ISSN 0328-5030
AÑO 22 - NEXOS 30
NOVIEMBRE 2016

NEXOS

Divulgación de las
actividades científicas
de la Universidad Nacional
de Mar del Plata

ARTÍCULO:

Corrosión de hormigón armado en ambientes marinos

ARTÍCULO:

Termas y Fuentes Huincó: ¿Una posibilidad turística abortada?

SITUACIÓN:

"Todo lo que sabía de ellos era que eran pobres..."

Paisaje Urbano y patrimonio modesto

Un reto a la preservación dinámica

Universidad Nacional de Mar del Plata
Secretaría de Ciencia, Tecnología y Coordinación

eudem

NEXOS
Divulgación de las
actividades científicas
de la Universidad Nacional
de Mar del Plata

Sumario

Año 22 - Nexos 30 - Noviembre 2016

Gauss en el País de la inducción

Problemas inductivos clásicos
en una versión diferente de una anécdota muy conocida.

- NIÑOS, SUMEN DEL 1 AL 50!

Al profesor Büttner le era difícil mantener el control en el aula y cuando los alumnos, de entre nueve y once años, lo llevaban al límite de la paciencia, los ponía a sumar:

- NIÑOS, SUMEN DEL 1 AL 100!

De esta manera ganaba tiempo para tener un descanso mental, un silencio en lo más profundo de su ser, pero los chicos eran difíciles de controlar, y al borde de un ataque de nervios grito:

- NIÑOS, SUMEN DEL 1 AL 1000!!!

Esta estrategia didáctica que hoy podríamos cuestionar, a finales del siglo XVIII en la campiña Brunswick (Alemania) era de lo más común.

Quien no era nada común era uno de los alumnos: Carl Friedrich Gauss había sido autodidacta en lecto escritura y ya se destacaba en aritmética, pero las tareas rutinarias como sumar todos los números del uno al mil no le resultaban nada interesantes.

Las ventanas

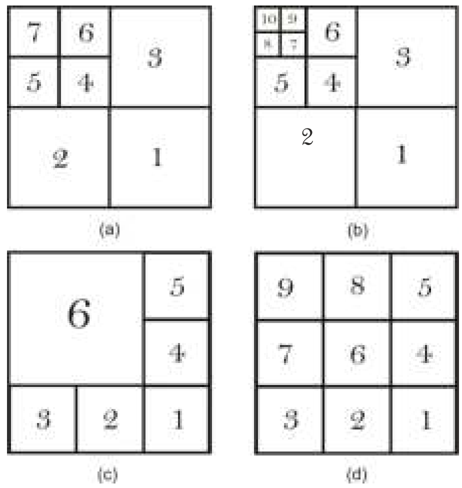
El pequeño Gauss prefirió mirar por la ventana que daba a un precioso jardín. Se detuvo en ella: era un cuadrado dividido por dos maderas que formaban otros 4 cuadrados. Por un instante comenzó a imaginar que uno de los cuadrados pequeños podía ser dividido nuevamente en cuatro más pequeños y así quedar determinados 7. (Figura a)

Repitiendo el procedimiento sobre los otros cuadrados se dio cuenta que podía cubrir el cuadrado grande con 4, 7, 10, 13, 16, 19, … cuadrados más pequeños (Figura b), entonces se preguntó:

-¿Podré cubrir un cuadrado con la cantidad que yo quiera de cuadrados pequeños?.

Fácil le resultó darse cuenta que no lo podía cubrir ni con 2 ni con 3 cuadrados, desilusionado se sintió al ver que no podía cubrirlo tampoco con 5, pero un sentimiento de ansiedad le sacudió el pecho cuando frente a sus ojos creó el cuadrado formado por 6 cuadrados, (Figura c). De esta manera él sabía que podía tomar cada uno de los cuadrados y dividirlo en cuatro y así podría formar la figura con 6, 9, 12, 15, 18, … cuadraditos (figura d).

¿Podría el lector dividir un cuadrado en 8 cuadrados y luego conseguir particiones de 11, 14, 17, ... cuadrados?



El puente

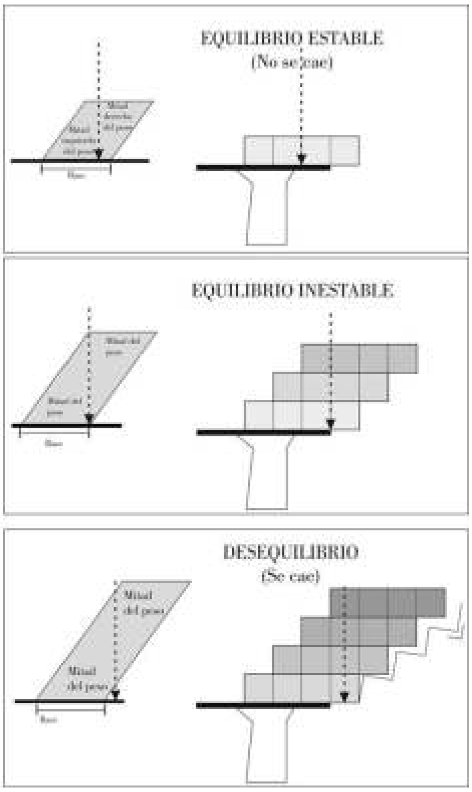
Pero Gauss no era el único que miraba la ventana, también lo hacía una inquietante hormiga que, posada sobre el pupitre de Gauss, se desesperaba por alcanzar la ventana. El niño lo percibió y decidió ayudarla: colocó un libro sobre el pupitre con la cuarta parte suspendida en el aire (figura e). La hormiga se subió al libro como esperando un siguiente que la acerque más a la ventana; evidentemente, había entendido la intención de Gauss de crear un puente. El niño colocó un segundo libro sobre el primero, también con una cuarta parte en el aire (figura f). Entusiasmado con su éxito decidió repetir su método, pero al colocar el cuarto libro el puente se desmoronó (figura g).

-Niño Gauss!!! Levante sus libros y siga sumando!!!- Gritó su maestro.

Gauss los levantó y comenzó de nuevo. Sabía que para que un objeto rígido no se caiga la línea vertical imaginaria que divide su masa en dos mitades tiene que intersectar la superficie de apoyo 'dentro' de la base de contacto (figura e), mientras que si esta línea da justo en el borde de la base, entonces el equilibrio será inestable (figura f). Por eso cuando colocó el tercer libro ya notó que el puente casi se caía. Pero si la recta cae fuera de la base, el objeto no está en equilibrio y se cae hacia ese lado. (figura g).

Gauss consiguió llegar a la ventana que estaba a una distancia de dos libros y medio hacia la derecha, ¿con cuántos libros usted conseguiría lo mismo que el niño Gauss?

Y cuando la hormiga tocó la ventana no tardó en escabullirse hacia el patio, no sin antes dedicarle un saludo con la pata al constructor del puente.



(e)

(f)

(g)

Gauss quedó perplejo, convencido de que su profesor no lo veía, abrió la ventana, saltó al patio y empezó a perseguir a la hormiga. Faltaban todavía más de 50 años para que Lewis Carroll advirtiera del peligro que conlleva perseguir conejos y otros animales, así que el pobre Gauss no estaba prevenido.

Los monjes marcados

La hormiga salió del colegio y empezó a recorrer las tierras de Brunswick hasta llegar al Monasterio. Allí lo recibió un Monje al cual Gauss interpeló:

- ¿Ha visto usted mi hormiga?
- El monje no habla - interrumpió la hormiga saliendo detrás del hombro del monje.
- ¡¡¡¿Y tú sí?!!! Pero si eres una hormiga. No entiendo.
- Lo que pasa es que yo no he hecho votos de silencio, a diferencia de este monje y todos sus compañeros del monasterio.
- ¿Y para qué un monje hace votos de silencio?
- No te quedes con la duda: ve y pregúntales!!- se burló la hormiga.

Gauss se acercó a los monjes para evaluar si romperían los votos, pero se sorprendió al notar que 10 monjes tenían una extraña marca en la frente. Justamente esos 10 monjes estaban marchándose mientras los otros los observaban con algo de desconsuelo.

- Hormiga, ya que hablas tanto, dime, qué significa la marca en la frente.
- Hace unos días, un profeta les dijo que, mágicamente, marcaría la frente de al menos uno de ellos. También les dijo que los marcados son elegidos y que cuando estén seguros que tienen la marca deben dormir su última noche en el monasterio y luego abandonarlo. El monasterio no tiene espejos así que no es tan fácil estar seguro de que uno mismo tiene la marca, aunque es claro verla en la frente de los demás.
- Si hoy se están yendo 10 monjes marcados, es porque eso pasó hace 10 días.
- ¿Cómo estás tan seguro? - dijo la hormiga.
- Si el marcado fuese solo uno, el primer día vería que en la frente de todos los demás no hay marca, y como el profeta dijo que iba a haber al menos un marcado, deduciría que es él mismo. Entonces, se marcharía al

día siguiente, es decir, tardaría un día en marcharse. En cambio, si hubiese dos marcados, cada uno vería al otro y dudaría si él mismo está marcado, o no. Al pasar el primer día y ver que el único que él ve marcado no se va, comprenderá que no era el único con marca (ya vimos que si hay un solo marcado se va al primer día). Entonces comprendería que él también tiene la marca. De hecho los dos marcados razonarían exactamente igual, se darían cuenta que son ellos quienes están marcados y al segundo día se marcharían los dos.

- ¿Y si fuesen tres? - preguntó la hormiga.
- Cualquiera de los tres marcados razonaría así: "Si al segundo día los dos monjes que estoy viendo marcados no se fueron quiere decir que no están seguros, es porque hay un tercer marcado que tengo que ser yo".
- Pero tú no estás marcado - le dijo la hormiga.
- Claro que yo no estoy marcado - dijo Gauss tocándose la frente-. Estoy reproduciendo el pensamiento de cualquiera de los tres marcados, si fuesen sólo tres. Así el segundo día los tres marcados se darían cuenta y al tercer día se marcharían los tres.

Razonando de igual manera podemos concluir que, si se marchan al décimo día, entonces, son 10 los monjes marcados.

Ladrones ilustrados

- Dime hormiga, ¿A dónde van?
- No sabría decirte, ¿y si los seguimos?
- Debería volver a clase.
- ¿Para sumar números?
- Tienes razón.

Vieron a los monjes subir a una carroza, esperaron a que se acomodaran y se escondieron en la parte trasera.

Durante el camino, mientras Gauss le pedía explicaciones a su pequeña amiga sobre su habilidad para el habla, la carroza se detuvo y se escucharon unos gritos. Una horda de 100 ladrones emboscaban la carroza.

Mudos, pero del susto, los monjes entregaron sus pocas pertenencias. Descontentos con el botín uno de los ladrones dio la orden:

- Llévense la carroza!!!

Sin poder evitarlo, el niño, la hormiga y la carroza fueron trasladados a lo que parecía ser (y seguramente era) la guarida de los maleantes. Allí se dispusieron a repartir las escasas ganancias: 100 monedas para 100 ladrones. El niño pensó que rápidamente terminarían, pues una moneda a cada uno dejaría contento a todos, pero comenzaron una especie de votación.

- Hormiga amiga ¿Sabes lo que están haciendo?
- Las ideas de la Ilustración han llegado hasta estos malhechores y han ideado un sistema de votación a la moda de la Revolución Francesa.
- ¡Qué bueno!
- No tanto, el sistema es el siguiente: El ladrón más joven hace una propuesta de repartija, se vota dicha propuesta entre todos, si la propuesta consigue más de la mitad de los votos (el 50% no es suficiente), la propuesta es aceptada y todos contentos; pero si es rechazada el proponente es decapitado con guillotina y comienza todo el proceso de nuevo.
- Qué desalmados!!! Los ladrones ya no tienen códigos!!!
- En lugar de códigos tienen prioridades, las cuales son: 1ra) Salvar su vida. 2da) Ganar dinero, cuanto más, mejor. 3ra) Matar un compañero.
- ¿Es decir que si sólo quedasen dos ladrones A y B, cualquier cosa que proponga el más joven (B) sería votada negativamente por A y así B perdería la vida?
- Exacto, es por eso, que si fuesen tres, A, B y C (el más joven), entonces C propondrá quedarse con todas las 100 monedas, B tendrá que votar a favor, caso contrario matarían a C y se caería en el caso anterior, en el cual B pierde la cabeza.

Dejamos al lector que razone cuál sería la propuesta del más joven de los 100 ladrones, aclarando que, ante una perspectiva incierta, los ladrones se comportarán desde perspectiva más optimista, es decir, que si una posible futura repartija podría tocarle 2 ó 3 monedas, él estará seguro que ganará las 3.

A	B	C	D	E	F
nada	nada	100			
1	1	nada	98		
2 ó nada	2 ó nada	1	nada	97	
3 ó nada	3 ó nada	2	1	nada	94

Esquema de reparto de 3, 4, 5 y 6 ladrones. Nótese que, en el caso de 6 ladrones, cuando el primero (F) hace su propuesta ofrece 3 monedas a A o a B porque ambos son optimistas y esperan poder ganar 2 monedas si reparte E, aun sabiendo que uno de ellos no recibirá nada. Una variante interesante del problema es que las votaciones se puedan ganar con el 50% de los votos. Un desafío es conseguir una variante del sistema de repartija lo suficientemente simple como para poder predecir rápidamente la propuesta del ladrón número 100.

El Sultán y sus esposas

- Y por qué son tan sanguinarios? preguntó Gauss.
- ¿Por qué no lo preguntas? Seguro que ellos no hicieron voto de silencio ...
- ¡¡¡Un momento!!! dijo el niño. Hormigas que hablan, puentes infinitos, monjes marcados y ladrones ultra-lógicos, esto no tiene sentido ... ¿dónde estoy?
- Estamos en el País de las Maravillas Inductivas. Aquí todo se resuelve utilizando el pensamiento inductivo y la inducción matemática, develó la hormiga.
- ¿Y qué diferencia hay?

- El pensamiento inductivo es el que se usa cuando de casos particulares se infiere una ley general, aunque no siempre funciona. Por ejemplo, cuando empezaste a apilar libros para hacer un puente indujiste que siempre que se agregue uno, dejando una cuarta parte en el aire, no se caería. El razonamiento inductivo fue erróneo porque al cuarto libro, el puente se cayó. También usaste un razonamiento inductivo cuando a partir de los casos de 1, 2 y 3 monjes llegaste a una 'conclusión' para el caso de 10.
- ¿Y la inducción matemática cómo funciona?
- No te lo puedo explicar, pero tendrás que saberlo, porque la Esfinge te exigirá que razones utilizándola para poder salir de este mundo.
- ¿Cuál Esfinge?
- Yo, dijo la Esfinge, y si quieres volver a tu mundo tendrás que resolver el siguiente problema: un Sultán...
- ¡¡Un momento!! Protestó el niño. Habitualmente las esfinges piden resolver un problema para entrar a un mundo, no para salir.
- En esos mundos se toma examen de ingreso porque el aventurero tiene que saber para poder entrar; en el País de las Maravillas Inductivas puedes entrar neófito, pero debes demostrar que has aprendido algo para poder salir.
- ¡Pero si yo viví sólo 5 episodios!
- ¡¡Más que suficiente!! Sigo con el problema: un Sultán que tiene 100 esposas, cada año se va de vacaciones con un grupo diferente de ellas. Puede llevar a todas, a ninguna, a una de ellas, o a varias. ¿Cuántos veranos podrá hacer esto sin repetir el grupo de esposas que lo acompaña?

– ¿Cómo mantiene tantas esposas? –pregunto Gauss.
– Eso es problema del Sultán – replicó la Esfinge.
– ¡Y de las esposas! Además de vivir hacinadas tienen que soportar que el Sultancito no lleve todas de vacaciones.
– Sin respuesta no hay Salida. Sentenció la Esfinge.

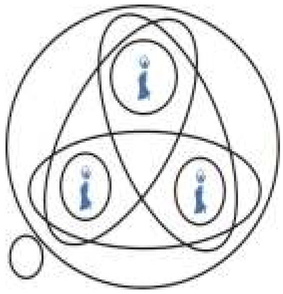
Sin estar conforme, Gauss empezó a razonar: 'si tuviese una sola esposa, tendría dos veranos posibles: con ella o sin ella. Si tuviera 2 esposas, las posibilidades serían: con una, con la otra, sin ninguna o con las dos; en total 4 posibilidades. Para tres esposas ... con la ayuda de un lápiz y papel formó todos los grupos posibles: son 8 veranos posibles! Parecen potencias de 2'. (Ver figura)

'Si un sultán tiene n esposas, seguramente se puedan formar 2^n grupos. En el caso del sultán en cuestión, son 2^{100} veranos, muchísimos más de lo que durará él!'.

Y el niño Gauss comenzó a avanzar hacia la salida.

- Alto! Gritó la Esfinge. Has razonado inductivamente: de unos pocos casos has inducido una fórmula general, pero no lo has demostrado, por lo tanto no sabes si realmente esa fórmula es verdadera.

Bien, dijo Gauss, la demostración es ésta: hemos verificado que con 3 esposas son 8 veranos, supongamos que agregamos una esposa, digamos que se llama Felisa. Entonces podemos armar los mismos grupos de esposas sin Felisa y además a cada uno de esos grupos le podemos agregar a Felisa, así por cada grupo de antes tenemos dos: sin Felisa y con Felisa. Así duplicamos los grupos, por eso a los 2^3 grupos lo multiplicamos por 2, $2^3\times2=2^{3+1}=2^4$. Ahora lo mismo pasa si agregamos una nueva esposa, digamos que se llama Sara, tenemos el doble de grupos (con Sara y sin Sara), así: $2^4\times2=2^{4+1}=2^5$. Y así podemos razonar hasta el infinito o parar en 100 que es lo que nos interesa.



Cada curva encierra un posible grupo de esposas (si solo fuesen tres). Note que hay tres grupos de dos esposas, tres grupos de una esposa, uno de tres y uno sin esposas. Ocho en total

esposas	grupos que se pueden formar
0	$1 = 2^0$ (el sólo sin esposa)
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2\times2 = 2^2$
3	$8 = 2\times2\times2 = 2^3$

Sigo Sumando

- Muy bien, dijo la Esfinge. Has dado una demostración por inducción de tu conjetura inicial, aun sin saber qué es exactamente la inducción. Pero, por otro lado, ninguna de las esposas se llama Felisa, así que te quedarás en el País de las Maravillas Inductivas para siempre.
- ¡No es justo! Protestó el niño Gauss, ¡Quiero volver!
- Mejor despierta, dijo la hormiga.
- Pero si no estoy dormido, dijo Gauss.
- Estás dormido, dijo la hormiga.
- No estoy dormido, dijo Gauss.
- ¿Estás dormido? preguntó el Profesor Büttner.
- No estoy dormido, dijo Gauss despertando del extraño sueño inductivo.
- ¿Y la suma de los 100 primeros números? reclamó el profesor.

Desperezándose Gauss le respondió: "La suma de los números de 1 hasta n es n.(n+1)/2 y lo podría demostrar por inducción pero hay una forma más fácil: supongamos que solo queremos sumar del 1 al 10, coloquemos en dos filas estos números, en una de menor a mayor y, en la otra, de mayor a menor y procedamos a sumarlos de esta manera:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11

El resultado es sumar 10 veces 11, lo que da 110. En realidad es el doble de lo que se está buscando, por lo que hay que dividir por 2, así: 110/2 = 55.

Otra tarea para el lector será entonces calcular la suma de los números del 1 al 100, como exige el profesor.

Desde ese día Büttner se dio cuenta del prodigio que tenía en su clase y consiguió que Gauss continuase sus estudios con maestros mejor preparados y seguramente más pacientes.

¿Y qué es la inducción matemática?

La inducción suele comparase con el juego de poner piezas de dominó para que caigan en progresión, una volteando otra. Para estar seguro de que se caerán todas hay que estar seguro de que la primera lo hará y que, si cae la pieza n, entonces también la pieza n+1 lo hará.

El razonamiento inductivo junto con la inducción matemática forman una pareja formidable, la primera se encarga de buscar respuestas y la segunda de demostrar que esas respuestas son correctas.

Uno más

En su sueño Gauss ha dejado algunos interrogantes. Como lo que abunda no daña sumemos uno más: los polígonos convexos tienen algunos lados sobre los cuales se apoyan resultando estables, y otros inestables (ver los paralelepípedos de las primeras figuras). ¿Por qué no existe ninguno con todos sus lados de apoyo inestables?

El lector interesado en diseño de puentes, misteriosas marcas religiosas, reparto de botines, vacaciones de sultanes poligámicos, e inducción en general, podrá encontrar las explicaciones completas de éstos y otros problemas en la página: matematicanexos.blogspot.com.

Por su parte, Gauss continuó sorprendiendo por su precocidad y terminó convirtiéndose en una de las más destacadas leyendas del panteón matemático. El profesor Büttner siguió enseñando, los ladrones robando, el sultán viajando, la Esfinge preguntando y la hormiga amiga, claro está, hablando.

Autores: Osmar Cabrera, Jorge N. López.
Ilustraciones: Ana Laura Reyes, Majo

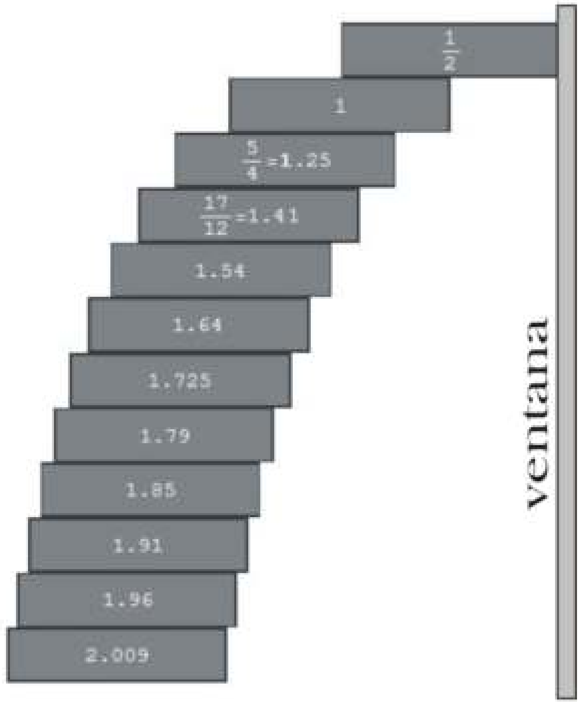


Figura que resuelve el problema de la ventana. Se indica la distancia desde el centro de cada libro a la ventana. La sucesión es $a_1=½$, $a_2=1$, $a_3 = 5/4$, $a_4 = 17/12$ (siendo a_1 la distancia a la ventana del libro superior) y en general:

$a_{n+1} = ½+½(1+½+⅓+...+1/n)$

Si disponemos de cuántos libros queramos, podemos llegar tan a la derecha del pupitre como necesitemos usando la mencionada sucesión.

NOTA: tener en cuenta que a_1 indica la distancia a la ventana del último libro colocado y a_n la del primero.

NEXOS

UNIVERSIDAD NACIONAL de MAR DEL PLATA

DIAGONAL ALBERDI 2695 (B7600GYI)
MAR DEL PLATA | ARGENTINA

+54 0223 492 1705 INT. 141

WWW.MDP.EDU.AR