Cuál es la velocidad de A respecto de B?
b) ¿Cuál es la velocidad relativa de B respecto de A?
c) Si en el instante $t = 0\ s$ la separación inicial entre los dos cuerpos es de $200\ m$, ¿Cuándo chocaron o chocarán las partículas, si es que lo hacen?
d) ¿Cuál es la posición relativa x_{AB} , un segundo antes del instante $t = 0\ s$?
e) Trazar los gráficos horarios de x_A, x_B y x_{AB}.

- *Lectura del enunciado*

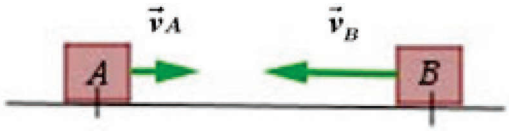
Se concluye luego de la lectura que los móviles describen una trayectoria rectilínea horizontal con una rapidez constante cada uno de ellos (MRU), sugerida sobre el eje x. Al indicarse en el enunciado los signos de las velocidades se quiere significar que se mueven con sentido contrario sobre una misma recta.

- *Realización de un gráfico o boceto*

De acuerdo a lo indicado en el enunciado, los cuerpos siguen una trayectoria rectilínea y de los signos de las velocidades se puede realizar un gráfico de la situación como el de la figura 5.11.

Figura 5.11

Boceto de la situación planteada.

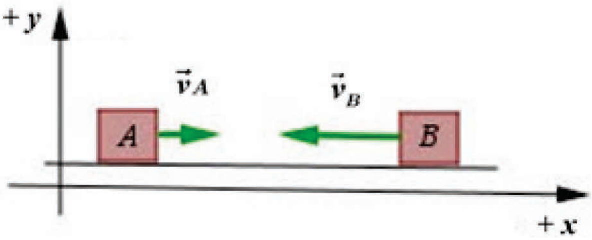


- *Elección de un (SR)*

Del enunciado del problema se desprende implícitamente el sistema de referencia respecto de Tierra que se debe elegir, al indicarnos los signos de la velocidad. Se ubican los ejes cartesianos como se indica en la figura 5.12, de forma de describir un movimiento de traslación pura unidimensional. Observar que se desconoce en principio la posición inicial donde se encuentra cada uno de ellos.

Figura 5.12

Sistema de referencia y vectores velocidad que intervienen.



$\vec{v}_{A/T} = (40, 0)\ m/s \qquad \vec{v}_{B/T} = (-80, 0)\ m/s$

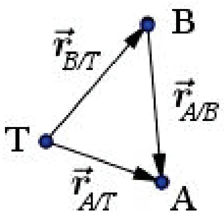
- *Escritura de las ecuaciones del movimiento*

Se puede encontrar la relación entre las posiciones y las velocidades de ambos móviles respecto de Tierra a partir del gráfico que se ha realizado en la figura 5.13. Observar que se ha construido lo que comúnmente se conoce como el triángulo de posiciones o velocidades, en donde un vértice del triángulo es la referencia Tierra y los otros dos vértices son las referencias de cada móvil A y B. Así, se pueden apreciar los vectores posición de cada móvil respecto de la referencia fija a Tierra (T) siendo $\vec{r}_{A/T}$ el vector posición de A respecto de Tierra y $\vec{r}_{B/T}$ la posición de B también respecto de Tierra. A su vez se observa que el vector $\vec{r}_{B/A}$ representa la posición del móvil B respecto del A.

Es de mucha utilidad construir este tipo de representación de forma tal de poder relacionar vectores desde distintos sistemas de referencia, como es este caso. En general el alumno no los realiza, y lo hace digamos mentalmente, incurriendo normalmente en errores de signos que luego son trasladados lógicamente a lo largo de todo el problema.

Figura 5.13

Relación entre los vectores posición de los móviles respecto de Tierra.



donde:

$\vec{r}_{A/T}$, posición del móvil A respecto de Tierra.

$\vec{r}_{B/T}$, posición del móvil B respecto de Tierra.

$\vec{r}_{A/B}$, posición relativa del móvil A respecto al B.

Se observa en el triángulo de la figura una relación de suma y resta de vectores, que permite vincular las posiciones respecto de los distintos sistemas de referencia posibles, cuya expresión matemática es:

$$\vec{r}_{A/T} = \vec{r}_{B/T} + \vec{r}_{A/B}$$

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_{A/T} - \vec{r}_{B/T}$$

derivando respecto del tiempo la expresión anterior, resulta la relación buscada que vincula las velocidades relativas entre los móviles:

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_{A/T} - \vec{v}_{B/T}$$

Dado el carácter vectorial de la velocidad, es habitual expresar todas las velocidades, tanto la relativa como la de los móviles A y B respecto de Tierra, mediante sus componentes vectoriales (dos en el movimiento plano y tres en el espacio).

Arribado a este punto se está en condiciones de responder a las consignas del problema. Cabe destacar que se han racionalizado los movimientos (MRU para cada móvil), ya que lo haremos cuando la consigna así lo requiera. Lo importante es que se ha racionalizado vectorialmente la relación entre los distintos vectores vistos desde distintos SR, tanto posición como velocidad.

- *Respuesta a las consignas del problema*

De acuerdo a los datos del problema y teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores se está en condiciones de responder las distintas consignas:

a) ¿Cuál es la velocidad de A respecto de B?

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_{A/T} - \vec{v}_{B/T} = (40, 0)\ m/s - (-80, 0)\ m/s = (120, 0)\ m/s$$

$$v_{(A/B)_x} = 120\ m/s$$

En este caso, si se observa al móvil A desde la posición de B, este se está acercando hacia B a razón $120\ m/s$. Como ejemplo práctico, puede plantearse la situación que se origina en una ruta, cuando dos automóviles viajan en sentido contrario. Uno ve al otro acercarse, con una velocidad que resulta de la suma de las rapideces de ambos automóviles.

b) ¿Cuál es la velocidad relativa de B respecto de A?

Es claro, que debe haber un cambio de signo entre la consigna a) y la b). Racionalmente, de acuerdo con las ecuaciones que vinculan las velocidades, correspondientes a la figura 5.13, resulta:

$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_{B/T} - \vec{v}_{A/T} = (-80, 0)\ m/s - (40, 0)\ m/s = (-\ 120, 0)\ m/s \qquad v_{(B/A)_x} = -120\ m/s$

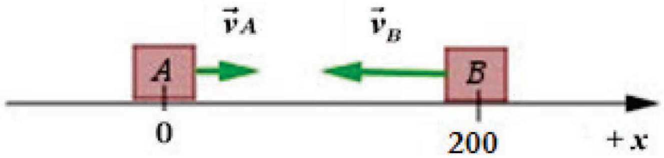
En este caso se invierte la observación y se ve al móvil B acercarse desde la posición de A. Así, la velocidad con que se acerca el móvil B a la posición del A es de $-120\ m/s$, indicando el signo negativo que la velocidad apunta en sentido negativo del eje x.

c) Si en el instante $t = 0\ s$ la separación inicial entre los dos móviles es de $200\ m$, ¿Cuándo chocaron o chocarán, si es que lo hacen?

Para responder esta consigna se ubica el cero del sistema de referencia en el móvil A, de forma tal de poder ubicar a $200\ m$ al móvil B, como se observa en la figura 5.14.

Figura 5.14

Separación inicial entre los móviles A *y* B.



Las ecuaciones horarias de movimiento vistas desde Tierra para cada móvil (MRU), pueden escribirse como:

$$\begin{cases} x_{A/T}(t) = 0 + 40\ m/s\ \ t \\ x_{B/T}(t) = 200\ m - 80\ m/s\ \ t \end{cases}$$

La ecuación horaria correspondiente a la posición relativa de los dos móviles, estará dada por la diferencia entre las ecuaciones anteriores:

$x_{A/B}(t) = x_{A/T}(t) - x_{B/T}(t) = 40\ m/s\ t - 200\ m\ + 80\ m/s\ t =\ -200\ m\ + 120\ m/s\ t$

Esta última expresión indica por ejemplo, que un observador ubicado en el móvil B ve al móvil A, ubicado inicialmente a $-\ 200\ m$ (o sea a su derecha) y acercándose a él.

Con estas ecuaciones se está en condiciones de resolver este inciso de dos formas distintas. La primera es a partir de la igualación de las ecuaciones horarias vistas de Tierra, o sea como un problema de encuentro clásico entre dos móviles, resultando:

$x_{A/T}(t) = x_{B/T}(t)$

La otra forma de resolución es considerar la ecuación horaria que obtenida que describe el movimiento relativo de los móviles. Así, cuando ambos se encuentren, la posición relativa entre ellos será nula, expresando de la siguiente forma:

$x_{A/B}(t) = 0$

Igualando a cero la expresión de movimiento relativo se obtiene el valor pedido del tiempo de encuentro t_e:

$x_{A/B}(t_e) = 0 \; = \; -200\,m \; + 120\,m/s\,t_e$

$t_e = \; 1{,}67\,s$

d) ¿Cuál es la posición relativa x_{AB} , un segundo antes del instante $t = 0\,s$?

Se pide en este inciso realizar una evaluación para un tiempo menor que cero. Esto es físicamente posible ya que ambos móviles se estaban moviendo antes del encuentro, por lo tanto el tiempo a considerar será $t = -1\,s$ en la ecuación de la posición relativa anterior:

$x_{A/B}(-1\,s) = \; -200\,m \; + 120\,m/s\,(-1\,s\,) \; = -\,320\,m$

$x_{A/B} = \; -320\,m$

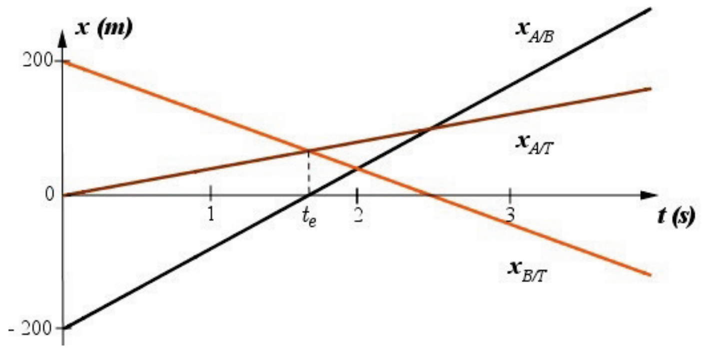
El signo negativo de la posición, de acuerdo a lo expresado anteriormente, se debe a la observación realizada desde B en el sistema de referencia elegido, positivo a derecha de éste.

e) Trazar los gráficos horarios de $x_A(t), x_B(t)$ y $x_{AB}(t)$.

Se solicita graficar las funciones correspondientes a las posiciones de cada móvil respecto de Tierra y su posición relativa respecto del tiempo. Así, $x_{A/T}$ tiene como ordenada al origen 0 y una pendiente de $40\,m/s$, $x_{B/T}$ por su parte una ordenada al origen de $200\,m$ y una pendiente de $-\,80\,m/s$ y por último la ordenada al origen de $x_{A/B}$ es $-200\,m$ y su pendiente de $120\,m/s$. La figura 5.15 ilustra los gráficos solicitados, en donde pueden apreciarse algunos de los resultados obtenidos.

Figura 5.15

Gráficos horarios.



Se verifica en los gráficos realizados, que al encontrarse los móviles en $t_e = \; 1{,}67\,s$ la posición relativa entre ellos es cero.

5.3 SISTEMAS DE REFERENCIA EN ROTACIÓN

Un caso particular a analizar es el de sistemas de referencia en rotación en donde tendremos que generalizar los resultados obtenidos para el caso de traslación pura.

En el apartado anterior se encontraron las relaciones que permiten vincular observaciones realizadas desde dos SR que se trasladan uno respecto de otro. En particular, se obtuvo que las velocidades en el caso de SR en traslación pura se relacionan a través de la siguiente expresión vectorial:

$$\vec{v}_{M/A} = \vec{v}_{M/B} + \vec{v}_{B/A} \tag{5.5}$$

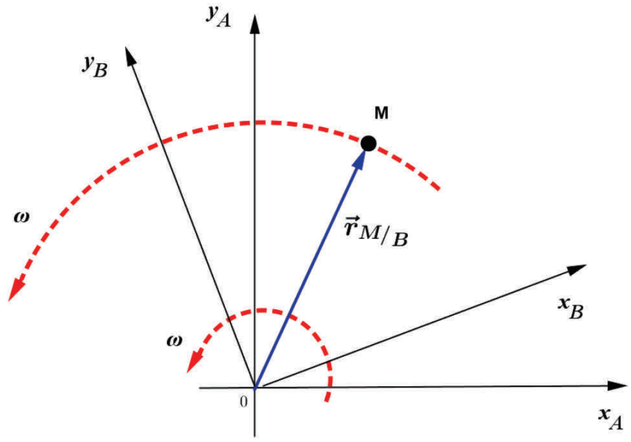
¿Qué sucede si se aplica esta expresión, obtenida para traslación pura al caso de un sistema de referencia que rota respecto de otro?

Para mostrar los resultados que obtendríamos, será analizada a la siguiente situación:

Sea un móvil M que rota con velocidad angular ω y que es visto: desde un sistema de referencia A fijo a tierra y desde un sistema de referencia B en rotación pura respecto del A, con velocidad angular ω como se indica en la figura 5.16.

Figura 5.16

Un móvil visto desde distintos SR en rotación pura.



Como el móvil M se encuentra rotando con la misma velocidad angular ω que el sistema de referencia B, desde éste, al móvil se lo ve en reposo: $\vec{r}_{M/B}$ es constante, no es función del t.

Si desea hacer una simple dramatización de esta situación, tome un objeto con su mano, extiéndala y comience a dar giros. Si mira el objeto mientras gira, se lo ve en reposo, sin embargo las personas que puedan observarlo a Ud. girar con el objeto, dirán que la posición va cambiando ya que el mismo describe una trayectoria circular.

Aplicando las relaciones entre velocidades obtenidas para sistemas que se encuentran en traslación pura (ecuación 5.5) a esta situación de rotación, obtenemos:

$\vec{v}_{M/B} = 0$ (El móvil está en reposo respecto del sistema que rota) (5.6)
$\vec{v}_{M/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (El móvil describe un MC respecto del SRA) (5.7)
$\vec{v}_{B/A} = 0$ (Pues el origen del SRB no se traslada respecto del SRA) (5.8)

así, de la ecuación 5.5, se llega a la siguiente incongruencia:

$\vec{\omega} \times \vec{r} = 0$!!!!!!!!!

entonces ¿dónde está el problema? O mejor ¿dónde está el error?

El error cometido se encuentra no en la relación entre las posiciones del móvil respecto de ambos SR, (ecuación 5.1) sino en la derivada de la misma que nos conduce a las velocidades, (ecuación 5.5).

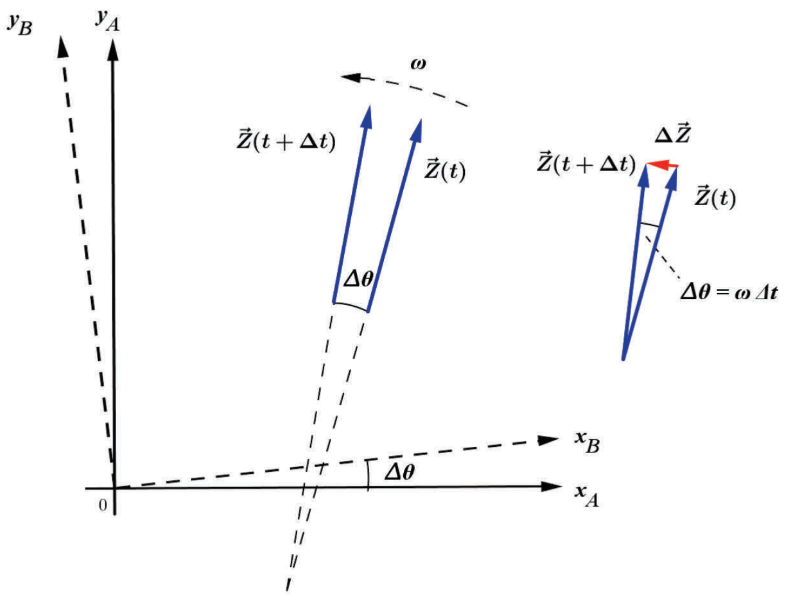
Para analizar dicha derivada, se debe estudiar en detalle como varía el vector posición $\vec{r}_{M/B}$ visto del SR A. En forma más genérica debemos estudiar cómo varía un vector en el tiempo (esto es la derivada) según el observador A (SR A). Para abordar esta problemática vamos a estudiar los siguientes dos casos:

CASO 1:

Considérese un vector $\vec{Z}$ cualquiera (puede representar una posición, velocidad ó aceleración) que no cambie respecto del SR B, o sea que rote también con velocidad angular ω. Si el vector $\vec{Z}$ es constante visto desde el SR B no lo puede ser visto desde el sistema de referencia A. En la Figura 5.17 se representa al vector $\vec{Z}$ en los instantes t y $t+\Delta t$, en donde el SR B ha rotado un ángulo $\Delta\theta = \omega\Delta t$.

Figura 5.17

Un mismo vector representado en un sistema rotado.



De la Figura 5.17 auxiliar resulta la siguiente expresión que indica cómo ha cambiado el vector $\vec{Z}$ respecto del SRA:

$$\left|\Delta\vec{Z}\right|_{t\to t+\Delta t} \cong \left|\vec{Z}\right|\Delta\theta = \left|\vec{Z}\right|\omega\,\Delta t \;\Rightarrow\; \frac{\left|\Delta\vec{Z}\right|}{\Delta t} = \omega\left|\vec{Z}\right| \tag{5.9}$$

Esta última expresión indica el cambio que ha sufrido el vector $\vec{Z}$ en el intervalo Δt: la variación de $\vec{Z}$ respecto del tiempo visto del SR A. Matemáticamente se puede generalizar en la siguiente expresión:

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\vec{Z}\right)_A = \vec{\omega}\times\vec{Z}} \tag{5.10}$$

El subíndice A es utilizado para indicar que la derivada ha sido tomada respecto del SR A. Recordar que la hipótesis inicial de la se parte es que el vector $\vec{Z}$ no varía respecto del SR B.

Si aplicamos este resultado a la ecuación 5.1 obtenemos:

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{r}_{M/A}\right)_A = \left(\frac{d}{dt}\vec{r}_{M/B}\right)_B + \left(\frac{d}{dt}\vec{r}_{B/A}\right)_A$$

en donde con subíndices se han identificado desde donde se observa al vector al realizar la derivada.

Resulta así:

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{r}_{M/A}\right)_A = 0 + \vec{\omega}\times\vec{r}_{B/A}$$

Este nuevo resultado sí tiene sentido físico. Recordar la expresión 4.33 que fuera obtenida cuando se estudió el caso general para un movimiento circular.

CASO 2

¿Qué ocurriría si el vector $\vec{Z}$ pudiera también variar respecto del SR B ? Esto representa una situación más general aún para analizar. En la Figura 5.19 se representa al vector $\vec{Z}$ en los instantes t y $t + \Delta t$, en donde se observa que respecto del SR B ha cambiado a $\vec{Z}'$. De la figura 5.18 resulta que el vector $\vec{Z}$ visto desde el SR A, varía por dos motivos:

1. Varía su dirección porque el SR B rota respecto del SR B, esta variación está medida por:

$(\vec{\omega} \times \vec{Z})\, \Delta t$

2. Si se anula la rotación, se observa que $\vec{Z}$ varía respecto del SR B lo cual implica que varía también respecto del SR A , en la cantidad $\Delta \vec{Z}/B$.

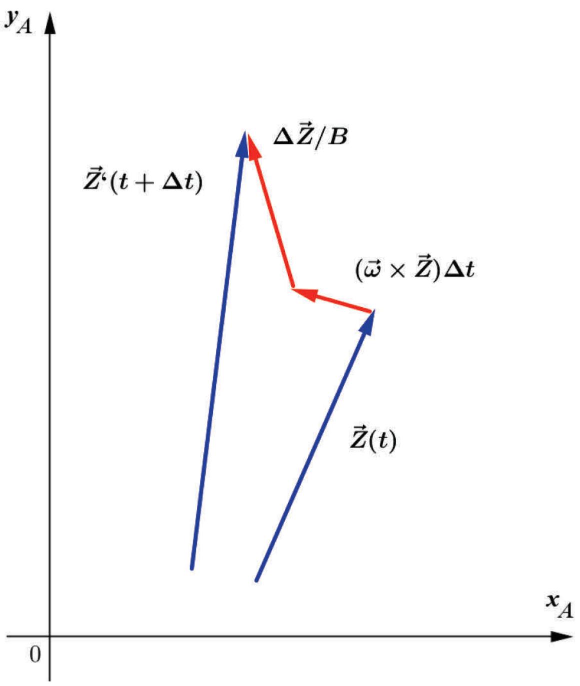


Figura 5.18

Cambio de un vector en un sistema rotado.

Así, matemáticamente surge la siguiente relación que expresa la variación total de $\vec{Z}$ respecto del SR A . Si $\vec{Z}$ varía respecto del SR B, entonces la variación $\Delta \vec{Z}$ total respecto del SR A será:

$$\Delta \vec{Z}/A = \Delta \vec{Z}/B + (\vec{\omega} \times \vec{Z})\Delta t \tag{5.11}$$

Por lo que se puede escribir la siguiente expresión general para la derivada de un vector visto del SR A (fijo) en relación con un sistema en rotación SR B.

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\vec{Z}\right)_A = \left(\frac{d}{dt}\vec{Z}\right)_B + \vec{\omega} \times \vec{Z}} \tag{5.12}$$

De esta manera, ahora sí se puede subsanar el error cometido y encontrar la relación buscada entre las velocidades en ambos sistemas de referencia: el fijo (SR A) y el rotante (SR B), bajo cualquier condición.

Observar que al derivar hemos hecho hincapié, indicado con los paréntesis, desde donde estamos realizando la derivada, o sea, desde que sistema de referencia estamos observando la variación de cada vector involucrado.

Observaciones

1. En los sistemas en rotación hay que prestar particular atención al momento de derivar vectores.

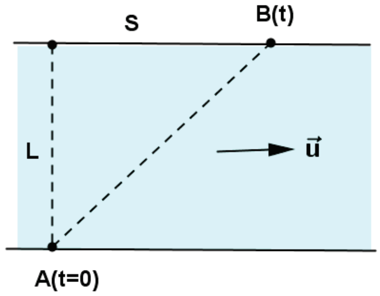
2. Se retomará la relación 5.12 para los SR rotantes cuando se analicen en Dinámica los denominados Sistemas No Inerciales. Por ahora, simplemente se quiere indicar un camino que muestre la importancia de un análisis matemático detallado antes de generalizar cualquier resultado que se pudiera haber obtenido.

5.4 PROBLEMA FINAL

A los efectos de ilustrar el estudio del movimiento relativo, se resuelve el siguiente problema que permite valorar la importancia de un adecuado racionalismo en el planteo matemático.

Problema 5.2 Video: Cinemática *clase 27/27*

Imaginemos un río de orillas paralelas entre las cuales hay una separación "L". La velocidad de la corriente es uniforme en todo el ancho del río e igual a $\vec{u}$.
¿Con qué velocidad mínima, constante respecto del río, deberá navegar un bote para que, partiendo desde el punto A de la orilla finalice en el B de la orilla opuesta, según se indica en la figura?

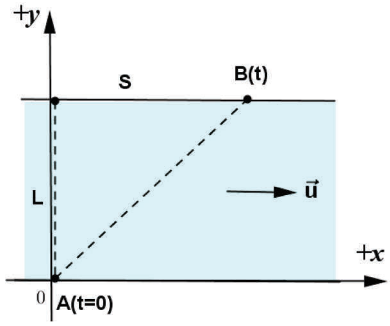


- *Realización del gráfico o boceto*

En la figura 5.19 se realiza un boceto de la situación planteada, tomando referencia en el punto A (para $t = 0$).

Figura 5.19

Boceto y SR del problema.



Las líneas punteadas acompañan al enunciado, y simplemente indican la distancia "L" entre las dos orillas y los puntos A y B que debe unir el remero.

- *Escritura de las ecuaciones de movimiento*

Se trata de un movimiento en el plano (x, y) de acuerdo con el SR adoptado. Por lo tanto es un movimiento compuesto en el plano cuyas ecuaciones describirán movimientos independientes uno de otro en los ejes x e y respectivamente.

Como se desconoce la dirección y sentido en que debe remar el remero respecto del río para alcanzar al punto B, pues la velocidad de la corriente $\vec{u}$ contribuirá también para tal fin, se supone que dicha velocidad tiene las siguientes componentes:

$$\vec{v}_{remero/río} = (b, w) \tag{5.13}$$

Así, la velocidad del remero respecto del río tiene dos componentes desconocidas: b y w, que se espera surjan del desarrollo matemático del problema. Si se refiere a Tierra la velocidad del remero, se obtiene la siguiente relación, ya que el río aporta una componente u a la componente x de la velocidad (sugerimos que realice el triángulo que relacione las velocidades para obtener la misma si no le queda claro):

$$\vec{v}_{remero/Tierra} = (b + u, w) \tag{5.14}$$

Con esta velocidad, el remero debe cruzar el río recorriendo una distancia "L" en la dirección de las y, mientras que en la dirección de las x debe avanzar sobre el río una distancia "S" (en la dirección de las x) de forma tal de alcanzar el punto B en un instante t. De esta condición, surgen las siguientes ecuaciones, y la siguiente relación entre S y L:

$$\left.\begin{aligned} L &= w\,t \\ S &= (b+u)t \end{aligned}\right\} \; S/L = (b+u)/w \tag{5.15}$$

recordar que u, S y L son datos. Este resultado nos indica la dirección con que debe remar el remero.

Matemáticamente se ha encontrado una relación que deben cumplir en todo t las componentes b y w. Vemos que b y w están relacionadas, no pueden tomar cualquier valor, sino valores que respondan a la condición 5.15. De estas ecuaciones se concluye que existen muchas soluciones que dan lugar a que el remero una los puntos A y B.

- *Respuesta a las consignas del problema*

Como se formula la consigna de encontrar el valor mínimo de velocidad respecto del río con que debe remar el remero, matemáticamente se tiene que encontrar que valores de b y w pueden conducir a minimizar su velocidad. Minimizar la velocidad del remero, es el equivalente de minimizar su módulo. Por lo tanto se plantea una expresión para el módulo de la velocidad del remero, que es la función matemática a minimizar. Utilizando el teorema de Pitágoras, el módulo al cuadrado para la velocidad del remero respecto del río es:

$$\left|\vec{v}_{remero/río}\right|^2 = b^2 + w^2 \tag{5.16}$$

Teniendo en cuenta la relación encontrada entre b y w, se obtiene una expresión para la $\left|\vec{v}_{remero/río}\right|^2$ en función de una única variable, en este caso w de la siguiente forma: $b = \left(\frac{S}{L}\right) w - u$, y reemplazando en la ecuación 5.16 obtenemos,

$$\left|\vec{v}_{remero/río}\right|^2 = \left(1 + \frac{S^2}{L^2}\right) w^2 - 2\left(\frac{S}{L}\right)\ u\, w + u^2 \tag{5.17}$$

Así se encuentra una expresión para el módulo al cuadrado de la velocidad del remero respecto del río en función de una única variable: w. Ahora, minimizando esta función, se busca para qué valor de w la misma tiene un mínimo, si es que lo tiene. Para minimizar la función 5.17 respecto de w hay que derivarla e igualarla a cero:

$$\frac{d}{dw}\left|\vec{v}_{remero/río}\right|^2 = 2\left(1 + \frac{S^2}{L^2}\right) w - 2\left(\frac{S}{L}\right) u$$

$$\frac{d}{dw}\left|\vec{v}_{remero/río}\right|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad w_{mínimo} = uSL/(L^2 + S^2)$$

Al especializar el valor obtenido para $w_{mínimo}$ en la función 5.16, se obtiene el siguiente valor mínimo para la velocidad:

$$\boxed{\left|\vec{v}_{remero/río}\right|_{mínimo} = \left[1/(1 + \frac{S^2}{L^2})\right]^{1/2} u} \tag{5.18}$$

Se debe verificar que se trata de un mínimo, para lo cual al analizar la derivada segunda de la función 5.16 especializada en este valor encontrado para $w_{mínimo}$ debe resultar mayor que cero. Matemáticamente:

$$\frac{d^{\,2}}{dw^2}\left|\vec{v}_{remero/río}\right|^2 = 2\left(1 + \frac{S^2}{L^2}\right) > 0 \rightarrow Mínimo$$

Así, se verifica que el valor $w_{mínimo}$ hallado es correcto y se responde a la consigna buscada.

Observaciones

1. Se debe tener en cuenta que se han omitido las unidades de medida en todo el desarrollo tratando de destacar únicamente el proceso matemático involucrado en la resolución.

2. Analizaremos los resultados obtenidos para reafirmarlos y comprender aún más como realmente existen muchas soluciones que dan lugar a que el remero una los puntos A y B, pero que solamente una de ellas conduce a un mínimo para la velocidad que desarrolle.

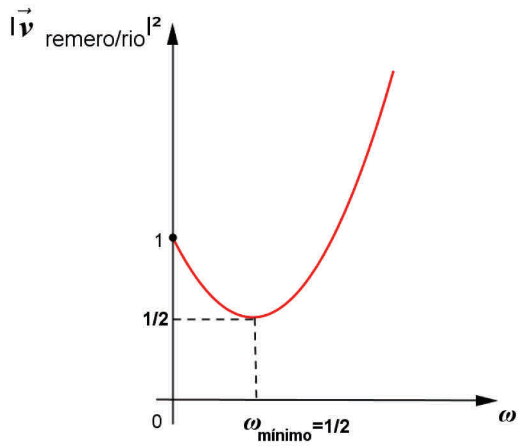
Si se grafica la velocidad del remero en función de w, según la ecuación 5.18 se observa que se trata de una parábola. A los efectos de realizar una representación más adecuada se proponen los siguientes valores para L, S y u que son los datos del problema.

$$\text{Si} \;\; S = L \;\; \text{y} \;\; u = 1\,m/s \;\Rightarrow\; \left|\vec{v}_{remero/río}\right|^2 = 2w^2 - 2w + 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} w_{mínima} = 0.5\,m/s \\ b_{mínima} = -0.5\,m/s \\ \left|\vec{v}_{remero/río}\right|^2_{mínima} = 0.5\,m/s \end{cases}$$

El siguiente gráfico (figura 5.20) muestra todos los valores posibles que puede adoptar la velocidad del remero a los efectos de unir los puntos A y B. Sin embargo, se observa también del gráfico que uno solo de ellos corresponde a un mínimo de velocidad.

Figura 5.20

Valores posibles que puede adoptar la velocidad del remero.



3. Un caso particularmente interesante a analizar es el resultado para la condición en que $u = 0$, o sea no exista corriente en el río. Si hacemos $u = 0$ en la expresión 5.18, obtenemos :

$$\left|\vec{v}_{remero/río}\right|^2 = \left(1 + \frac{S^2}{L^2}\right) w^2$$

Esta función cuadrática tiene como mínimo $w_{mínimo} = 0$ resultado que no tiene sentido físico ya que el remero tiene que remar para avanzar

Conclusión

Este problema, que tiene un grado de complejidad matemático importante, nos muestra el poder del racionalismo al momento de resolver un problema. Sin un análisis racional hubiera sido imposible no solo alcanzar el resultado esperado sino también comprender las distintas situaciones que se presentan en el mismo.

Se quiso ejemplificar con este problema en lo que se ha insistido a lo largo de todo el módulo: uno entiende realmente un problema cuando lo racionaliza matemáticamente y no antes. El verdadero problema alcanza una dimensión de comprensión en la medida que está matematizado. No hay lugar para el sentido común y la opinión en la Física.

PROBLEMAS SELECCIONADOS

1 EL LENGUAJE DEL MOVIMIENTO

1. Sea la siguiente tabla de posiciones de una partícula en movimiento durante un intervalo de 7 segundos:

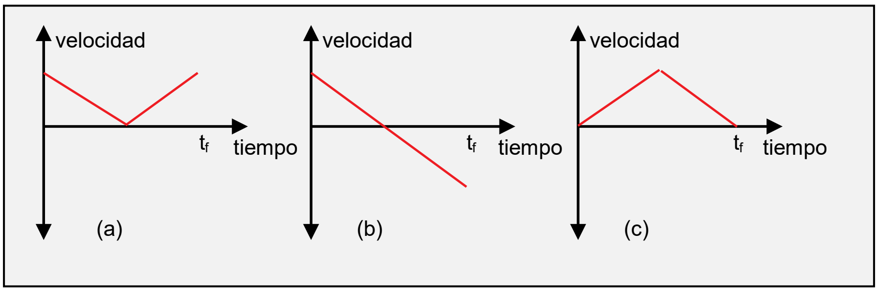
t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7
x (cm)	3	8	11	12	11	8	3	-4

a) Construir el grafico $x = x(t)$.
b) Encontrar los desplazamiento de la partícula durante los intervalos: 0 a 1s ; 4 a 5s ; 0 a 6s; 1 a 7s; 1.5 a 5.7s.
c) Encontrar la velocidad media durante esos mismos intervalos.
d) Encontrar la velocidad media durante los intervalos 1 a 3s; 1 a 2s; 1 a 1.5s.
e) Dibujar la tangente a la curva en el punto t=1s y de ella deducir la velocidad instantánea en ese punto.
f) Dibujando tangentes, determinar la velocidades para los instantes t=2, 3, 4, 5, 6 y 7s respectivamente. Con estos valores construir un gráfico de velocidad en función del tiempo, incluyendo el valor para t=1s. Teniendo en cuenta los errores posibles de estimación en la inclinación de las tangentes ¿qué clase de curva parece adaptarse mejor a lo puntos?
g) A partir del gráfico de la velocidad, encontrar la aceleración media durante los intervalos de tiempo 1 a 3s; 4 a 5s; 0 a 7s, expresándola en las unidades apropiadas ¿Qué significa el signo de la aceleración?

2. La ecuación del movimiento de la partícula a que se refiere el problema anterior es: $x = 3 + 6t - t^2$

a) Verificarla especializando en la ecuación cuatro valores de tiempo y comparar los resultados obtenidos con los valores de la tabla del ejercicio anterior.
b) A partir de la ecuación del movimiento, calcular la posición de la partícula para los instantes $t = 1.5\ s$ y en $t = 5.7\ s$. Obtener entonces el desplazamiento y la velocidad media durante este intervalo de tiempo, y comparar esta velocidad con el valor encontrado gráficamente.
c) De las posiciones de la partícula para $t = 1\ s$ y $t = 1.5\ s$, calcular la velocidad media durante el intervalo mencionado. Repetir el proceso para los intervalos temporales de 1 a 1.1s; 1 a 1.01s; 1 a 1.001s. ¿A qué valor límite parecen aproximarse los resultados encontrados anteriormente, a medida que se reduce el intervalo temporal?
d) Hallar la expresión general para la velocidad de esta partícula como función del tiempo t. Para ello computar la posición para los instantes t y Δt, dividir el desplazamiento (diferencia de posiciones) por el intervalo Δt y tratar de encontrar el límite de esta expresión conforme Δt tienda a cero. Verificar que este resultado coincida con el hallado anteriormente para $t = 1\ s$.
e) Encontrar la expresión para la aceleración de esta partícula y compararla con el resultado obtenido gráficamente.
f) Contestar las siguientes preguntas: ¿Dónde está la partícula inicialmente? ($t = 0$). ¿Para qué valor de t invierte la partícula la dirección de su movimiento? ¿Cuándo pasa por el origen? ($x = 0$). ¿Cuál es el máximo valor de la posición que alcanza? ¿Cuál es su velocidad cuando pasa por el origen?

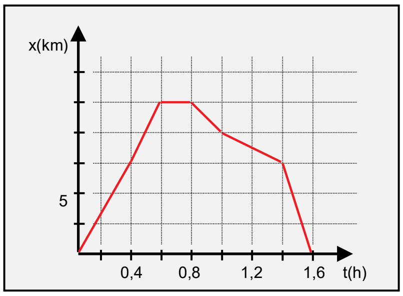
3. Una piedra se arroja verticalmente al aire en $t = 0$ y vuelve a tierra en $t = t_f$. ¿Cuál de las gráficas, de la siguiente figura, se aproxima más a la de la velocidad de la piedra en función del tiempo?



Rta: (b)

4. Dibujar en forma aproximada gráficos que muestren en función del tiempo la velocidad y posición de un niño que se traslada, para ver a un amigo, desde la puerta de casa a la esquina de la cuadra regresando a su casa un tiempo después.

5. Un repartidor se desplaza con una pequeña moto desde una pizzería a la casa de un cliente, luego de entregar el pedido regresa al local de donde partió. La figura muestra una gráfica posición-tiempo de la situación. Representar la gráfica velocidad-tiempo de ese movimiento. De los datos que se han proporcionado y de la última gráfica, ¿cuál sería una descripción aceptable del camino entre la pizzería y la casa?



6. Un coche marcha por una carretera y disminuye su velocidad al entrar a una pequeña población. Se detiene debido a un semáforo dentro de la misma y continua luego su camino, cuando llega al extremo de la población acelera de nuevo. Representar mediante una serie de gráficos (uno encima del otro): su velocidad, posición y aceleración, en función del tiempo.

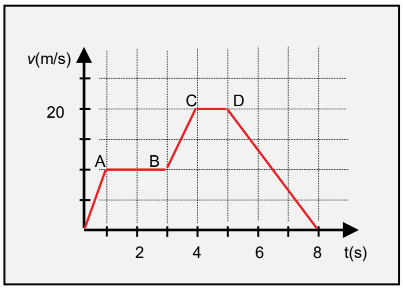
7. Un móvil describe un movimiento rectilíneo. En la figura, se representa su velocidad en función del tiempo. Sabiendo que en el instante $t = 0$, parte del origen $x = 0$.

a) Graficar la aceleración en función del tiempo.

b) Calcular el desplazamiento total del móvil, hasta el instante $t = 8\,s$.

c) Escribir la expresión de la posición x del móvil en función del tiempo t, en los tramos AB y BC.

Rta: b) 90 m

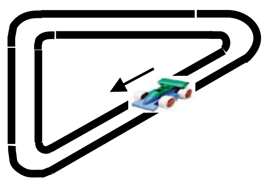


8. Un autito se desplaza por una pista plana horizontal con rapidez contante, como muestra la figura:

a) ¿Variará la velocidad del autito?

b) ¿Cuál será la dirección de la aceleración? Dibujarla sobre la pista en forma aproximada.

c) ¿Es siempre el mismo el valor de la aceleración?



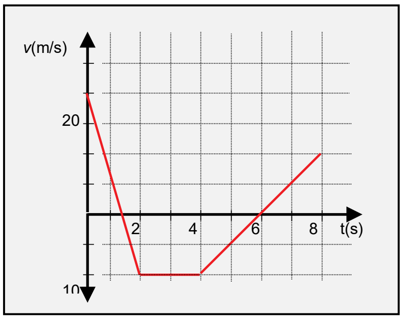
9. El gráfico de la figura ilustra la variación de la velocidad $v(t)$ de una partícula que se mueve sobre el eje OX de un sistema de coordenadas con el tiempo. En $t = 0$ la partícula está en el origen, determinar:

a) La aceleración de la partícula en $t = 0$.

b) La posición de la partícula en función del tiempo $x(t)$ (ecuación horaria) en el intervalo de $t = 0$ a $t = 2\ s$.

c) El desplazamiento de la partícula entre $t = 0$ y $t = 3\ s$.

d) Los intervalos de tiempo en que la partícula se dirige hacia el origen.



Rta: a) -15 m/s² b) x(t) = 20 m/s t – 7.5 m/s² t² c) Δx = 0

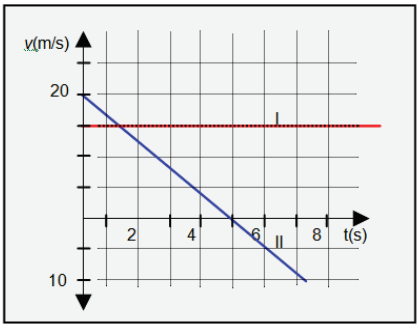
10. En la figura se representan las velocidad es de dos móviles I y II que se mueven a lo largo del eje OX de un sistema de coordenadas. Determinar:

a) La aceleración de II.

b) Espacio recorrido por I desde $t = 0$ hasta el instante en que II alcanza la velocidad $v_{II} = 8\ m/s$.

c) El desplazamiento de II en el intervalo de $t = 0$ a $t = 10\ s$.

d) La posición I en función del tiempo t, si su posición inicial es $x_{(0)} = 14\ m$.



Rta: a) a_{II} = - 4 m/s² b) Δx_I = 45 m c) Δx_{II} = 0 d) x_I = 14 m + 15 m/s t

2 MOVIMIENTOS ESPECIALES: Rectilíneo y Tiro Oblicuo

11. Un joven, con un par de patines en línea, corre a 8 m/s hacia un auto detenido en un semáforo. Cuando se encuentra a 34 metros del mismo, la luz cambia y el auto acelera en forma uniforme a razón de 1 m/s². a) Graficar la posición de cada uno en función del tiempo. b) Determinar considerando el gráfico anterior la máxima aproximación entre el joven y el auto.

12. Un ascensor de 2.4 m de altura sube con una aceleración de 1.0 m/s². Cuando se encuentra a una cierta altura se desprende un tornillo del techo. Calcular el tiempo que tarda en llegar el tornillo al suelo del ascensor. Considere $g = 9.80\ m/s^2$.

Rta: t = 0.67 s

13. Una piedra de 750 g se deja caer desde un acantilado de 10.0 m de altura. En el mismo instante se lanza hacia arriba desde la base del acantilado una pelota con una velocidad inicial de 8.00 m/s. a) ¿Qué tiempo habrá transcurrido hasta que se encuentren? b) Al encontrarse, ¿está todavía ascendiendo la pelota?

Rta: a) 1.25 s b) si

14. Un ascensor sube con velocidad constante de 2.00 m/s. Cuando se encuentra a 10.0 m sobre el nivel del suelo los cables se rompen. Prescindiendo del rozamiento. a) Calcular la máxima altura a que llega la cabina. b) Si los frenos de seguridad actúan automáticamente cuando la velocidad del descenso alcanza el valor de 4.00 m/s, determinar la altura en la que actúan los frenos. ($\boldsymbol{g = 9.80\ m/s^2}$)

Rta: a) 10.2 m   b) 9.38 m

15. Se deja caer una piedra en un pozo profundo. Al cabo de 5.00 segundos se oye el choque de la piedra con el fondo. Hallar la profundidad h del pozo, sabiendo que la velocidad del sonido en ese lugar es v_s= 330 m/s. Prescinda de la resistencia del aire. ($g = 9.80\ m/s^2$)

Rta: 107 m

16. Una roca cae libremente recorriendo la segunda mitad de la distancia de caída en 3.00 seg. Encontrar la altura desde la cual se soltó y el tiempo total de caída. ($g = 9.80\ m/s^2$)

Rta: a) h = 514 m   b) t = 10.2 s

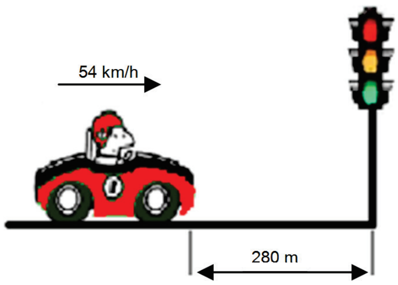
17. Una maceta se deja caer desde el reposo en la posición $x = 20\ m$ e $y = 30\ m$. Al mismo tiempo se lanza desde el origen una piedra, hacia la maceta, con una velocidad de 15 m/s.

a) Determinar el ángulo con el que tenemos que lanzar la piedra para que rompa la maceta y la altura a la que ha ocurrido el choque.

b) Dibujar en la misma gráfica la trayectoria de la piedra y de la maceta. (Considere $g = 9.80\ m/s^2$).

Rta: a) α = 56.3° y = 1.7 m

18. Un automovilista viaja a 54 km/h cuando observa que la luz del semáforo a 280 m delante se pone rojo. Sabe que el semáforo está programado para estar en rojo durante 28 s a) ¿Qué debe hacer para pasar el semáforo a 54 km/h en el momento exacto en que se ponga la luz verde otra vez? b) Trace la curva de v-t seleccionando la solución para la cual se tengan los valores más pequeños posibles de desaceleración y aceleración en m/s² c) Calcule la velocidad mínima alcanzada en km/h.



Rta: b) v_{min} = 18 km/h

19. Un objeto es lanzado en el vacío con la velocidad inicial v_0 verticalmente hacia arriba. Al cabo de t segundos, desde la misma posición y con la misma velocidad v_0 se lanza un segundo cuerpo también verticalmente y hacia arriba. Determinar al cabo de cuanto tiempo, contando desde la salida del segundo objeto, se encuentran ambos.

20. Dos partículas A y B se mueven con velocidad constante sobre un mismo eje X. La velocidad de A es, en $t = 0$, $|v_A| = 6.00\ m/s$ y la de B en el mismo instante de tiempo es $|v_B| = 5.00\ m/s$. La distancia de separación entre las partículas es 142 m. Determinar las desaceleraciones constantes que deben aplicarse a ambas partículas para que se detengan simultáneamente justo antes de chocar.

Rta: $|a_A|$ = 0.232 m/s² y $|a_B|$ = 0.193 m/s²

21. Un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, realiza en los dos primeros segundos un desplazamiento de 16.72 m y durante los dos segundos siguientes se desplaza de 23.46 m. Determinar: a) El desplazamiento que recorre en los siguientes cuatro segundos. b) La velocidad inicial. c) La aceleración del cuerpo.

Rta: a) x= 67.14 m   b) v_0= 6.675 m/s c) a = 1.685 m/s²

22. Un aeroplano que vuela horizontalmente a 1 km de altura y con una rapidez de 200 km/h, deja caer una bomba contra un barco que viaja en la misma dirección y sentido con una rapidez de 20 km/h. Pruebe que la bomba debe soltarse cuando la distancia horizontal entre el avión y el barco es de 705 m ($g = 9.80\ m/s^2$).

23. Desde la terraza de un edificio de 80 m se arroja horizontalmente una piedra contra una persona que se acerca sobre el terreno, dirigiéndose a la base del edificio, moviéndose con un MRU. Si en el instante inicial la persona se encuentra a 100 m de la base del edificio y corre hacia él con una velocidad de 18 km/h, determinar la velocidad de salida de la piedra para que se produzca el impacto ($g = 9.80\ m/s^2$).

Rta: v_0 = 20 m/s.

24. Un cañón de un barco lanza horizontalmente, desde una altura de 5 metros respecto al nivel del mar, un proyectil con una velocidad inicial de 900 m/s. Si el tubo del cañón es de 15 m de longitud y se supone que el movimiento del proyectil dentro del tubo es uniformemente acelerado, debido a la fuerza constante de los gases de la combustión de la pólvora. Considere la gravedad g = 10 m/s² para calcular: a) La aceleración del proyectil dentro del cañón y el tiempo invertido por el proyectil en recorrer el tubo del cañón. b) La distancia horizontal alcanzada por el proyectil desde que abandona el cañón hasta que se introduce en el agua.

Rta: a) 2.7×10^4 m/s² 0.033 s   b) 900 m

25. Si el alcance máximo horizontal de un proyectil es R, calcular el ángulo α que debe usarse, con la misma rapidez de lanzamiento, para que el proyectil impacte en un blanco situado al mismo nivel de lanzamiento y a una distancia $R/2$.

Rta: α = 15º

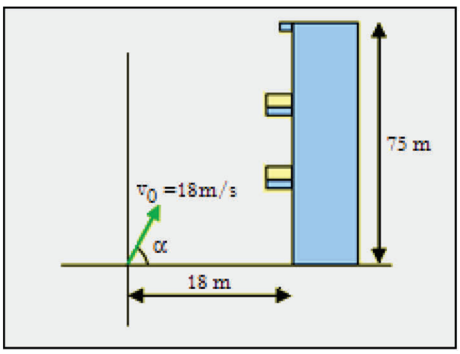
26. Un cañón de artillería lanza proyectiles con una rapidez de 300 m/s. El artillero debe darle a un blanco que se encuentra a 8640 m detrás de un cerro cuya altura es de 1000 m ubicado a 1200 m del cañón. Demuestre que es posible darle al blanco y determine el ángulo de elevación para cumplir el objetivo.

27. Desde el origen de un sistema de coordenadas se lanza una partícula con rapidez V_0 formando un ángulo de 37° con la horizontal y choca al cabo de 3.0 s con una pared en el punto (x, y). Si se cambia el ángulo de lanzamiento a 53º con la horizontal, manteniendo la misma rapidez de lanzamiento V_0. La partícula impacta la pared en el punto $(x\ ,\ y + h)$ donde h vale 7.0 metros. a) Determinar el tiempo que demora el proyectil lanzado a 53° sobre la horizontal en llegar a la pared. b) Determine la rapidez de lanzamiento de la partícula.

Rta: a) t = 4.0 s   b) V_0 =30 m/s

28. Una pelota se lanza contra un edificio con una velocidad de 18 m/s formando un ángulo sobre la horizontal cuya tangente es 3/4. El edificio tiene 75 m de altura y el lanzador se encuentra a 18 m de la pared (suponga que la lanza a ras del suelo); desprecie la resistencia del aire para calcular: a) La altura donde golpea la pelota. b) La velocidad de impacto contra el edificio (valor absoluto y ángulo). Ver figura. ($g = 9.80\ m/s^2$)

Rta: a) y = 5.84 m b) v = 14.5 m/s α = 5º 45´



3 MOVIMIENTO CIRCULAR

29. Un aeroplano vuela en un círculo de 20 km de circunferencia a una velocidad constante de 200 km/h. a) Cuál es el cambio de velocidad en un cuarto de vuelta. b) Cuál es el cambio de velocidad en media vuelta.

30. Para un objeto que se mueve sobre una trayectoria circular con una velocidad constante de 2 m/s que varía su dirección 30° en 3 segundos, calcular: a) Cuál es la variación de la velocidad en 3 segundos. b) Cuál es la aceleración media en 3 segundos. c) Cuál es la aceleración instantánea en $t = 3$ segundos.

31. La Tierra tiene un radio $R_T = 6.35\ 10^6\ m$ y rota alrededor de su eje con un período de 24 hs. Encontrar: a) la velocidad angular; b) la velocidad y aceleración, de un punto de su superficie, en función de la latitud. Considere $\emptyset$ al ángulo entre el plano ecuatorial y la latitud del punto.
Rta: a) 7.27×10^{-5} rad/s b) $v_t = 462 \cos\phi$ m/s $a_c = 3.36 \times 10^{-2} \cos\phi$ m/s²

32. Un disco de CD gira con una frecuencia de $2.00\ rps$ incrementando su velocidad hasta $600\ rpm$ en 20.0 milisegundos (1ms=10^{-3} segundos). Calcular: a) la aceleración angular en rev/s^2. b) la aceleración total en un punto ubicado a 8.00 cm del eje a los 6.00 segundos. c) el ángulo en grados que giro el disco en el tiempo anterior.
Rta: a) $\alpha = 400$ rev/s² b) $a = 374$ m/s² $\phi = 57° 30''$ respecto al radio c) 43° 12´´

33. Una polea de radio R = 6.3 cm gira alrededor de un eje horizontal. Un cuerpo, que se encuentra sujeto a una cuerda que está arrollada en la periferia del disco, desciende por acción de la gravedad. En el instante $t = 0$ la velocidad del cuerpo es de 0.040 m/s y dos segundos después ha descendido 0.20 m. Calcular la aceleración total de un punto sobre la periferia para t = 0.50 s.
Rta: $a = 0.098$ m/s² $\phi = 37° 39''$

4 MOVIMIENTO RELATIVO

34. Dos remeros en idénticas canoas ejercen el mismo esfuerzo remando en un río, uno corriente arriba mientras que el otro rema directamente corriente abajo. Un observador, en reposo sobre la orilla del río, determina sus rapideces que resultan ser de v_1 y v_2 respectivamente. Determinar en términos de los datos la rapidez de las aguas del río.
Rta: Sea w la rapidez del río y u la rapidez de los botes respecto al agua, (igual en ambos), entonces $v_1 = u - w$, $v_2 = u + w$ de modo que $w = (v_2 - v_1)/2$.

35. Un río tiene una rapidez uniforme de $0.500\ m/s$. Un estudiante nada corriente arriba una distancia de $1.00\ km$ y regresa al punto de partida. Si el estudiante puede nadar con una rapidez de $1.20\ m/s$ aguas tranquilas, ¿cuánto dura el recorrido? Comparar este resultado con el tiempo que duraría el recorrido si el agua estuviera tranquila.
Rta: t = 33 minutos 46 segundos

36. Un bote cruza un río que mide de ancho D y cuya corriente fluye con una rapidez uniforme u. El botero mantiene una orientación (la dirección en la cual apunta el bote) perpendicular al río y al motor fijo para dar una rapidez constante de v en m/s con respecto al agua. De acuerdo a los datos ¿Cuál es la velocidad del bote respecto a un observador detenido en la orilla? ¿Dónde estará el bote cuando alcance la orilla opuesta?

37. Desde el techo del vagón de un tren que está acelerando hacia el norte a una razón de $2.5\ m/s^2$ se suelta y cae un perno. ¿Cuál es la aceleración del perno con respecto a? : (a) el vagon del tren (b) la estación de tren.

38. Se lanzan simultáneamente dos esferitas: la primera con velocidad inicial horizontal y la segunda en caída libre partiendo del reposo, ambas desde la misma altura ¿Cómo ve una mosca situada en la primera esfera el movimiento de la segunda?
Rta: la ve alejarse de ella a velocidad constante.

39. El radio de la órbita de Marte alrededor del Sol es aproximadamente de 1.5 veces el radio de la órbita terrestre y el período de revolución de Marte alrededor del Sol es aproximadamente el doble que el de la Tierra. a) Dibujar a escala el Sistema Solar formado por estos dos planetas y el Sol y representar los vectores desplazamiento de Marte respecto a la Tierra correspondientes a instantes separados por $1/2$ mes terrestre y que corresponden a dos revoluciones completas de la tierra. b) Utilizar los desplazamientos anteriores para dibujar la trayectoria de Marte relativa a la Tierra. c) ¿Con qué frecuencia en este período de 2 años, parece invertir Marte su sentido de movimiento visto desde la Tierra?

40. Un transatlántico navega a 18 km/h. Un pasajero sobre cubierta pasea hacia la parte posterior del barco a razón de 4 m/s. Después de haber andado 30 m gira en ángulo recto y camina con la misma celeridad hacia la barandilla que dista 12 metros del punto donde ha girado. a) ¿Cuál es su velocidad con respecto a la superficie del agua mientras camina hacia la parte posterior? ¿Y mientras camina hacia la barandilla? b) Dibujar los vectores desplazamiento relativos a la superficie del agua correspondientes a su paseo. ¿Cuál ha sido el desplazamiento total desde su punto de partida?

41. Un joven se encuentra sobre el vagón de un tren que viaja a lo largo de una vía horizontal recta a una rapidez constante v. El estudiante lanza una pelota al aire con velocidad v a lo largo de una trayectoria que inicialmente forma un ángulo α con la horizontal y está en línea con la vía. Un observador, que está parado cerca sobre la tierra, observa que la pelota sale verticalmente. ¿Qué altura alcanzará la pelota?
Rta: $\boldsymbol{h = v^2\ tan^2\alpha/2\ g}$

APENDICE 1: Sistema Internacional

Antes de especificar las unidades básicas y derivadas del Sistema Internacional de Unidades (SI) conviene señalar algunas reglas para escribir nombres y símbolos:

- Los símbolos de las unidades se imprimen en caracteres romanos (rectos).
- En general los símbolos de las unidades se escriben en minúsculas, pero si el nombre de la unidad deriva de un nombre propio, la primera letra será mayúscula.
- Los nombres de las unidades se escriben en minúscula.
- Los símbolos de las unidades quedan invariables en plural. Los nombres de las unidades toman una s en el plural excepto los que terminan en las letras s, x o z.
- Los símbolos de las unidades no están seguidos por un punto.
- Cuando una unidad derivada está formada multiplicando dos o varias unidades, se expresa con la ayuda de símbolos de unidades separados por puntos a media altura o por un espacio.
- Cuando una unidad derivada está formada dividiendo una unidad por otra, se puede utilizar una barra inclinada, horizontal o bien exponentes negativos. No se debe introducir en una misma línea más de una barra oblicua, a menos que se añadan paréntesis.
- Notación numérica. Debe dejarse un espacio entre grupos de 3 dígitos, tanto a la izquierda como a la derecha de la coma. En números de 4 dígitos puede omitirse dicho espacio. La coma no debe usarse como separador de millares.

A. Cuadro de Unidades básicas en el SI

Magnitud	*Nombre*	*Símbolo*
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
temperatura termodinámica	kelvin	K
cantidad de sustancia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd

B. Cuadro de Unidades derivadas en el SI

Magnitud	*Nombre*	*Símbolo*	*Unidades SI*	*Unidades SI básicas*
Superficie	metro cuadrado	m^2		
Volumen	metro cúbico	m^3		
Velocidad	metro por segundo	m/s		
Aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s^2		
Densidad	kilogramo por metro cubico	kg/m^3		
Frecuencia	hercio	Hz		s^{-1}
Fuerza	newton	N		$m\cdot kg\cdot s^{-2}$
Presión	pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1}\cdot kg\cdot s^{-2}$
Energía, trabajo	julio	J	$N\cdot m$	$m^2\cdot kg\cdot s^{-2}$
Potencia	vatio	W	J/s	$m^2\cdot kg\cdot s^{-3}$
Momento- fuerza	newton por metro	$N\cdot m$		$m^2\cdot kg\cdot s^{-2}$
Ángulo plano	radián	rad		
Ángulo sólido	estereorradián	sr		
Velocidad angular	radián por segundo	rad/s		
Aceleración angular	radián por segundo cuadrado	rad/s^2		
Intensidad energética	vatio por estereorradián	W/sr		

APENDICE 2: Material Multimedial

Este Libro cuenta con distintos materiales didácticos para acompañar el proceso de enseñanza aprendizaje. Podemos distinguir dos tipos: Videos de Clases y Simulaciones de Problemas.

Videos de clases

Los videos de clases están condensados en 32 clases en tiempo real correspondientes al dictado de la materia Física 1 cursada en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina durante el año 2013. Los videos corresponden a un curso introductorio de Mecánica Clásica (Mecánica de Newton), y contienen los siguientes temas generales: Cinemática, Dinámica, Trabajo y Energía, Sistemas de Partículas, Cuerpo Rígido, Hidrostática e Hidrodinámica.

Tienen un fin didáctico y pedagógico en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la Ciencia, trabajando con la participación activa de los alumnos y utilizando distintas estrategias: Dramatizaciones, Narrativa, Historia de la Ciencia, Modelos didácticos y ejercitación dinámica de los alumnos en el pizarrón.

Son de utilidad para un curso a distancia debido a que las clases se desarrollan en tiempo real y permiten ser seguidas al ritmo de un alumno presencial, tanto para estudiantes universitarios de Ingeniería como de Ciencias Exactas y Naturales.

Los correspondientes al tema Cinemática, abarcados por el presente libro, pueden ser consultados en los siguientes links de YouTube:

Canal Javier Viau: https://www.youtube.com/channel/UC0tLZ0EtMw1P9YlQv2kDHfA

Los 6 primeros videos abarcan el tema Cinemática, y corresponden a filmaciones en tiempo real de la cursada Física 1 de la UNMdP. En ellos, si bien de baja calidad, se destaca la participación de los alumnos en los mismos.

Clase 1/32 – Clase 6/32
Clases de Viau - Física - Cinemática - Facultad de Ingeniería -- UNMdP

Lista de reproducción:

https://www.youtube.com/playlist?list=PLXSNcom1dpn1Vb78dvHy21GHMmc30qsm4

Dentro del mismo canal, se destaca esta lista de reproducción. Componen un grupo de 27 videos de alta calidad, en donde se desarrolla puntualmente todo el contenido del presente libro.

Cinemática - Física 1 - Clases de Viau - 27 Videos

Simulaciones de Problemas

Se han desarrollado 7 simulaciones de problemas correspondientes a los ejemplos planteados durante desarrollo de la presente obra, todas ellas realizadas con el software libre Modellus versión 2.5.

Para ejecutar estas simulaciones se debe instalar la aplicación Modellus que puede descargarse libremente por Internet. Una vez instalada esta aplicación, las simulaciones podrá descargarlas del siguiente link:

https://drive.google.com/file/d/0B8vrIlbS1pZ9aTl4eGF1eUdkR2M/edit?usp=sharing

Todo este material (Videos y Simulaciones) los podrá encontrar en la página de la Editorial EUDEM, agrupadas bajo la temática: Tutoriales para la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia.

Sobre los autores

Javier Eduardo Viau

Ingeniero (UNMdP). Especialista en Docencia Universitaria (UNMdP). Profesor Asociado exclusiva en Física 1, Facultad de Ingeniería y Profesor Titular en Historia de las Ciencias, Facultad de Humanidades (UNMdP). Investigador (SPU) categoría III. Director de proyectos de Investigación y de Extensión de la UNMdP relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia experimentales. Trabaja en líneas de investigación referentes a Modelos Didácticos en cuanto a su diseño, puesta en el aula y evaluación de la transferencia epistemológica. En Extensión, trabaja en la vinculación de los lenguajes de la Ciencia y del Teatro para la enseñanza de las ciencias experimentales en la escuela primaria. Es autor de material didáctico y trabajos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias en revistas y libros con referato nacionales e internacionales.

Maria Alejandra Tintori Ferreira

Lic. y Prof. de Química (UNMdP). Especialista en Docencia Universitaria (UNMdP). Jefe de trabajos practico exclusiva de Física 1, Facultad de Ingeniería (UNMdP). Docente del nivel secundario. Investigadora (SPU) categoría V. Integrante de proyectos de Investigación y Co-Directora de proyectos de Extensión de la UNMdP relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia experimentales. Trabaja en líneas de investigación referentes a Modelos Didácticos en cuanto a su diseño, puesta en el aula y evaluación de la transferencia epistemológica. En Extensión, trabaja en la vinculación de los lenguajes de la Ciencia y del Teatro para la enseñanza de las ciencias experimentales en la escuela primaria. Es autora de material didáctico y trabajos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias en revistas y libros con referato nacionales e internacionales.

Horacio Miguel Gibbs

Ingeniero (UNMdP). Jefe de Trabajos Prácticos en el área Física Básica, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UNMdP). Docente del nivel secundario en el colegio Dr. Arturo Illia (UNMdP). Investigador (SPU) categoría V. Integrante de proyectos de Investigación y Extensión de la UNMdP relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia experimentales. Trabaja en líneas de investigación referentes al diseño, desarrollo e implementación didáctica de prácticas de Laboratorio en Ciencias Naturales para los niveles secundario y universitario. Es autor de material didáctico y trabajos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias en revistas y libros con referato nacionales e internacionales.

Natalia Bartels

Ingeniera en química (UNMDP). Jefe de trabajos practico exclusiva de Física 1, Facultad de Ingeniería (UNMdP). Docente del nivel secundario. Investigadora (SPU) categoría V. Integrante de proyectos de Investigación. Trabaja en líneas de investigación referentes a Modelos Didácticos en cuanto a su diseño, puesta en el aula y evaluación de la transferencia epistemológica. Es autora de trabajos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias en revistas con referato nacionales e internacionales.

BIBLIOGRAFÍA

Como fuera mencionado en el prefacio, la bibliografía existente para abordar el estudio de la Cinemática es muy amplia y variada, tanto en contenidos como en la profundidad con que son alcanzados. Hemos dividido la Bibliografía por lo tanto tratando de guiar al lector en su consulta a los efectos de que pueda clarificar y complementar los temas abordados. Asimismo destacamos la importancia del eje Histórico Epistemológico con que es atravesada la presente obra, en donde la bibliografía recomendada permitirá ahondar en la naturaleza de la ciencia y el pensamiento científico.

Introducción a la Física y divulgación

Einstein, A., Infeld, L. (1993). *La evolución de la física*. Barcelona. Salvat.
Feynman, R. (2000). *El carácter de la ley Física*. Barcelona. Tusquest editores sa.
Haber-Schaim, U., Cross, J., Dodge, J. y Walter, J. (1980). *PSSC Física*. Barcelona. Reverté.
Hecht, E.(1987). *Física en Perspectiva*. México. Addison Wesley Longman.
Hewitt, P. (1999). *Conceptos de Física*. Madrid. Limusa.
Mc Dermott, L., Shaffer, P. y Physics Education Group. (2001). *Tutoriales para Física introductoria*. Brasil. Prentice Hall.

Mecánica clásica básica

Alonso, M. y Finn, E. (1967). *Mecánica*. Vol 1. México. Addison Wesley Longman.
Halliday, D., Resnick, R. y Kenneth, K. (1992). *Física: I*. México. CECSA.
Sears, F. (1959). *Fundamentos de Física: Mecánica, Calor y Sonido*. Vol 1. Madrid. Aguilar.
Tipler, P.(1996). *Física: I*. Barcelona. Reverté.

Mecánica clásica avanzada

Feynman, R., Leighton, R., Sands, M. (1971). *Física: Mecánica, radiación y calor*. Vol 1. México. Pearson Education.
Ingard, U. y Kraushaar, W. (1966). *Introducción al estudio de la mecánica, materia y ondas*. Barcelona. Reverté.
Dias de Deus, J., Pimienta, M., Noroña, A., Peña, T. y Brogueira, P. (2001). *Introducción a la Física*. Madrid. Mc Graw Hill.
Kittel, C., Knight, W. y Ruderman, M. (1968). *Mecánica: Berkeley Physics Course*. Vol 1. Barcelona. Reverté.
Roederer J. (2002). *Mecánica Elemental*. Buenos Aires. Eudeba.
Strelkov, S. (1978). *Mecánica*. Moscú. Mir.

Problemas y experiencias

Benguria, B., Depassier, T. (1999). *Problemas de Mecánica Clásica*. México. Alfaomega.
Gil, S. y Rodríguez, E. (2001). *Física re-Creativa*. Perú. Prentice Hall.
Hewitt, P. y Robinson, P. (1998). *Manual de laboratorio de Física*. México. Addison Wesley Longman.
Tarasóv, L. y Tarásova A. (1976). *Preguntas y Problemas de Física*. Moscú. Mir.

Historia y Epistemología de la ciencia

Bachelard, G. (1978). *El racionalismo aplicado*. Buenos Aires. Paidós.
Bunge, M. (1978). *Filosofía de la Física*. Barcelona. Ariel.
Bunge, M. (1980). *La Ciencia: su método y su filosofía*. Buenos Aires. Siglo Veinte.
Butterfield, M. (1958). *Los orígenes de la ciencia moderna*. Madrid. Taurus ediciones.
Koyré, A. (1983). *Estudios de historia del pensamiento científico*. Madrid. Siglo veintiuno.
Kuhn, T. (1993). *La revolución copernicana*. México. Planeta.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

4. MOVIMIENTO CIRCULAR

5. MOVIMIENTO RELATIVO

ÍNDICE ALFABÉTICO